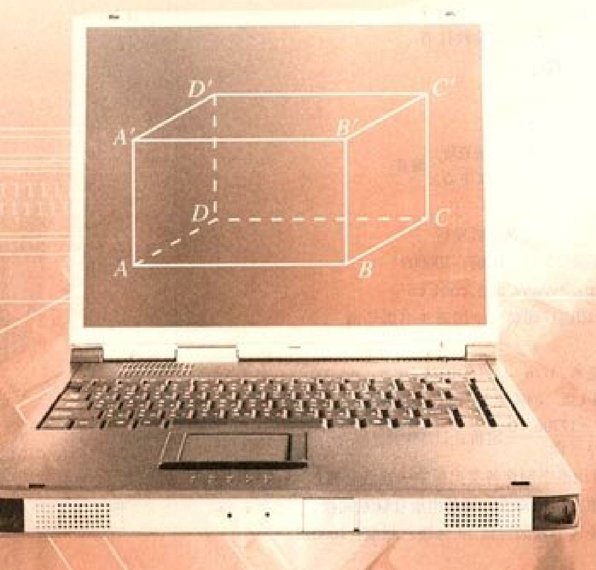
普通高中课程标准实验教科书

数学 ②

必修

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

第一章 空间几何体

几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科.空间几何体是几何学的重要组成部分，它在土木建筑、机械设计、航海测绘等大量实际问题中都有广泛的应用.

本章我们从对空间几何体的整体观察入手，研究空间几何体的结构特征、三视图和直观图，了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法.

CHAPTER 1

1.1 空间几何体的结构

在我们周围存在着各种各样的物体，它们都占据着空间的一部分．如果我们只考虑这些物体的形状和大小，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫做**空间几何体**．本节我们主要从结构特征方面认识几种最基本的空间几何体．

观察

观察下面的图片，这些图片中的物体具有怎样的形状？日常生活中，我们把这些物体的形状叫做什么？我们如何描述它们的形状？

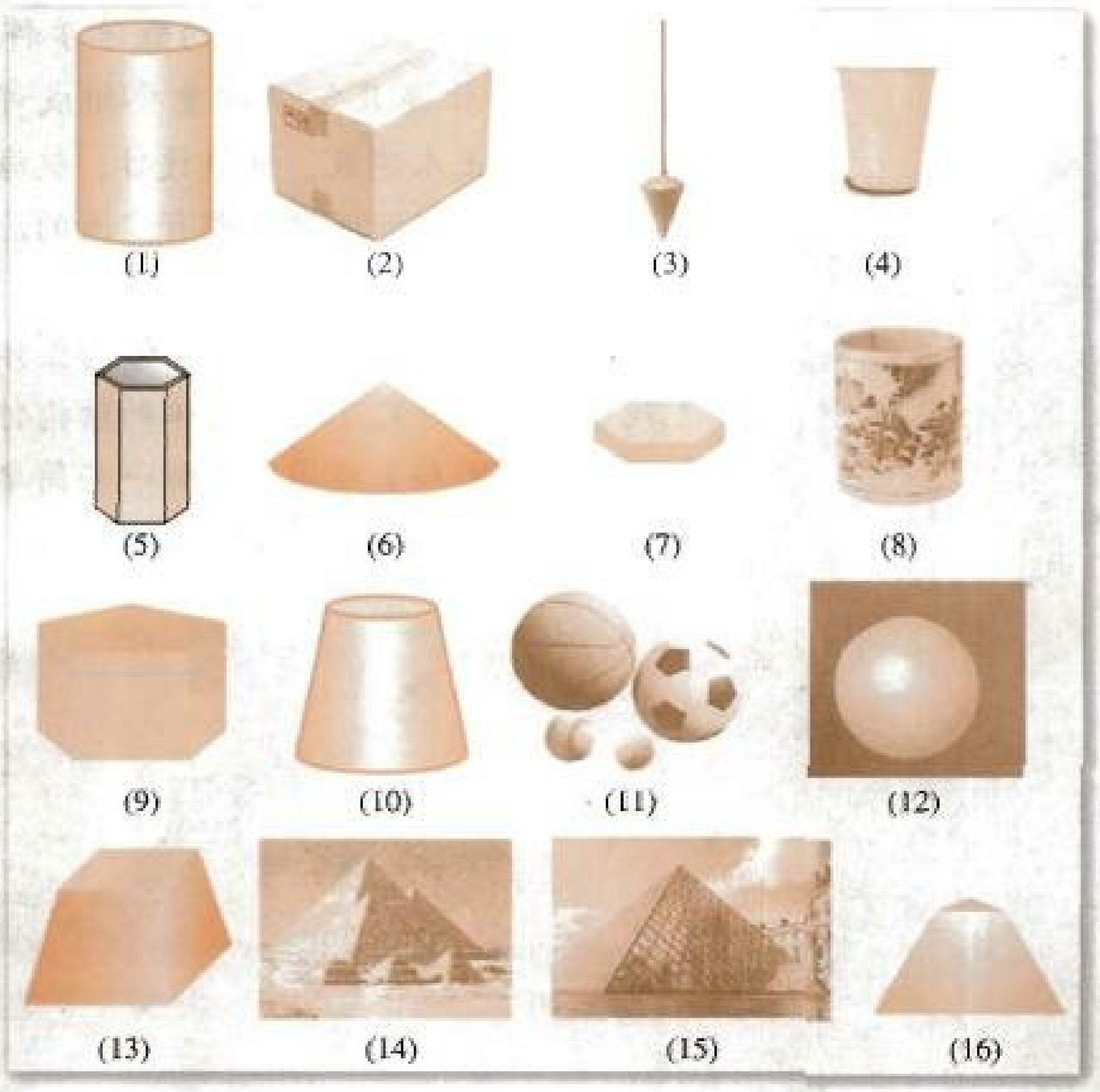


图 1.1-1

观察一件实物，说出它属于哪种空间几何体，并分析它的结构特征，要注意它与平面图形的联系．注意观察组成几何体的每个面的特点，以及面与面之间的关系．

通过观察，可以发现，(2)、(5)、(7)、(9)、(13)、(14)、(15)、(16) 具有同样的特点：组成几何体的每个面都是平面图形，并且都是平面多边形；(1)、(3)、(4)、(6)、(8)、(10)、(11)、(12) 具有同样的特点：组成它们的面不全是平面图形．

一般地，我们把由若干个平面多边形围成的几何体叫做**多面体**（图 1.1-2）．围成多面体的各个多边形叫做多面体的**面**，如面 $ABCD$，面 $BCC'B'$；相邻两个面的公共边叫做多面体的**棱**，如棱 AB，棱 AA'；棱与棱的公共点叫做多面体的**顶点**，如顶点 A，D'．(2)、(5)、(7)、(9)、(13)、(14)、(15)、(16) 这些物体都具有多面体的形状．

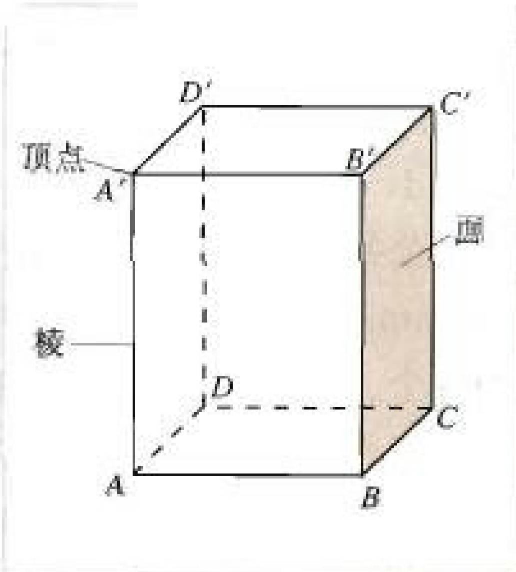


图 1.1-2

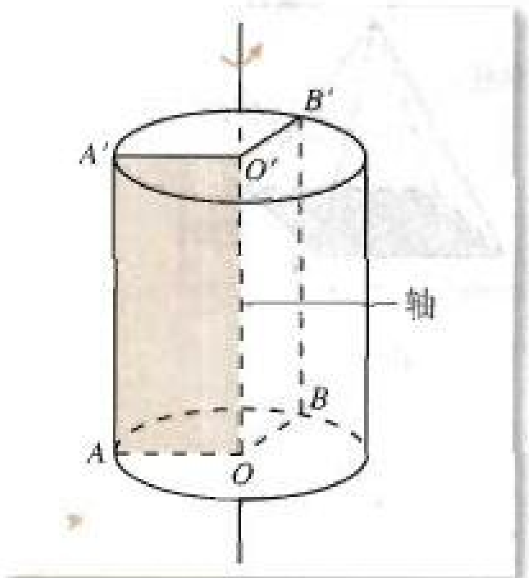


图 1.1-3

我们把由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的封闭几何体叫做**旋转体**（图 1.1-3）．这条定直线叫做旋转体的**轴**．(1)、(3)、(4)、(6)、(8)、(10)、(11)、(12) 这些物体都具有旋转体的形状．

1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征

1. 棱柱的结构特征

图 1.1-1 中的 (2) 是我们非常熟悉的长方体包装盒，它

的每个面都是平行四边形（矩形），并且相对的两个面给我们以平行的形象，如同天花板与地面一样.

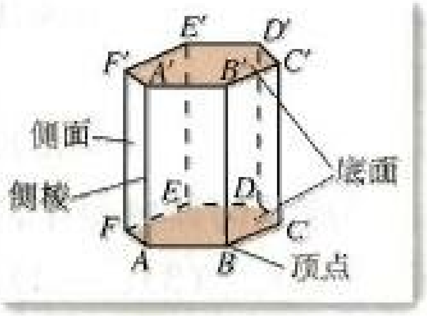


图 1.1-4

如图 1.1-4，一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做**棱柱**(prism)．棱柱中，两个互相平行的面叫做棱柱的**底面**，简称**底**；其余各面叫做棱柱的**侧面**；相邻侧面的公共边叫做棱柱的**侧棱**；侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的**顶点**．底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……我们用表示底面各顶点的字母表示棱柱，图 1.1-4 的六棱柱表示为棱柱 $ABCDEF\text{-}A'B'C'D'E'F'$．图 1.1-1 中的（5）、（7）、（9）都是具有棱柱结构的物体.

本章所说的多边形，一般包括它内部的平面部分.

2. 棱锥的结构特征

图 1.1-1 中的（14）和（15）这样的多面体，均由平面图形围成，其中一个面是多边形，其余各面都是三角形，并且这些三角形有一个公共顶点.

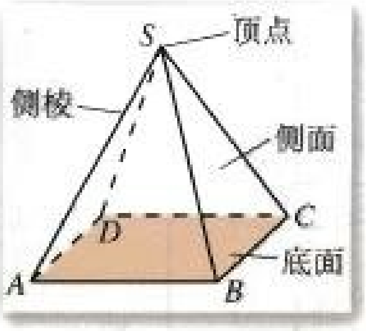


图 1.1-5

如图 1.1-5，一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做**棱锥**(pyramid)．这个多边形面叫做**棱锥的底面**或**底**；有公共顶点的各个三角形面叫做**棱锥的侧面**；各侧面的公共顶点叫做**棱锥的顶点**；相邻侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**．底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……其中三棱锥又叫四面体．棱锥也用表示顶点和底面各顶点的字母表示，图 1.1-5 的四棱锥表示为棱锥 $S\text{-}ABCD$.

思考？

如何描述图 1.1-1 中（13）、（16）的几何结构特征，它们与棱锥有何关系？

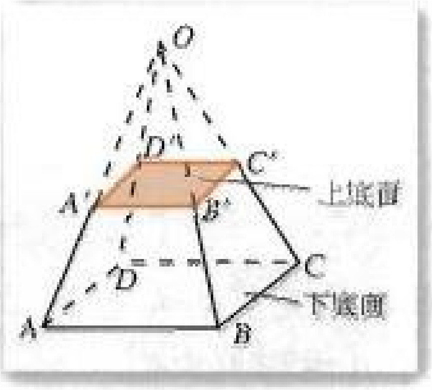


图 1.1-6

3. 棱台的结构特征

我们已经学过棱柱和棱锥，但是具有图 1.1-1 中像 (13)、(16) 这种结构的几何体我们没有学过. 像具有 (13) 和 (16) 这种几何结构特征的多面体，是用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分，这样的多面体（图 1.1-6）叫做**棱台** (frustum of a pyramid). 原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的**下底面**和**上底面**，棱台也有侧面、侧棱、顶点.

探究

请仿照棱锥中关于侧面、侧棱、顶点的定义，给出棱台的侧面、侧棱、顶点的定义，并在图 1.1-6 中标出它们.

由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台……与棱柱的表示一样，图 1.1-6 中的四棱台表示为棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.

4. 圆柱的结构特征

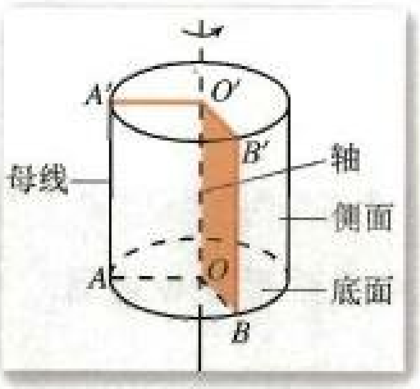


图 1.1-7

如图 1.1-7，以矩形的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做**圆柱** (circular cylinder). 旋转轴叫做**圆柱的轴**；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做**圆柱的底面**；平行于轴的边旋转而成的曲面叫做**圆柱的侧面**；无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做**圆柱侧面的母线**.

在生活中，许多容器和物体都是圆柱形的，如图 1.1-1 中的 (1) 和 (8). 圆柱用表示它的轴的字母表示，图1.1-7 中圆柱表示为圆柱 $O'O$.

圆柱和棱柱统称为柱体.

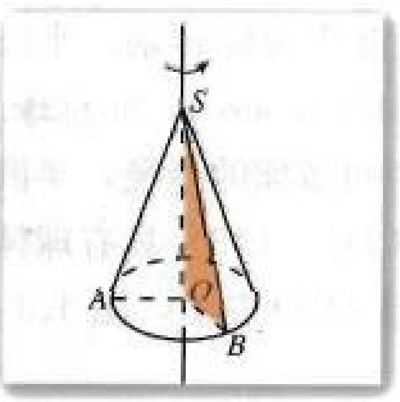


图 1.1-8

5. 圆锥的结构特征

与圆柱一样，圆锥也可以看作是由平面图形旋转而成的. 如图 1.1-8，以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做**圆锥** (circular cone). 图 1.1-1 中的 (3) 和 (6) 就是圆锥形物

体．圆锥也有轴、底面、侧面和母线．

探究

请你仿照圆柱中关于轴、底面、侧面、母线的定义，给出圆锥的轴、底面、侧面、母线的定义，并在图 1.1-8 中标出它们．

圆锥也用表示它的轴的字母表示，图 1.1-8 中的圆锥表示为圆锥 SO．

棱锥与圆锥统称为锥体．

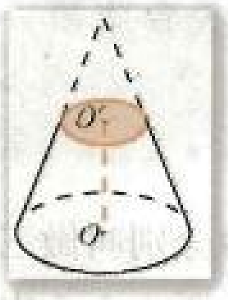


图 1.1-9

6. 圆台的结构特征

与棱台类似，用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分（图 1.1-9）叫做**圆台**（frustum of a cone）．图 1.1-1 中的（4）和（10）都是具有圆台结构特征的物体．

与圆柱和圆锥一样，圆台也有轴、底面、侧面、母线．请你在图 1.1-9 中标出它们，并用字母将图 1.1-9 中的圆台表示出来．

棱台与圆台统称为台体．

探究

圆柱可以由矩形旋转得到，圆锥可以由直角三角形旋转得到．圆台可以由什么平面图形旋转得到？如何旋转？

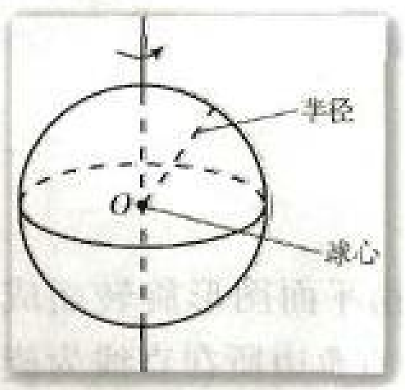


图 1.1-10

7. 球的结构特征

如图 1.1-10，以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫做**球体**（solid sphere），简称**球**．半圆的圆心叫做球的**球心**，半圆的半径叫做球的**半径**，半圆的直径叫做球的**直径**．图 1.1-1 中的（11）、（12）具有球体的几何结构特征．球常用表示球心的字母 O 表示，图 1.1-10 中的球表示为球 O．

探究

棱柱、棱锥与棱台都是多面体，它们在结构上有哪些相同点和不同点？三者的关系如何？当底面发生变化时，它们能否互相转化？圆柱、圆锥与圆台呢？

1.1.2 简单组合体的结构特征

现实世界中的物体表示的几何体，除柱体、锥体、台体和球体等简单几何体外，还有大量的几何体是由简单几何体组合而成的，这些几何体叫做简单组合体.

简单组合体的构成有两种基本形式：一种是由简单几何体拼接而成，如图 1.1-11 中(1)、(2)物体表示的几何体；一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成，如图 1.1-11 中(3)、(4)物体表示的几何体.

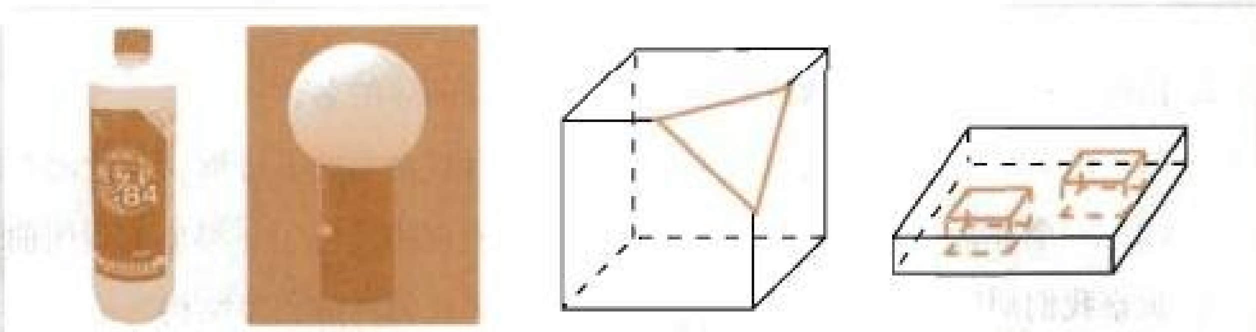


图 1.1-11

观察

观察图 1.1-11 中(1)、(3)两物体所示的几何体，你能说出它们各由哪些简单几何体组合而成吗？

图 1.1-11 中(1)物体所示的几何体由两个圆柱和两个圆台组合而成，如图 1.1-12；图 1.1-11 中 (3) 物体所示的几何体由一个长方体截去一个三棱锥而得到，如图 1.1-13.

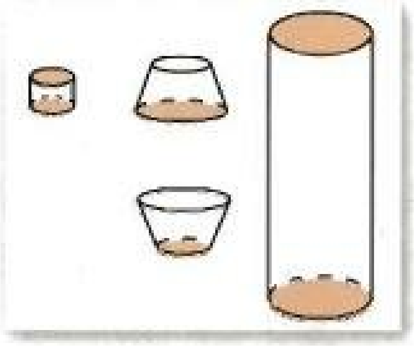


图 1.1-12

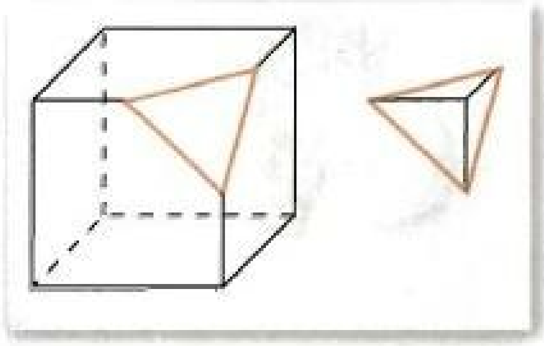


图 1.1-13

现实世界中，我们看到的物体大多由具有柱、锥、台、球等几何结构特征的物体组合而成.

练　习

1. 说出下列物体的主要几何结构特征：

（第 1 题）

2. 根据下列对于几何结构特征的描述，说出几何体的名称：

（1）由 7 个面围成，其中两个面是互相平行且全等的五边形，其他面都是全等的矩形；

（2）一个等腰三角形绕着底边上的高所在的直线旋转 180° 形成的封闭曲面所围成的图形.

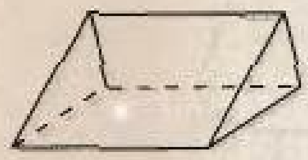
3. 观察我们周围的物体，并说出这些物体所示几何体的主要结构特征.

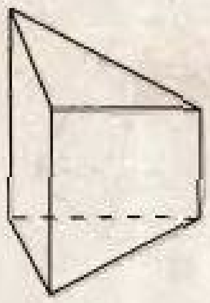
习题1.1

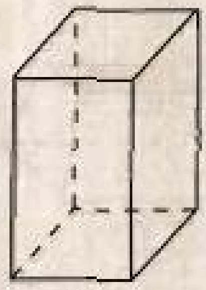
A 组

1. 选择题.

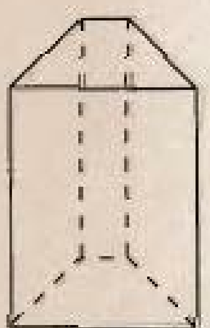
（1）下列几何体中是棱柱的有（　　）

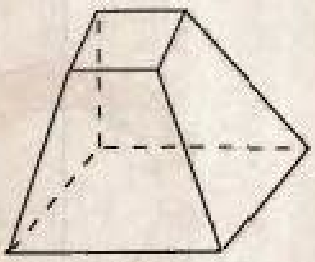

①

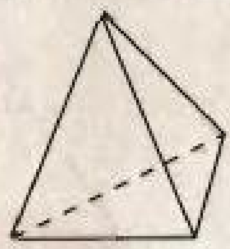

②


③


④


⑤


⑥


⑦

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

（2）下列命题正确的是（　　）

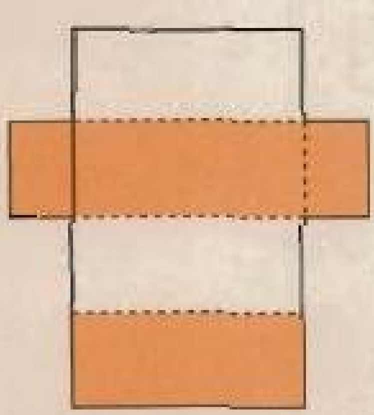
（A）有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱.

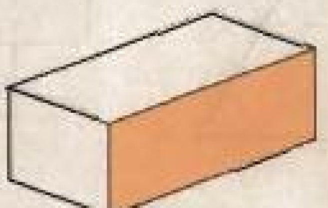
（B）有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱.

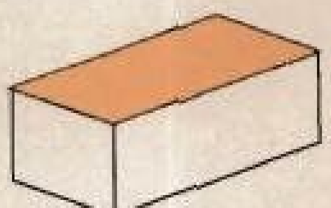
（C）有两个面平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体叫棱柱.

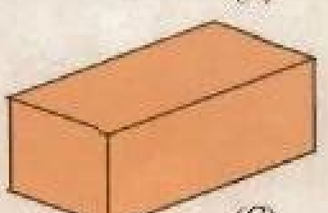
（D）用一个平面去截棱锥，底面与截面之间的部分组成的几何体叫棱台.

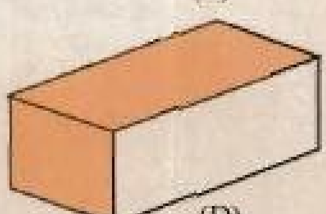
（3）如图，右边长方体中由左边的平面图形围成的是（　　）



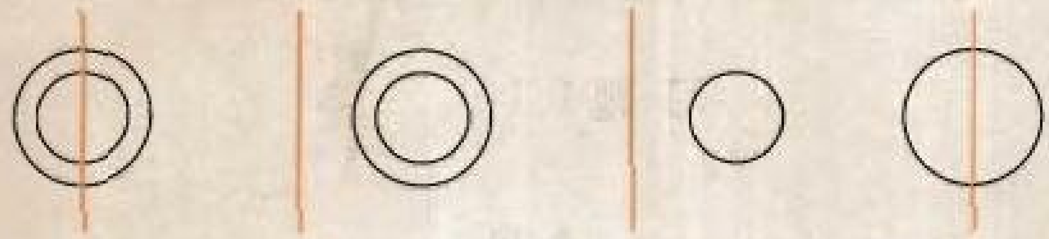

(A)


(B)

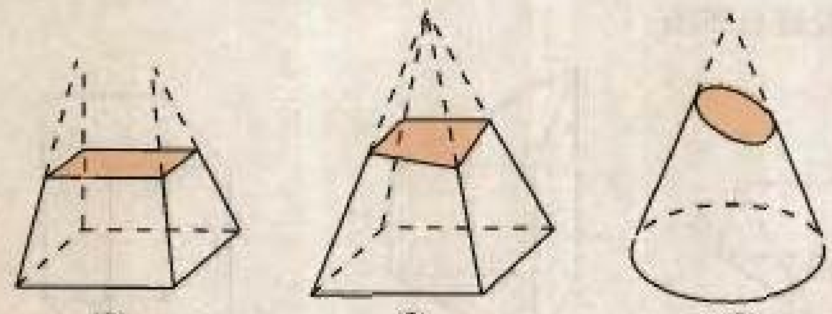

(C)


(D)

(4) 充满气的车轮内胎可由下面某个图形绕对称轴旋转而成，这个图形是（　　）.

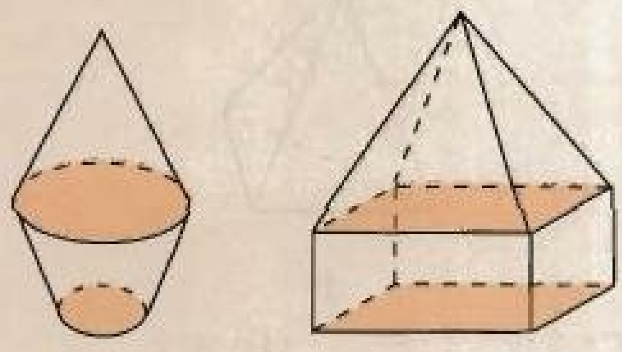


2. 判断下列几何体是不是台体，并说明为什么.

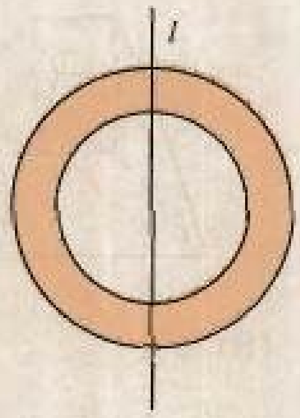


（第 2 题）

3. 说出下列几何体的主要结构特征：



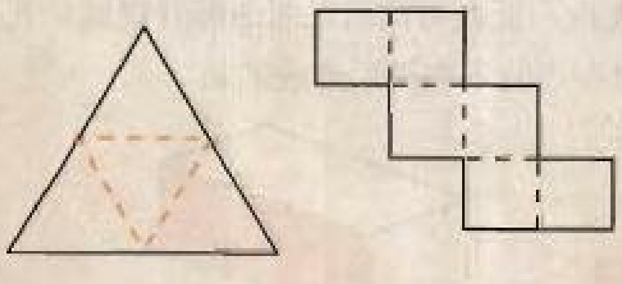
（第 3 题）



（第 4 题）

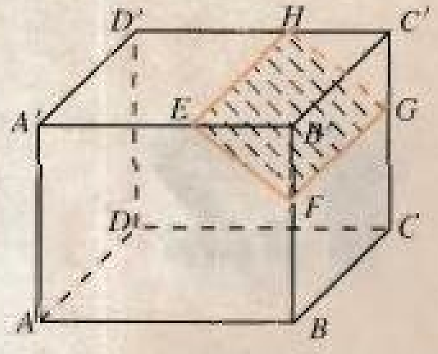
4. 如图，一个圆环面绕着过圆心的直线 l 旋转 180°，想象并说出它形成的几何体的结构特征.

5. 将图中的平面图形按适当比例放大，分别制作四面体和正方体，并说明平面图形与空间几何体的关系.



（第 5 题）

B 组



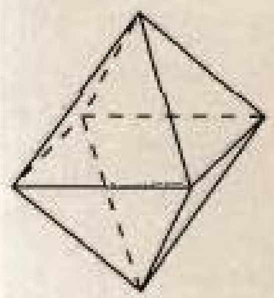
（第1题）

1. 如图，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中被截去一部分，其中 $EH/\!/A'D'$．剩下的几何体是什么？截去的几何体是什么？你能说出它们的名称吗？

2. 请研究下列物体所示几何体的几何结构特征．

（第2题）

3. 如图是一个八面体（由八个面围成的多面体），它的每个面都是全等的三角形．如果沿棱剪开得到平面图形，至少要剪开几条棱？为什么？



（第3题）

1.2 空间几何体的三视图和直观图

前面我们认识了柱体、锥体、台体、球体以及简单组合体的结构特征．为了将这些空间几何体画在纸上，用平面图形表示出来，使我们能够根据平面图形想象空间几何体的形状和结构，这就需要学习视图的有关知识．

我们常用三视图和直观图表示空间几何体．三视图是观察者从三个不同位置观察同一个空间几何体而画出的图形；直观图是观察者站在某一点观察一个空间几何体而画出的图形．三视图和直观图在工程建设、机械制造以及日常生活中具有重要意义．本节我们将在学习投影知识的基础上，学习空间几何体的三视图和直观图．

1.2.1 中心投影与平行投影

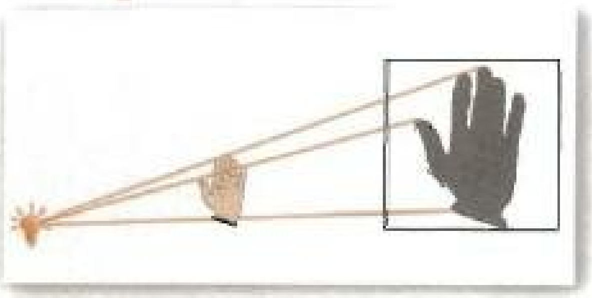


图 1.2-1

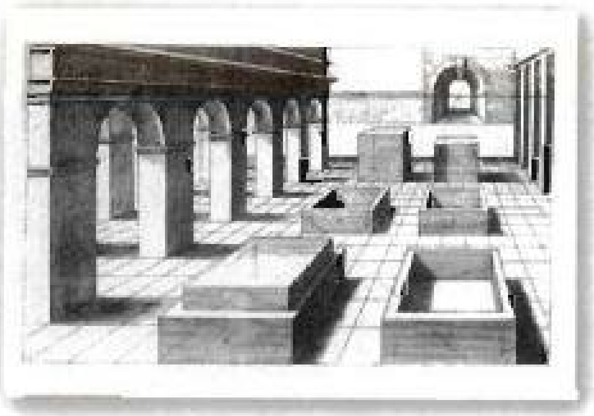


图 1.2-2

我们知道，光是直线传播的．由于光的照射，在不透明物体后面的屏幕上可以留下这个物体的影子，这种现象叫做**投影**．其中，我们把光线叫做**投影线**，把留下物体影子的屏幕叫做**投影面**．

我们把光由一点向外散射形成的投影，叫做**中心投影**．中心投影的投影线交于一点．中心投影现象在我们的日常生活中非常普遍．例如，在电灯泡的照射下，物体后面的屏幕上就会形成影子，而且随着物体距离灯泡（或屏幕）的远近，形成的影子大小会有不同（图 1.2-1）．另外，人们可以运用中心投影的方法进行绘画，使画出来的美术作品与人们感官的视觉效果是一致的（图 1.2-2）．

我们把在一束平行光线照射下形成的投影，叫做**平行投影**．平行投影的投影线是平行的．在平行投影中，投影线正对着投影面时，叫做正投影，否则叫做斜投影．

在平行投影之下，与投影面平行的平面图形留下的影子，与这个平面图形的形状和大小是完全相同的.

一个三角板在中心投影和不同方向的平行投影之下，所产生的投影如图 1.2-3.

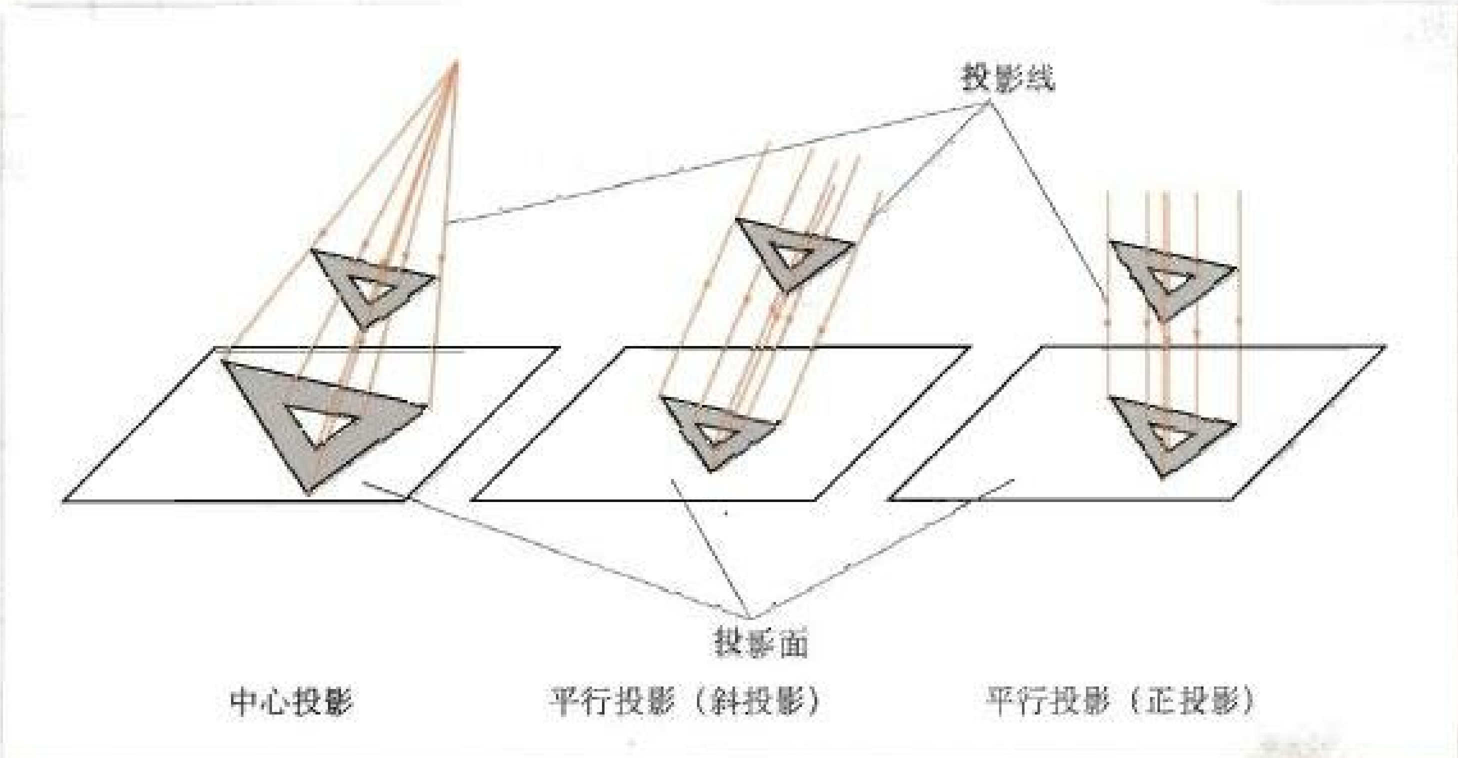


图 1.2-3

我们可以用平行投影的方法，画出空间几何体的三视图和直观图.

1.2.2　空间几何体的三视图

1. 柱、锥、台、球的三视图

把一个空间几何体投影到一个平面上，可以获得一个平面图形，但是只有一个平面图形难以把握几何体的全貌. 因此，我们需要从多个角度进行投影，才能较好地把握几何体的形状和大小. 通常，总是选择三种正投影，一种是光线从几何体的前面向后面正投影，得到投影图，这种投影图叫做几何体的**正视图**；一种是光线从几何体的左面向右面正投影，得到投影图，这种投影图叫做几何体的**侧视图**；第三种是光线从几何体的上面向下面正投影，得到投影图，这种投影图叫做几何体的**俯视图**. 几何体的正视图、侧视

图和俯视图统称为几何体的**三视图**. 图 1.2-4 是一个长方体的三视图.

一般地，侧视图在正视图的右边，俯视图在正视图的下边.

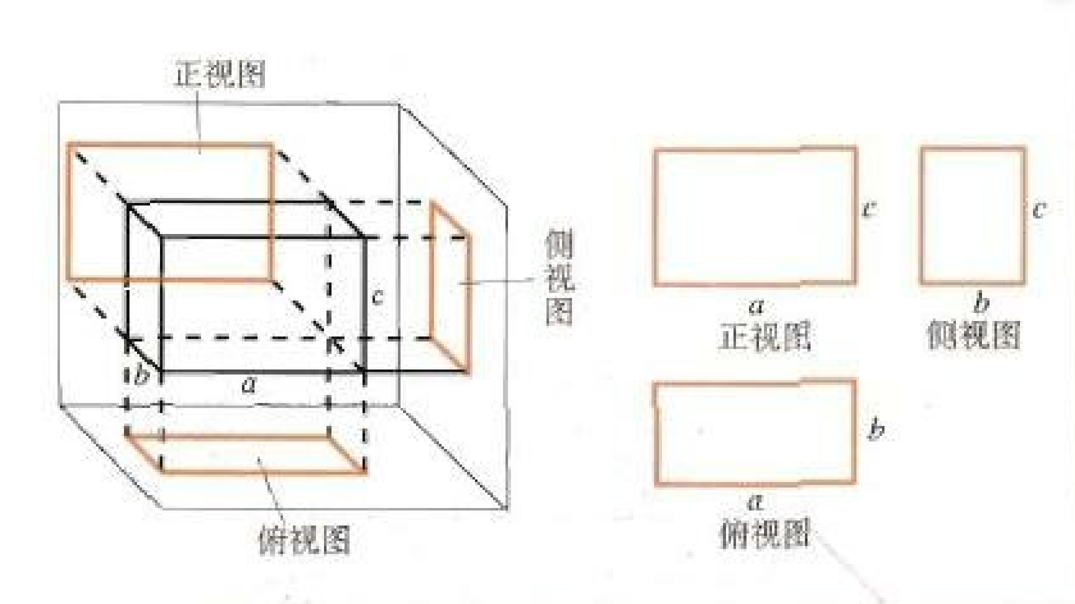


图 1.2-4

观察

正视图、侧视图和俯视图分别是从几何体的正前方、正左方和正上方观察到的几何体的正投影图，它们都是平面图形. 观察长方体的三视图，你能得出同一个几何体的正视图、侧视图和俯视图在形状、大小方面的关系吗？

由图 1.2-4 可以发现，长方体的三视图都是长方形，正视图和侧视图、侧视图和俯视图、俯视图和正视图都各有一条边长相等.

一般地，一个几何体的侧视图和正视图高度一样，俯视图与正视图长度一样，侧视图与俯视图宽度一样.

图 1.2-5(1)、(2)分别是圆柱和圆锥的三视图.

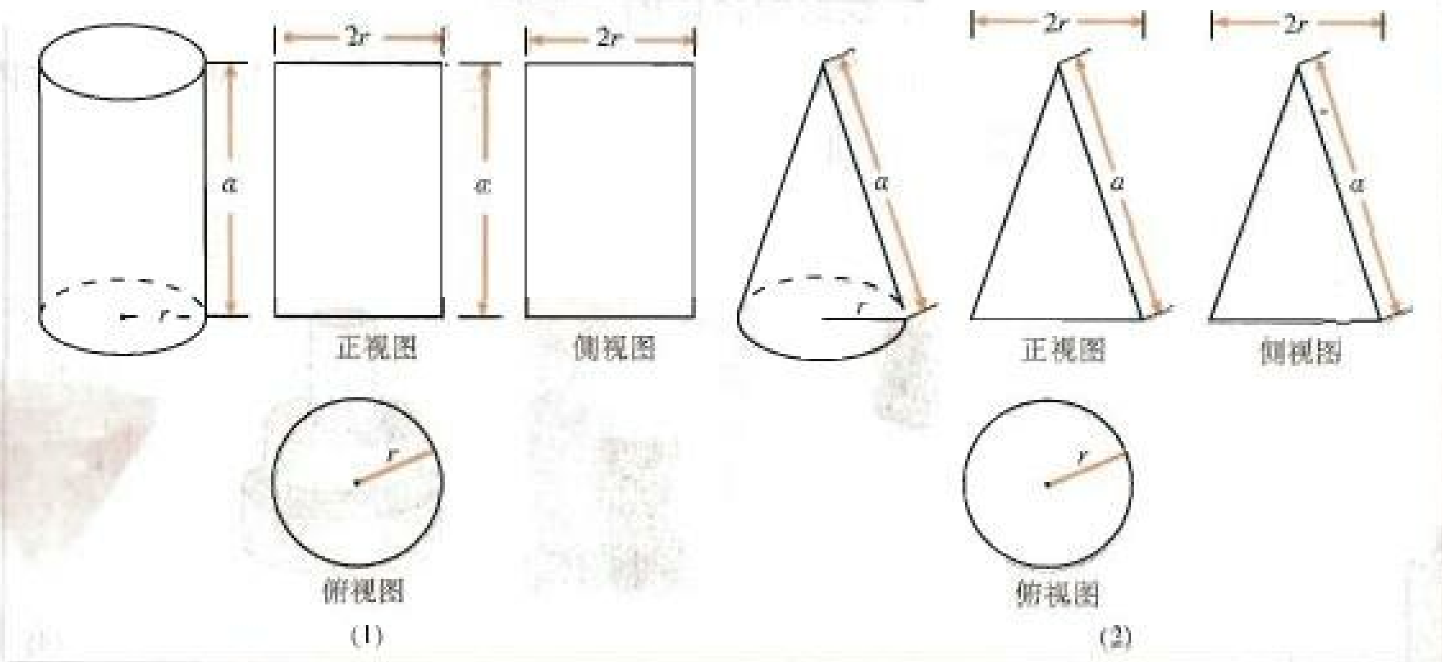


图 1.2-5

思考

图 1.2-6(1)、(2)分别是两个几何体的三视图，你能说出它们对应的几何体的名称吗？

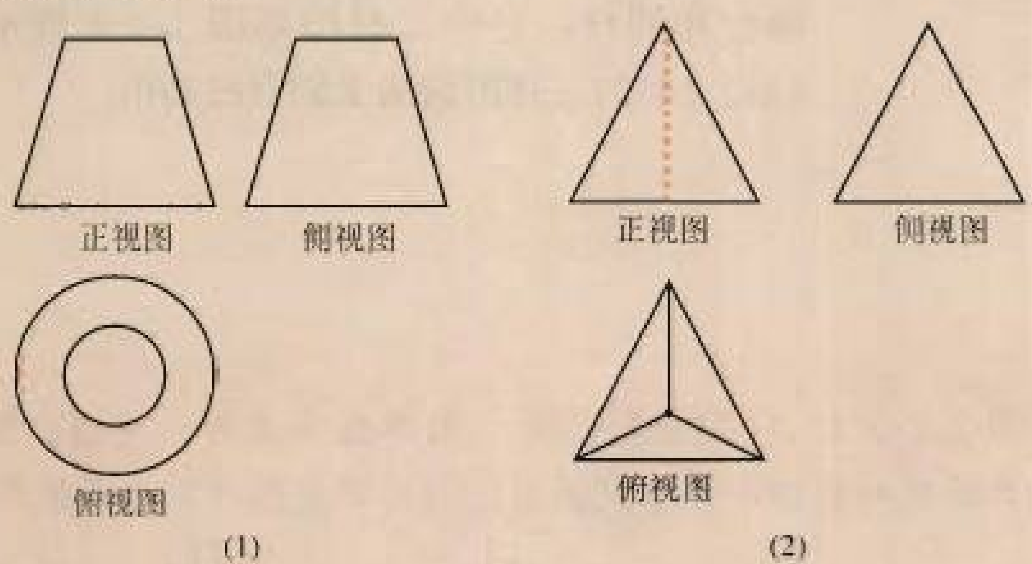


图 1.2-6

图 1.2-6(1)的三视图表示的几何体是圆台，图 1.2-6(2)的三视图表示的几何体是三棱锥.

画几何体的三视图时，能看见的轮廓线和棱用实线表示，不能看见的轮廓线和棱用虚线表示.

探究

(1) 自己动手制作一个底面是正方形、侧面是全等的三角形的棱锥模型，并画出它的三视图.

(2) 自己制作一个上、下底面都是正三角形，侧面是全等的等腰梯形的棱台模型，并画出它的三视图.

2. 简单组合体的三视图

下列物体表示的几何体是一些简单几何体的组合体，你能画出它们的三视图吗？

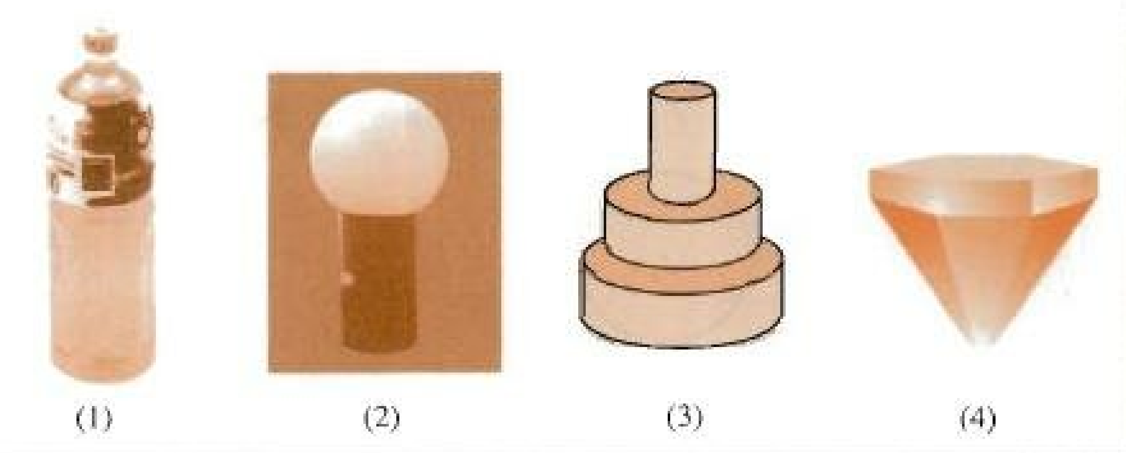


图 1.2-7

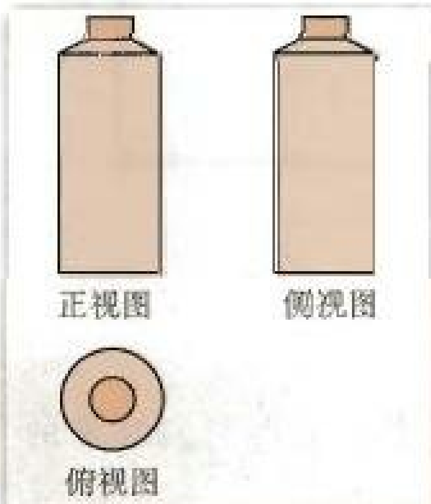


图 1.2-8

对于简单几何体的组合体，一定要认真观察，先认识它的基本结构，然后画它的三视图．图 1.2-7（1）是我们熟悉的一种容器，容器的主要几何结构，从上往下分别是圆柱、圆台和圆柱，它的三视图如图 1.2-8 所示．图 1.2-7(2)、(3)、(4)的三视图请同学们自己画出．

思考？

图 1.2-9(1)、(2)分别是两个简单组合体的三视图，想象它们表示的组合体的结构特征，并尝试画出它们的示意图（尺寸不作严格要求）．

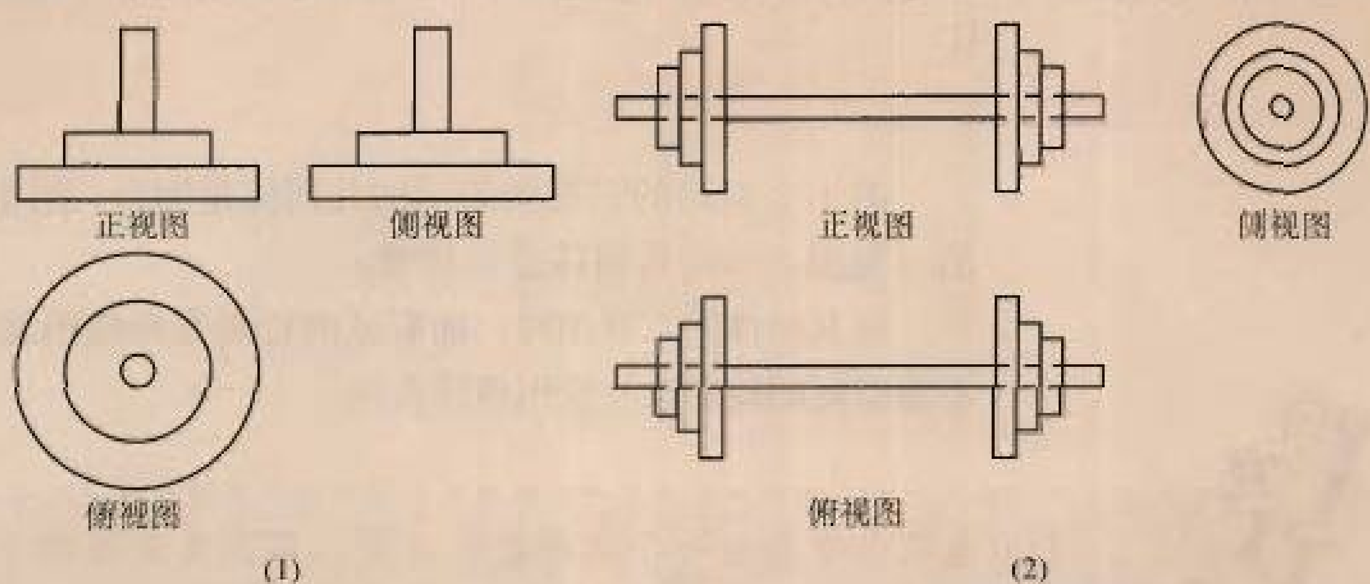
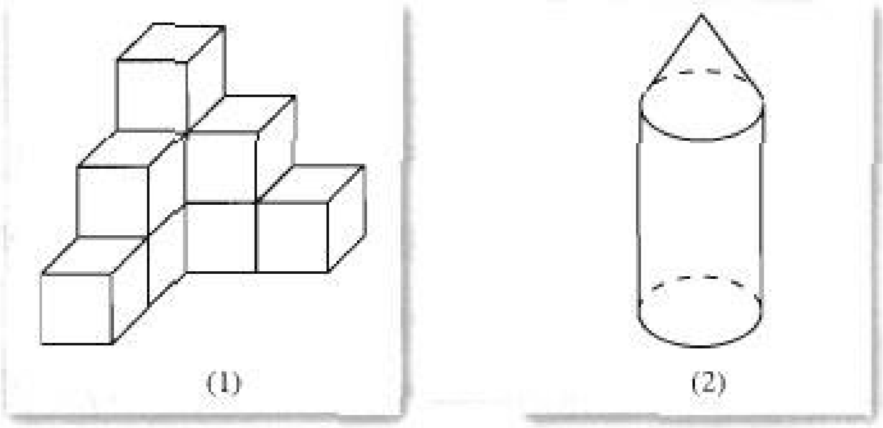


图 1.2-9

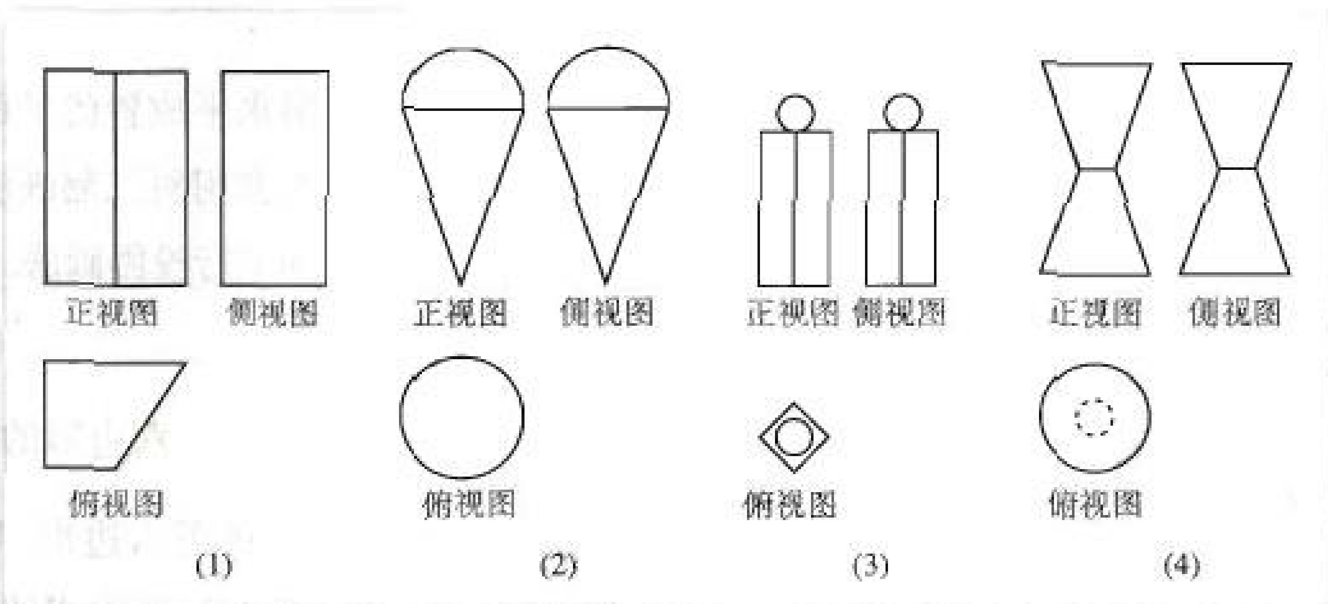
练　习

1．画出下列几何体的三视图：



（第 1 题）

2．观察下列几何体的三视图，想象并说出它们的几何结构特征，然后画出它们的示意图：

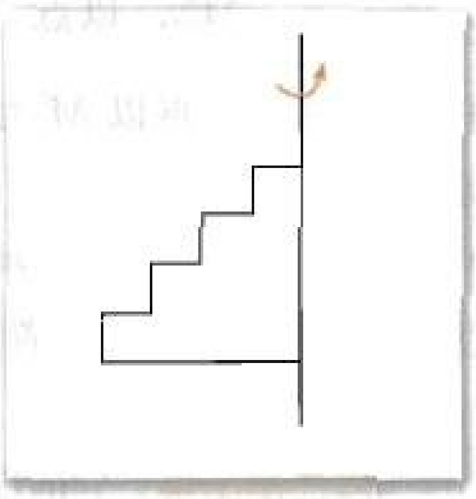


（第 2 题）

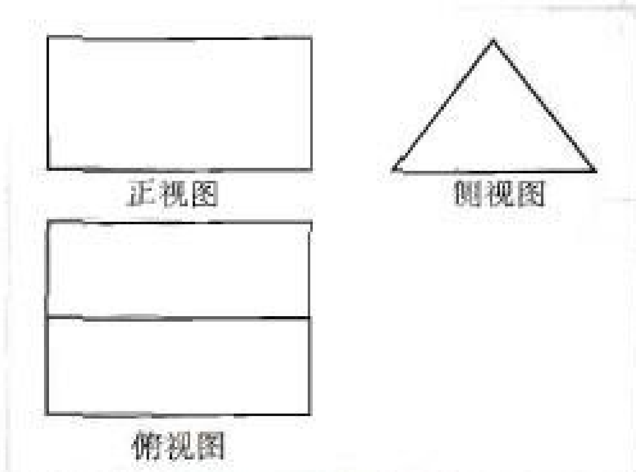
3．根据下列描述，说出几何体的结构特征，并画出它们的三视图：

（1）由六个面围成，其中一个面是正五边形，其余五个面是全等的等腰三角形的几何体；

（2）如图，由一个平面图形旋转一周形成的几何体．



（第 3(2) 题）



（第 4 题）

4．如图是一个几何体的三视图，想象它的几何结构特征，并说出它的名称．

1.2.3 空间几何体的直观图

对于几何体的直观图，我们并不陌生．图 1.1-2—图 1.1-10 都是相应几何体的直观图．它们是怎样画出来的呢？

在立体几何教学中，空间几何体的直观图通常是在平行投影下画出的空间图形．

要画空间几何体的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的画法．例如，在桌面上放置一个正六边形，我们从空间某一点看这个六边形时，它是什么样子？如何画出它的直观图？

下面我们以正六边形为例，说明水平放置的平面图形的直观图画法．对于平面多边形，我们常用斜二测画法画它们的直观图．斜二测画法是一种特殊的平行投影画法．

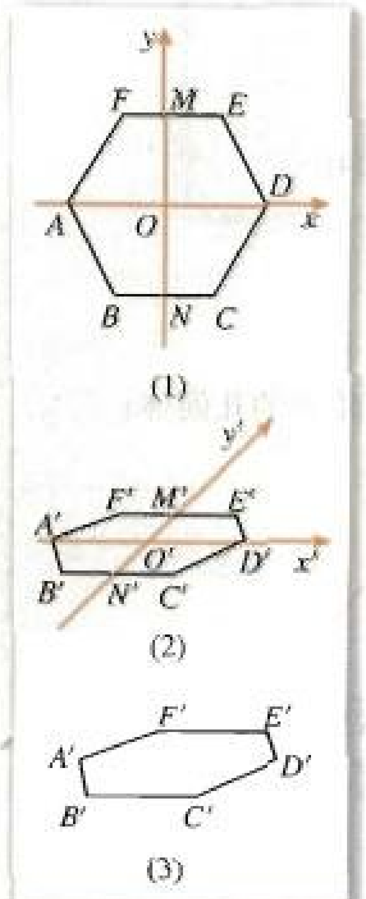


图 1.2-10

例 1 用斜二测画法画水平放置的正六边形的直观图．

画法：（1）如图 1.2-10（1），在正六边形 $ABCDEF$ 中，取 AD 所在直线为 x 轴，对称轴 MN 所在直线为 y 轴，两轴相交于点 O．在图 1.2-10（2）中，画相应的 x' 轴与 y' 轴，两轴相交于点 O'，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$．

（2）在图 1.2-10（2）中，以 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$，在 y' 轴上取 $M'N'=\frac{1}{2}MN$．以点 N' 为中点，画 $B'C'$ 平行于 x' 轴，并且等于 BC；再以 M' 为中点，画 $E'F'$ 平行于 x' 轴，并且等于 EF．

（3）连接 $A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$，并擦去辅助线 x' 轴和 y' 轴，便获得正六边形 $ABCDEF$ 水平放置的直观图 $A'B'C'D'E'F'$（图 1.2-10（3））．

上述画直观图的方法称为**斜二测画法**，它的步骤是：

（1）在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于点 O．画直观图时，把它们画成对应的 x' 轴与 y' 轴，两轴

交于点 O'，且使 $\angle x'O'y'=45°$（或 $135°$），它们确定的平面表示水平面.

（2）已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.

（3）已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

立体几何中，常用正等测画法画水平放置的圆.

生活经验告诉我们，水平放置的圆看起来非常像椭圆. 在实际画水平放置的圆的直观图时，我们常用如图 1.2-11 所示的椭圆模板.

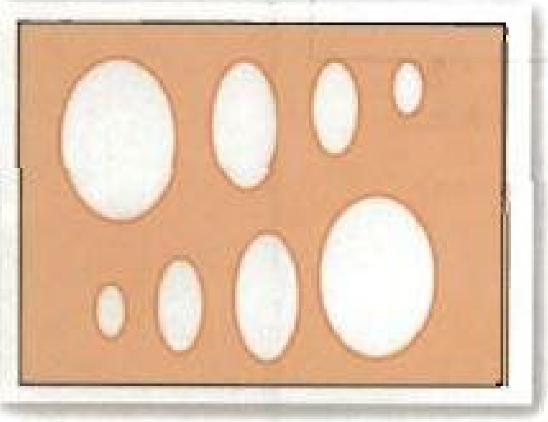


图 1.2-11

下面我们探求空间几何体的直观图的画法.

例 2 用斜二测画法画长、宽、高分别是 4 cm、3 cm、2 cm的长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的直观图.

画法：（1）画轴. 如图 1.2-12，画 x 轴、y 轴、z 轴，三轴相交于点 O，使 $\angle xOy=45°$，$\angle xOz=90°$.

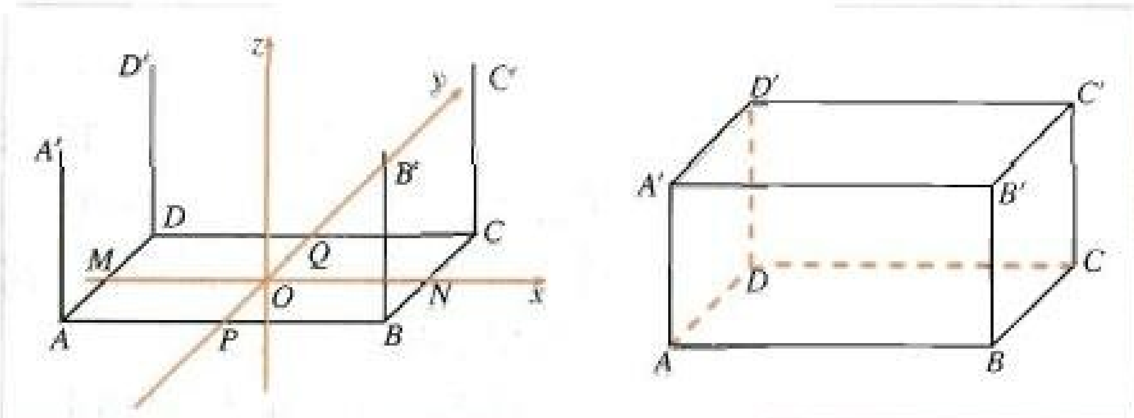


图 1.2-12

（2）画底面. 以点 O 为中点，在 x 轴上取线段 MN，使 $MN=4$ cm；在 y 轴上取线段 PQ，使 $PQ=\frac{3}{2}$ cm. 分别过点 M 和 N 作 y 轴的平行线，过点 P 和 Q 作 x 轴的平行线，设它们的交点分别为 A，B，C，D，四边形 $ABCD$ 就是长方体的底面 $ABCD$.

画几何体的直观图时，如果不作严格要求，图形尺寸可以适当选取. 用斜二测画法画图的角度也可以自定，但要求图形具有一定的立体感.

（3）画侧棱. 过 A，B，C，D 各点分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取 2 cm 长的线段 AA'，BB'，CC'，DD'.

（4）成图. 顺次连接 A'，B'，C'，D'，并加以整理（去掉辅助线，将被遮挡的部分改为虚线），就得到长方体的直

观图.

例 3 如图 1.2-13，已知几何体的三视图，用斜二测画法画出它的直观图.

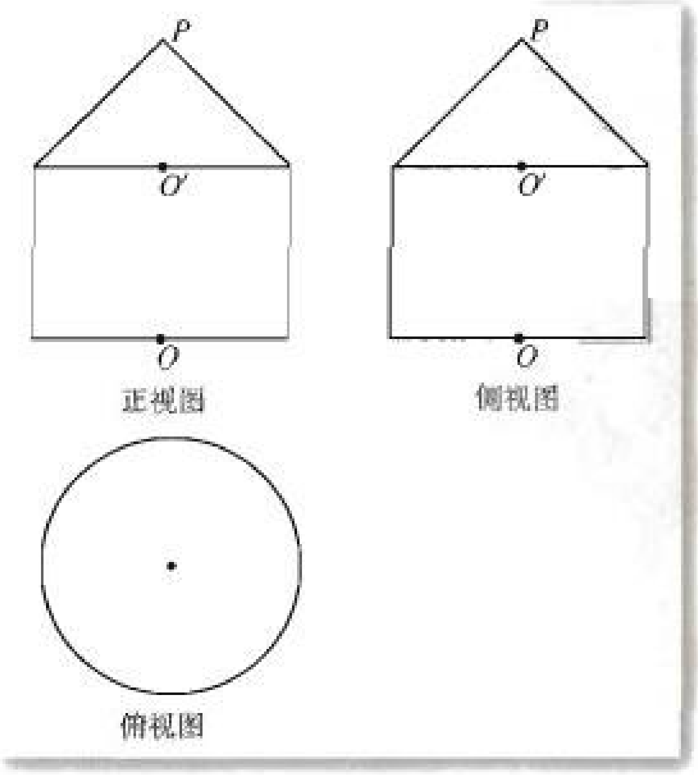


图 1.2-13

分析： 由几何体的三视图知道，这个几何体是一个简单组合体．它的下部是一个圆柱，上部是一个圆锥，并且圆锥的底面与圆柱的上底面重合．我们可以先画出下部的圆柱，再画出上部的圆锥.

画法： (1) 画轴．如图 1.2-14 (1)，画 x 轴、z 轴，使 $\angle xOz=90°$.

(2) 画圆柱的下底面．在 x 轴上取 A，B 两点，使 AB 的长度等于俯视图中圆的直径，且 $OA=OB$．选择椭圆模板中适当的椭圆过 A，B 两点，使它为圆柱的下底面.

(3) 在 Oz 上截取点 O'，使 OO' 等于正视图中 OO' 的长度，过点 O' 作平行于轴 Ox 的轴 $O'x'$，类似圆柱下底面的作法作出圆柱的上底面.

(4) 画圆锥的顶点．在 Oz 上截取点 P，使 PO' 等于正视图中相应的高度.

(5) 成图．连接 PA'，PB'，AA'，BB'，整理得到三视图表示的几何体的直观图（图 1.2-14(2)).

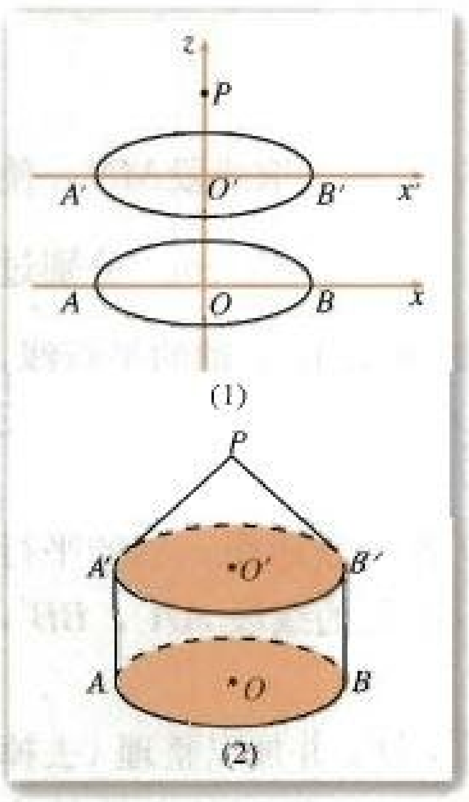


图 1.2-14

空间几何体的三视图与直观图有着密切的联系，我们能够由空间几何体的三视图得到它的直观图．同时，也能够由

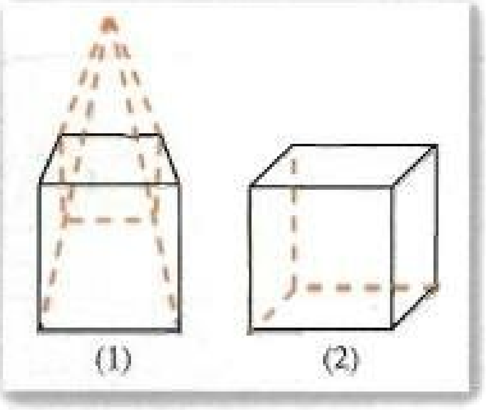


图 1.2-15

空间几何体的直观图得到它的三视图.

从投影的角度看，三视图和用斜二测画法画出的直观图都是在平行投影下画出来的空间图形. 在中心投影下，也可以画出空间图形. 图 1.2-15(1)是中心投影下正方体的直观图，它与平行投影下正方体的直观图（图 1.2-15(2)）有什么联系与区别呢?

空间几何体在平行投影与中心投影下有不同的表现形式，我们可以根据问题的实际情况，选择不同的表现方式.

探究

(1) 图 1.2-16 是一个奖杯的三视图，你能想象出它的几何结构特征，并画出它的直观图吗?

(2) 空间几何体的三视图和直观图能够帮助我们从不同侧面、不同角度认识几何体的结构，它们各有哪些特点? 二者有何关系?

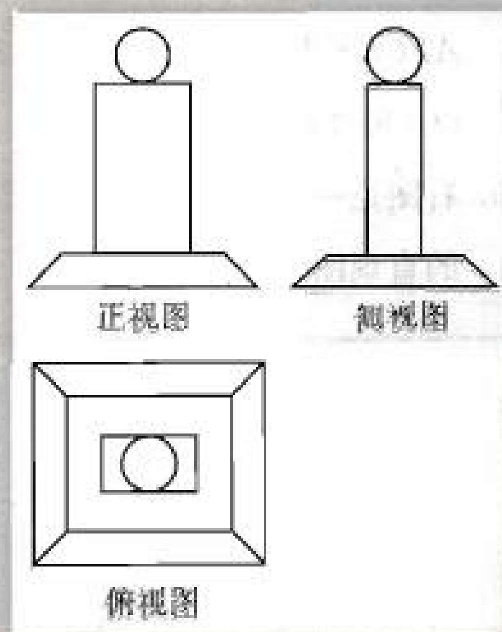


图 1.2-16

练　习

1. 用斜二测画法画出下列水平放置的平面图形的直观图（尺寸自定）：
   (1) 任意三角形；　(2) 平行四边形；
   (3) 正八边形.
2. 判断下列结论是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”.
   (1) 角的水平放置的直观图一定是角.　(　　)
   (2) 相等的角在直观图中仍然相等.　(　　)

(3) 相等的线段在直观图中仍然相等.　　(　　)

(4) 若两条线段平行，则在直观图中对应的两条线段仍然平行.　　(　　)

3. 利用斜二测画法得到的

① 三角形的直观图是三角形.

② 平行四边形的直观图是平行四边形.

③ 正方形的直观图是正方形.

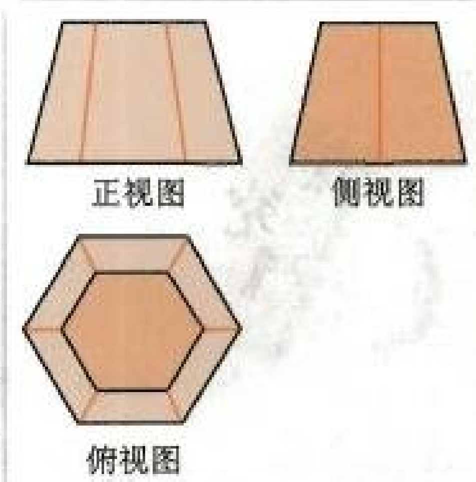
④ 菱形的直观图是菱形.

以上结论，正确的是（　　）

(A) ①②　　(B) ①　　(C) ③④　　(D) ①②③④

4. 用斜二测画法画出五棱锥 $P\text{-}ABCDE$ 的直观图，其中底面 $ABCDE$ 是正五边形，点 P 在底面的投影是正五边形的中心 O（尺寸自定）.

5. 右图是一个空间几何体的三视图，试用斜二测画法画出它的直观图.

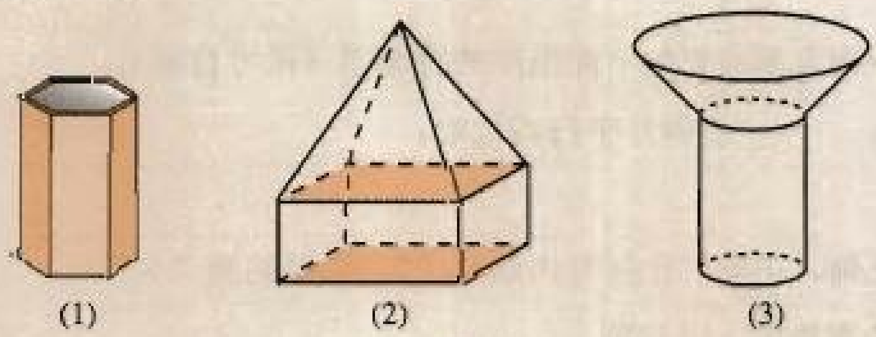


（第 5 题）

习题 1.2

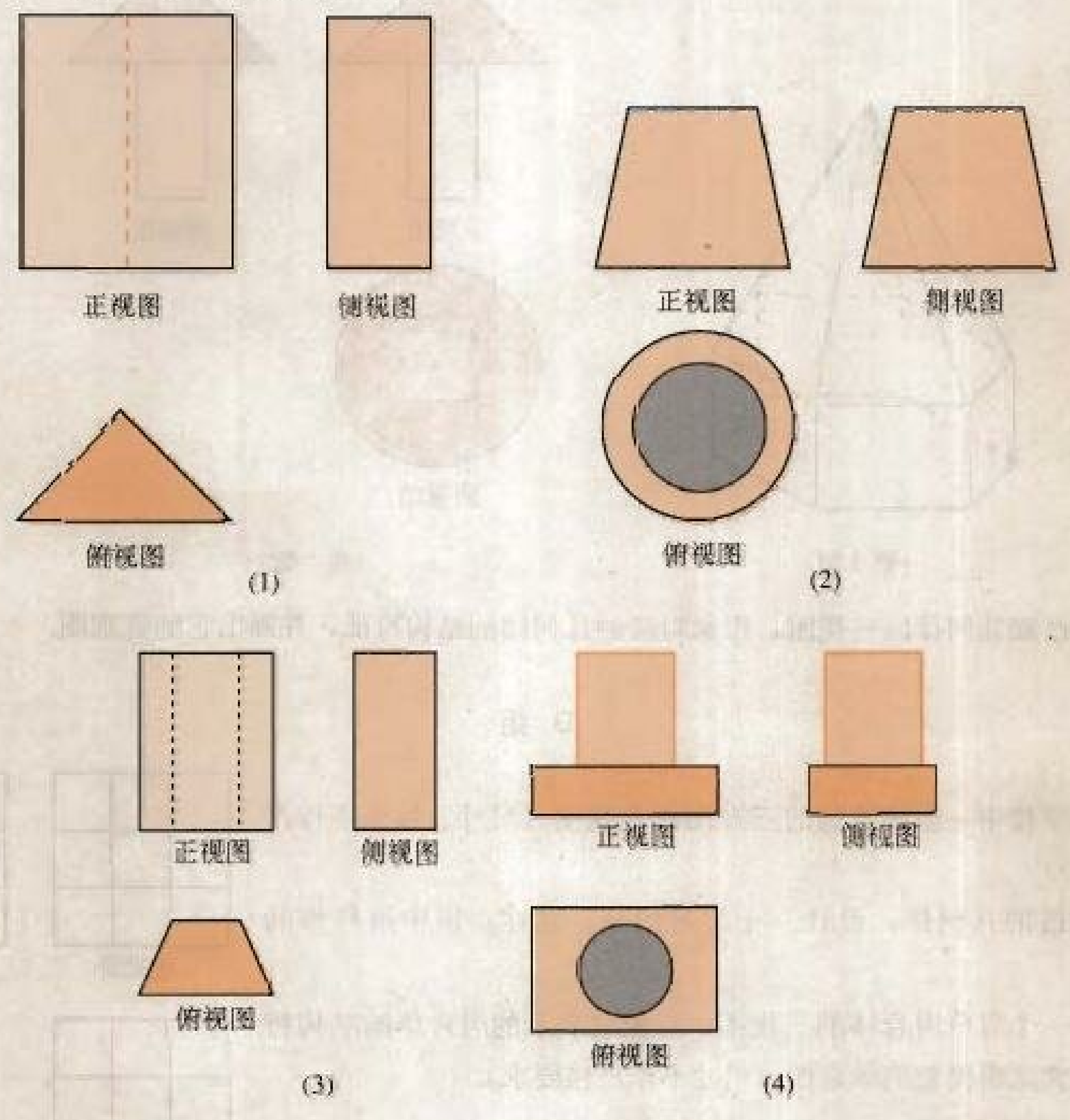
A 组

1. 画出下列物体表示的几何体的三视图（尺寸不作严格要求）：



（第 1 题）

2. 根据下列三视图，想象对应的几何体：

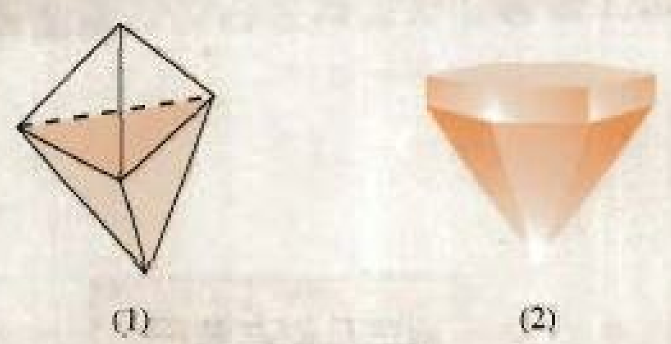


（第2题）

3. 根据第2题给出的三视图，利用硬纸制作相应的实物模型.

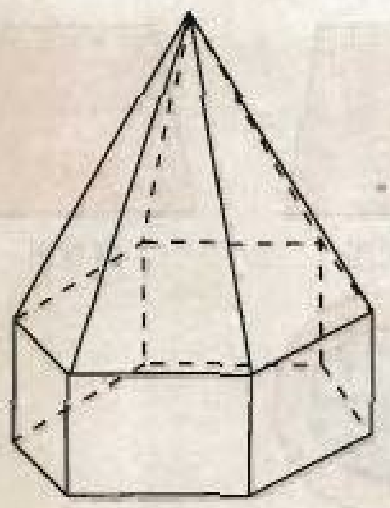
4. 用斜二测画法画出水平放置的一角为 60°，边长为 4 cm 的菱形的直观图.

5. 用斜二测画法画出下列几何体的直观图（尺寸不作严格要求）：

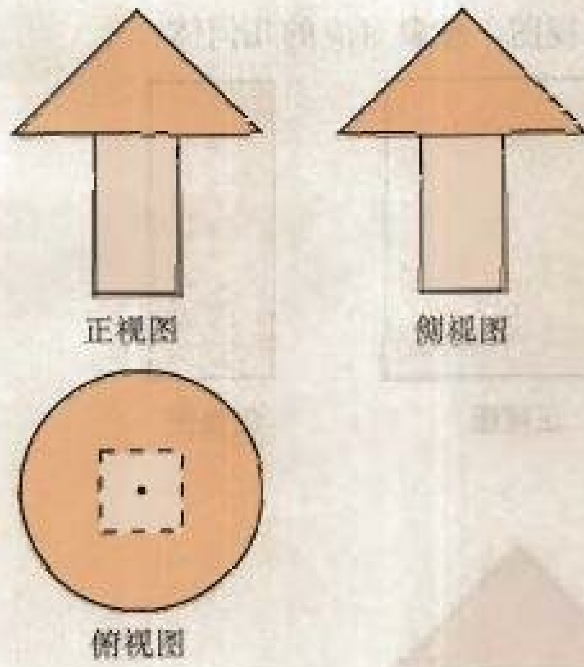


（第5题）

6. 如图是一个几何体的直观图，它的下部是一个底面为正六边形、侧面全为矩形的棱柱，上部是一个侧面全为等腰三角形的棱锥，画出它的三视图（尺寸不作严格要求）.



（第 6 题）

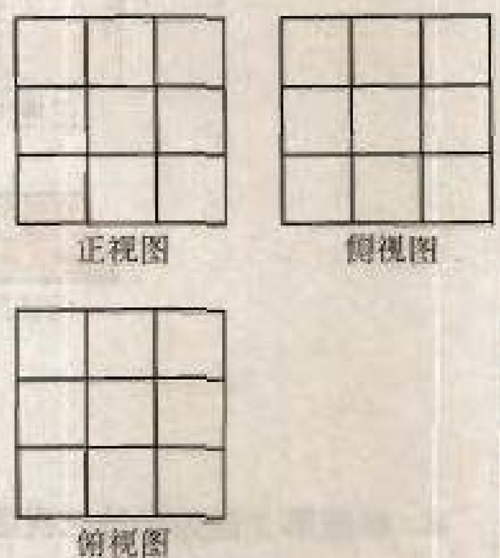


（第 7 题）

7. 如图，已知几何体的三视图，想象对应的几何体的结构特征，并画出它的直观图.

B 组

1. 画出你学校中一座建筑物的三视图和直观图（尺寸、线条不作严格要求）.
2. 用学习过的几何体，设计一个学习用品，并在小组中解释你的设计.
3. 如图是一个简单组合体的三视图，想象它表示的组合体的结构特征，并尝试画出它的示意图（尺寸不作严格要求）.



（第 3 题）

画法几何与蒙日

画法几何就是在平面上绘制空间图形，并在平面图上表达出空间原物体各部分的大小、位置以及相互关系的一门学科．它在绘画、建筑等方面有着广泛的应用．

画法几何起源于欧洲文艺复兴时期的绘画和建筑技术．意大利艺术家达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452—1519）在他的绘画作品中已经广泛地运用了透视理论，主要是中心投影．法国数学家笛沙格（Desarque，1593—1662）在他的“透视法”中给出了空间几何体透视像的画法，以及如何从平面图中正确地计算出几何体的尺寸大小的方法，主要是运用正投影。以后又经过法国数学家蒙日（Monge，1745—1818）的深入研究，并在1799年出版了《画法几何学》一书．在该书中，蒙日第一次详细阐述了怎样把空间（三维）物体投影到两个互相垂直的平面上，并根据投影原理（这种原理后来发展成射影几何学）推断出该空间物体的几何性质．蒙日的《画法几何学》一书不论是在概念上，还是在方法上都有深远的影响．这种方法对于建筑学、军事学、机械制图等方面都有极大的实用价值，从此画法几何就成为一门独立的几何分支学科．蒙日成为画法几何的创始人．

蒙日生长在法国大革命时代，曾任海军部长，并创立了巴黎多科工艺学校．他出生在迪隆附近的一个小商人家庭，16岁就在里昂学院任讲师，他熟练地以比例尺绘出他家乡的地图，因而被梅育爱尔军事学院聘为绘图员．1768年，蒙日在梅育爱尔担任数学教授，那时他只有23岁．1780年，他被选为巴黎科学院院士，迁居巴黎后曾在海军学校教书．为了从数据中算出要塞中炮兵阵地的位置，蒙日用几何方法避开了麻烦的计算，他用二维平面上的适当投影来表达三维物体的聪明方法，在实际中有着广泛的应用，并导致画法几何的产生．法国大革命前后，由于军事建筑上的迫切需要，蒙日的画法几何方法被列为军事秘密，所以很久未能公诸于世，直到当时的军事约束解除后，蒙日才公布了他的研究成果，这已是他建立画法几何之后30年的事了．

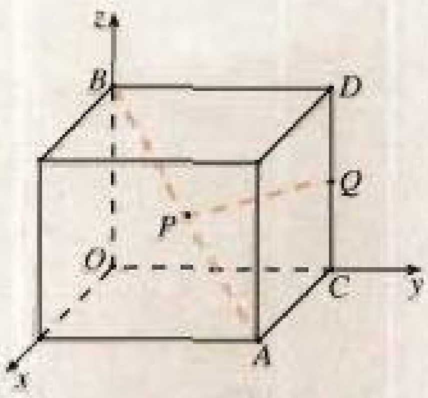
3. 如图，以正方体的三条棱所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 点 P 在正方体的对角线 AB 上，点 Q 在正方体的棱 CD 上.

(1) 当点 P 为对角线 AB 的中点，点 Q 在棱 CD 上运动时，探究 $|PQ|$ 的最小值；

(2) 当点 Q 为棱 CD 的中点，点 P 在对角线 AB 上运动时，探究 $|PQ|$ 的最小值；

(3) 当点 P 在对角线 AB 上运动，点 Q 在棱 CD 上运动时，探究 $|PQ|$ 的最小值.

由以上问题，你得到了什么结论？你能证明你的结论吗？



（第 3 题）

用《几何画板》探究点的轨迹：圆

《几何画板》是一个适用于几何（包括平面几何、立体几何、解析几何等）教学的软件平台．它为老师和学生提供了一个观察和探索几何图形内在关系的环境．它以点、线、圆为基本元素，通过对这些基本元素的变换、构造、测算、计算、动画、轨迹跟踪等，构造出其他较为复杂的图形.

图 1

《几何画板》最大的特色是“动态性”，即可以用鼠标拖动图形上的任一元素（点、线、圆），而事先给定的所有几何关系（即图形的基本性质）保持不变．同时，利用它的动态性和形象性，可以创造一个实际“操作”几何图形的环境．学生可以任意拖动图形、观察图形、发现结论、猜测并验证，在观察、探索、发现的过程中增加对各种图形的感性认识，形成丰厚的几何经验背景，从而更有助于学生理解和证明.

《几何画板》的操作非常简单，一切操作都只靠工具栏和菜单实现（图 1），而无需编制任何程序．在《几何画板》中，一切都要借助于几何关系来表现，用它设计课件最关键

的是把握“几何关系”（即图形的基本性质）.

下面通过一个例子，具体说明利用《几何画板》探究点的轨迹的形状、范围，然后分析轨迹形成的原因，用方程描述形成的轨迹.

例　已知点 $P(2,\ 0)$，$Q(8,\ 0)$，点 M 与点 P 的距离是它与点 Q 的距离的 $\frac{1}{5}$，用《几何画板》探究点 M 的轨迹，并给出轨迹的方程.

如图 2，根据题意，在《几何画板》中作出点 $P(2,\ 0)$，$Q(8,\ 0)$，以及点 M，测量点 M 与点 P 的距离以及点 M 与点 Q 的距离，使 $\frac{|MQ|}{|MP|}=5$. 当点 M 移动时，$\frac{|MQ|}{|MP|}=5$ 保持不变，点 M 运动形成轨迹，猜想点 M 的轨迹是圆，进而用“坐标法”证明猜想成立.

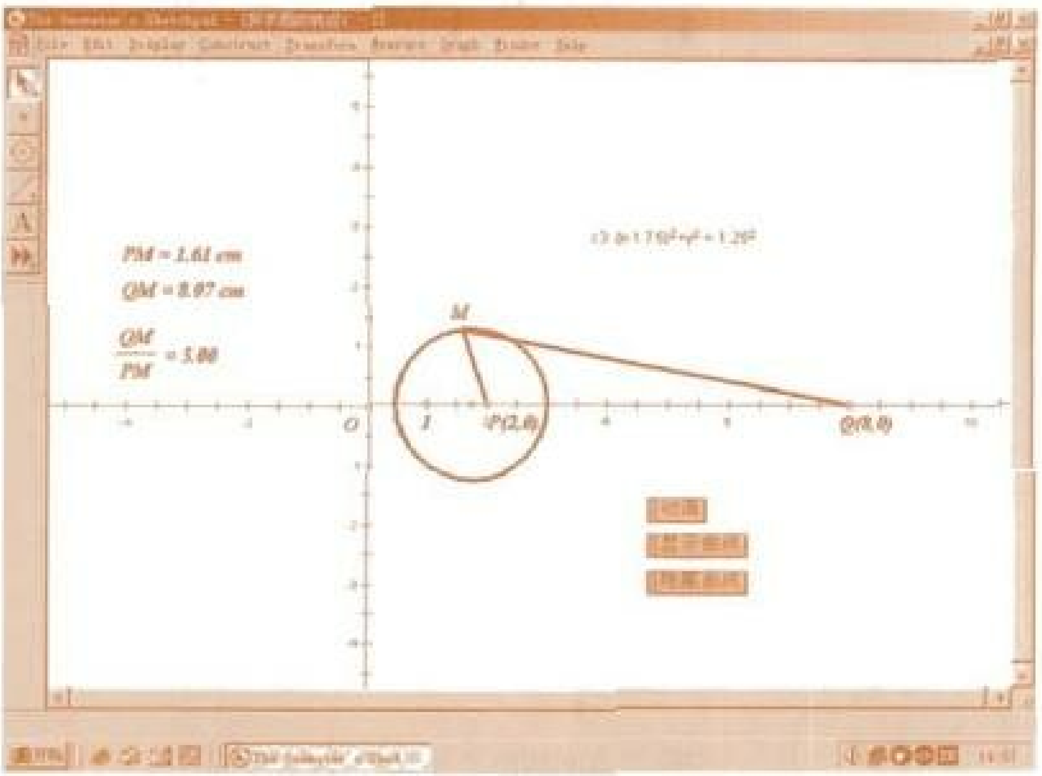


图 2

解：设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$|MP|^2=(x-2)^2+y^2,\quad |MQ|^2=(x-8)^2+y^2,$$

$$\frac{|MQ|^2}{|MP|^2}=\frac{(x-8)^2+y^2}{(x-2)^2+y^2}=25,$$

化简，得

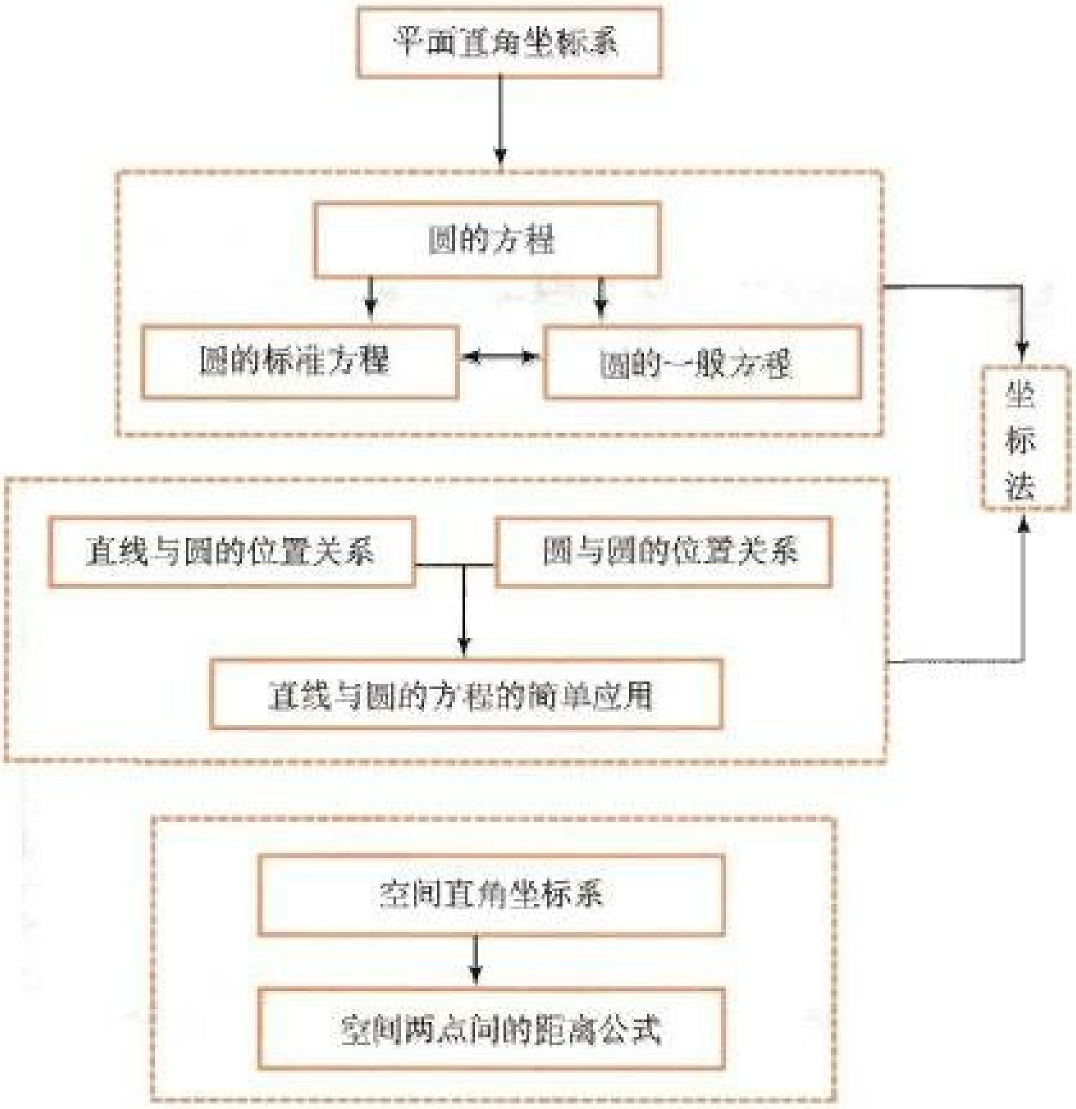
$$(x-1.75)^2+y^2=1.25^2.$$

所以，点 M 的轨迹是以 $(1.75,\ 0)$ 为圆心，1.25 为半径长的圆.

类似地，用《几何画板》可以探究许多轨迹方面的问题.《几何画板》为我们提供了一个实验、发现、猜想的环境，这种环境可以启发我们用数学思想方法验证我们的猜想.

小 结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

1. 圆的方程有哪几种形式？你能说出它们各自的特点吗？

2. 通过方程，研究直线与圆、圆与圆的位置关系是本章的主要内容之一．判断直线与圆、圆与圆的位置关系可以从两个方面入手：

(1) 直线与圆、圆与圆有无公共点，等价于由它们的方程组成的方程组有无实数解．方程组有几组实数解，直线与圆、圆与圆就有几个公共点；方程组没有实数解，直线与圆、圆与圆就没有公共点．

(2) 通过方程，把直线、圆的关系转化为相应的代数问题．

3. 坐标方法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

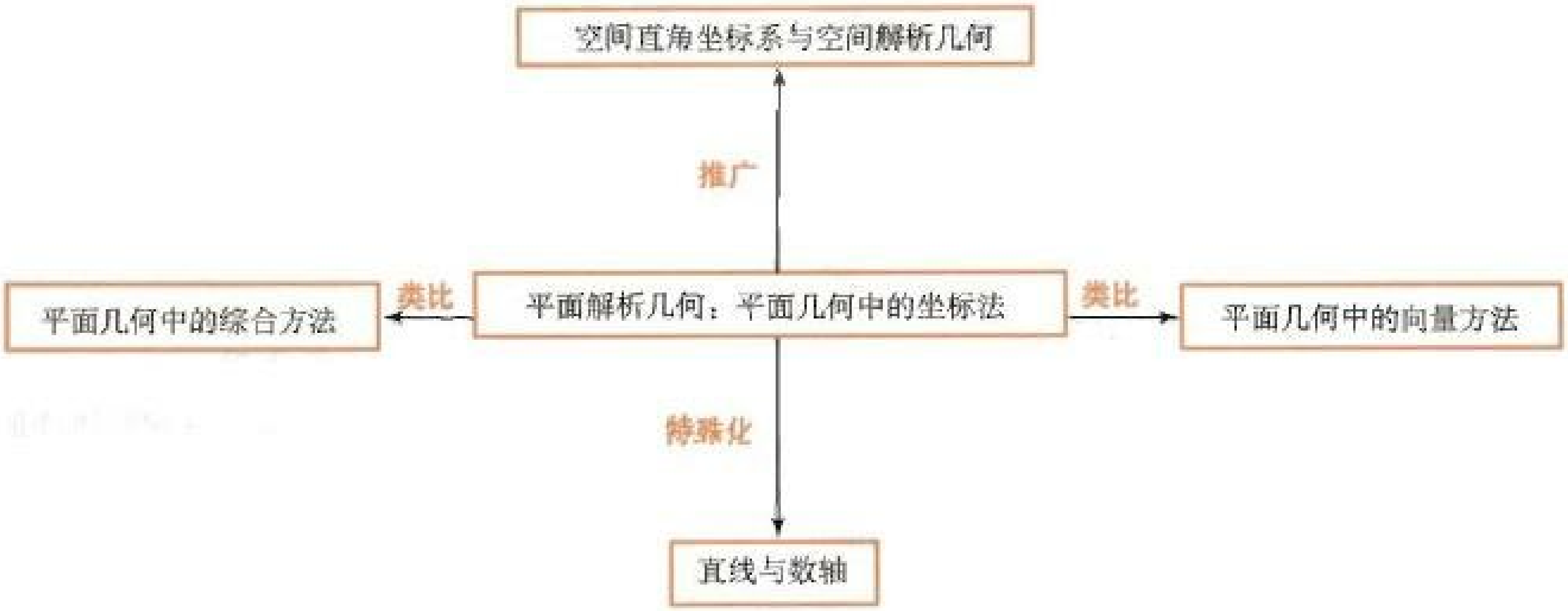
第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果“翻译”成几何关系.

4. 怎样在平面直角坐标系的基础上建立空间直角坐标系？对比平面直角坐标系与空间直角坐标系中两点间距离公式的异同点.

5. 重视信息技术工具在研究几何图形及其位置关系中的作用. 一方面，借助信息技术，通过观察、操作、实验，发现数学规律，形成猜想，并对猜想进行证明；另一方面，用代数方法研究方程，了解曲线的性质，利用信息技术工具验证，加深对问题的理解.

6. 平面解析几何的基本思想方法是利用平面直角坐标系，把点用坐标表示，直线、圆等用方程表示，并用代数方法研究几何问题，这就是人们常说的“坐标法”. 这种方法与平面几何中的综合法、向量方法都可以建立联系，另外还可以推广到空间去解决立体几何问题. 这种联系可用下面的框图表示.



复习参考题

A 组

1. 求下列各圆的方程：

(1) 圆心为点 $M(-5, 3)$，且过点 $A(-8, -1)$；

(2) 过三点 $A(-2, 4)$，$B(-1, 3)$，$C(2, 6)$.

2. 求圆心在直线 $3x+y-5=0$ 上，并且经过原点和点 $(3, -1)$ 的圆的方程.

3. 判定圆 $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 与圆 $x^2+y^2-14x-2y+14=0$ 是否相切.

4. 求圆 $x^2+y^2-10x-10y=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+2y-40=0$ 的公共弦长.

5. 求圆心在直线 $3x+2y=0$ 上，并且与 x 轴的交点分别为 $(-2, 0)$，$(6, 0)$ 的圆的方程.

6. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 和圆 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 关于直线 l 对称，求直线 l 的方程.

7. 求与圆 C：$(x+2)^2+(y-6)^2=1$ 关于直线 $3x-4y+5=0$ 对称的圆的方程.

8. m 为何值时，方程 $x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$ 表示圆，并求出半径最大时圆的方程.

B 组

1. 求圆心在直线 $y=-2x$ 上，并且经过点 $A(2, -1)$，与直线 $x+y=1$ 相切的圆的方程.

2. 已知点 $M(x, y)$ 与两个定点 M_1，M_2 距离的比是一个正数 m，求点 M 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形（考虑 $m=1$ 和 $m\neq1$ 两种情形）.

3. 求由曲线 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 围成的图形的面积.

4. 已知直线 l：$x-2y-5=0$ 与圆 C：$x^2+y^2=50$. 求：

(1) 交点 A，B 的坐标；(2) $\triangle AOB$ 的面积.

5. 一条光线从点 $A(-2, 3)$ 射出，经 x 轴反射后，与圆 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，求反射后光线所在直线的方程.

6. 已知圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线 l：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$.

(1) 求证：直线 l 恒过定点.

(2) 判断直线 l 被圆 C 截得的弦何时最长、何时最短？并求截得的弦长最短时 m 的值以及最短长度.

1.3 空间几何体的表面积与体积

前面，我们分别从几何结构特征和视图两个方面认识了空间几何体．下面我们来学习空间几何体的表面积和体积．表面积是几何体表面的面积，它表示几何体表面的大小，体积是几何体所占空间的大小．

1.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积

1．柱体、锥体、台体的表面积

思考

在初中，我们已经学习了正方体和长方体的表面积，以及它们的展开图（图1.3-1），你知道上述几何体的展开图与其表面积的关系吗？

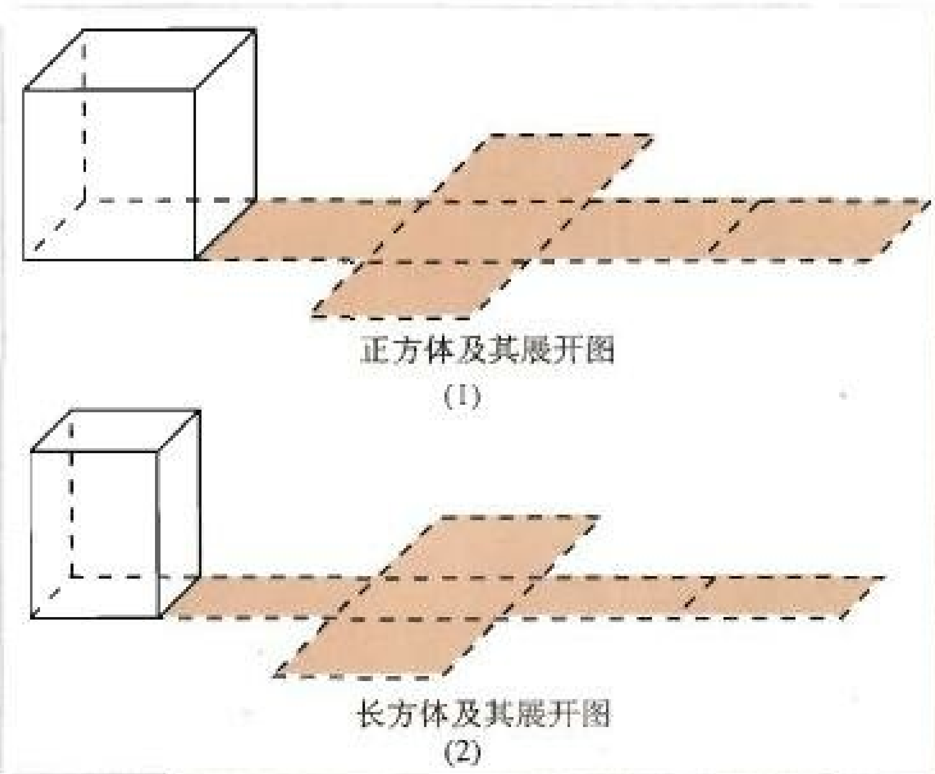


图 1.3-1

正方体、长方体是由多个平面图形围成的多面体，它们的表面积就是各个面的面积的和，也就是展开图的面积.

一般地，我们可以把多面体展成平面图形，利用平面图形求面积的方法，求多面体的表面积.

探究

棱柱、棱锥、棱台也是由多个平面图形围成的多面体，它们的展开图是什么？如何计算它们的表面积？

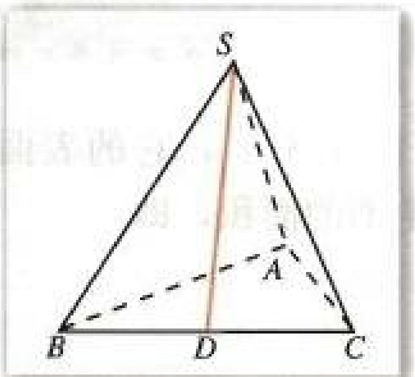


图 1.3-2

例 1 已知棱长为 a，各面均为等边三角形的四面体 $S\text{-}ABC$（图 1.3-2），求它的表面积.

分析： 由于四面体 $S\text{-}ABC$ 的四个面是全等的等边三角形，所以四面体的表面积等于其中任何一个面面积的 4 倍.

解： 先求 $\triangle SBC$ 的面积，过点 S 作 $SD\perp BC$，交 BC 于点 D.

因为 $BC=a$，

$$SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

所以 $$S_{\triangle SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SD=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

因此，四面体 $S\text{-}ABC$ 的表面积

$$S=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}a^2.$$

思考？

如何根据圆柱、圆锥的几何结构特征，求它们的表面积？

我们知道，圆柱的侧面展开图是一个矩形（图1.3-3）.如果圆柱的底面半径为 r，母线长为 l，那么圆柱的底面面积为 πr^2，侧面面积为 $2\pi rl$. 因此，圆柱的表面积

$$S=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l).$$

将空间图形问题转化为平面图形问题，是解决立体几何问题基本的、常用的方法.

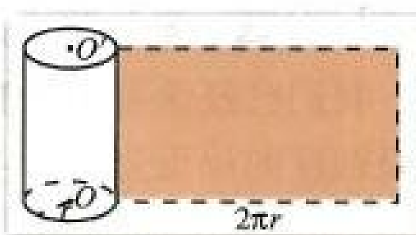


图 1.3-3

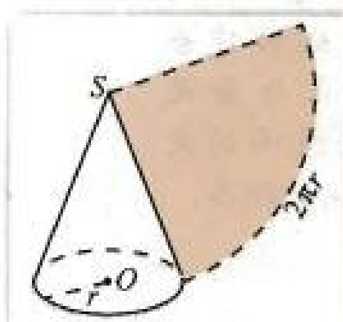


图 1.3-4

圆锥的侧面展开图是一个扇形（图 1.3-4）. 如果圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，那么它的表面积

$$S=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l).$$

探究

（1）联系圆柱和圆锥的展开图，你能想象圆台展开图的形状，并且画出它吗?

（2）如果圆台的上、下底面半径分别为 r'，r，母线长为 l，你能计算出它的表面积吗?

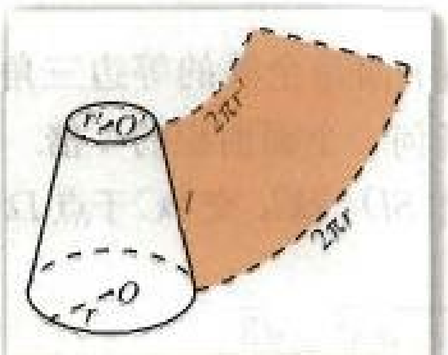


图 1.3-5

圆台的侧面展开图是一个扇环（图 1.3-5），它的表面积等于上、下两个底面的面积和加上侧面的面积，即

$$S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl).$$

例 2 如图 1.3-6，一个圆台形花盆盆口直径为 20 cm，盆底直径为15 cm，底部渗水圆孔直径为 1.5 cm，盆壁长 15 cm. 为了美化花盆的外观，需要涂油漆. 已知每平方米用 100 毫升油漆，涂 100 个这样的花盆需要多少油漆（π 取 3.14，结果精确到 1 毫升，可用计算器）?

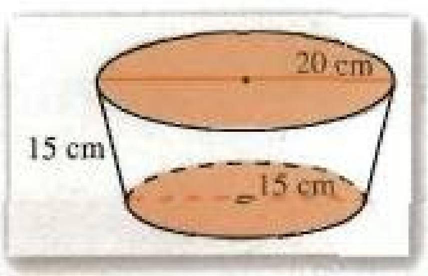


图 1.3-6

分析： 只要求出每一个花盆外壁的表面积，就可求出油漆的用量. 而花盆外壁的表面积等于花盆的侧面面积加上底面面积，再减去底面圆孔的面积.

解： 如图 1.3-6，由圆台的表面积公式得一个花盆外壁的表面积

$$S=\pi\times\left[\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\times 15+\frac{20}{2}\times 15\right]-\pi\times\left(\frac{1.5}{2}\right)^2$$

$$\approx 1000(\mathrm{cm}^2)=0.1(\mathrm{m}^2).$$

涂 100 个花盆需油漆：$0.1\times 100\times 100=1000$(毫升).

答：涂 100 个这样的花盆约需要 1000 毫升油漆.

棱柱（圆柱）的高是指两底面之间的距离，即从一底面上任意一点向另一个底面作垂线，这点与垂足（垂线与底面的交点）之间的距离.

2. 柱体、锥体与台体的体积

我们已经学习了计算特殊的棱柱——正方体、长方体，以及圆柱的体积公式. 它们的体积公式可以统一为

$$V=Sh\ (S\ 为底面面积，h\ 为高).$$

一般柱体的体积也是

$$V=Sh,$$

其中 S 为底面面积，h 为棱柱的高.

圆锥的体积公式是

$$V=\frac{1}{3}Sh\ (S\text{ 为底面面积，}h\text{ 为高}),$$

它是同底等高的圆柱的体积的$\frac{1}{3}$.

棱锥（圆锥）的高是指从顶点向底面作垂线，顶点与垂足（垂线与底面的交点）之间的距离.

棱锥的体积也是同底等高的棱柱体积的$\frac{1}{3}$，即棱锥的体积

$$V=\frac{1}{3}Sh\ (S\text{ 为底面面积，}h\text{ 为高}).$$

由此可见，棱柱与圆柱的体积公式类似，都是底面面积乘高；棱锥与圆锥的体积公式类似，都是底面面积乘高的$\frac{1}{3}$.

此公式可以证明．圆台（棱台）的高是指两个底面之间的距离.

由于圆台（棱台）是由圆锥（棱锥）截成的，因此可以利用两个锥体的体积差，得到圆台（棱台）的体积公式

$$V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h,$$

其中 S'，S 分别为上、下底面面积，h 为圆台（棱台）高.

思考

比较柱体、锥体、台体的体积公式：

$V_{柱体}=Sh$（S 为底面积，h 为柱体高）；

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为锥体高）；

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$（$S'$，$S$ 分别为上、下底面面积，h 为台体高）.

你能发现三者之间的关系吗？柱体、锥体是否可以看作“特殊”的台体？其体积公式是否可以看作台体体积公式的“特殊”形式？

例 3　有一堆规格相同的铁制（铁的密度是 7.8 g/cm³）六角螺帽（图 1.3-7）共重5.8 kg，已知底面是正六边形，边长为 12 mm，内孔直径为 10 mm，高为 10 mm，问这堆螺帽

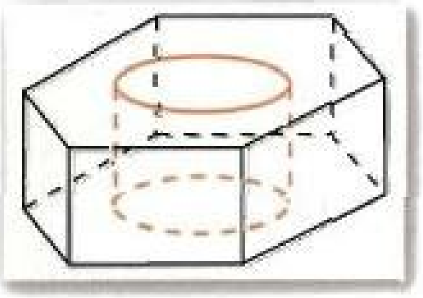


图 1.3-7

大约有多少个（π 取 3.14，可用计算器）？

分析：六角螺帽表示的几何体是一个组合体，在一个六棱柱中间挖去一个圆柱，因此它的体积等于六棱柱的体积减去圆柱的体积.

解：六角螺帽的体积是六棱柱体积与圆柱体积的差，即

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\times 6\times 10-3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times 10$$
$$\approx 2\ 956(\text{mm}^3)$$
$$=2.956(\text{cm}^3).$$

所以螺帽的个数为

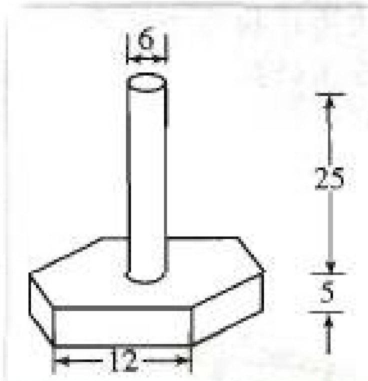
$$5.8\times 1000\div(7.8\times 2.956)\approx 252(\text{个}).$$

答：这堆螺帽大约有 252 个.

求组合体的表面积和体积时，要注意组合体的结构特征，避免重叠和交叉等.

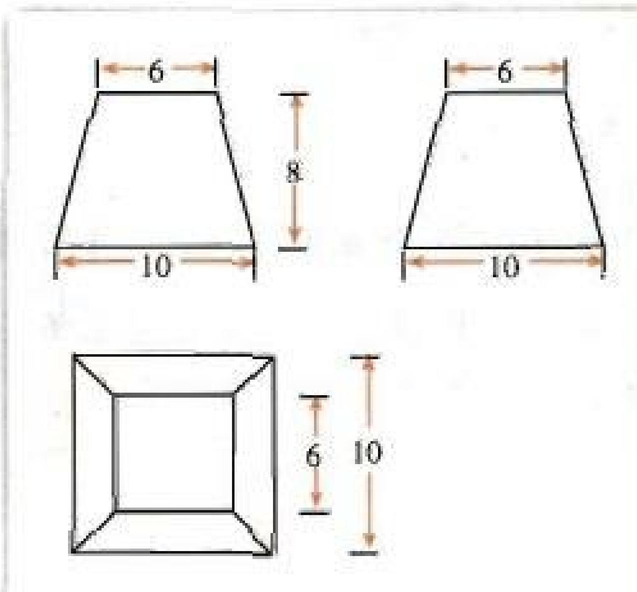
练习

1. 已知圆锥的表面积为 a m²，且它的侧面展开图是一个半圆，求这个圆锥的底面直径.
2. 右图是一种机器零件，零件下面是六棱柱（底面是正六边形，侧面是全等的矩形）形，上面是圆柱（尺寸如图，单位：mm）形. 电镀这种零件需要用锌，已知每平方米用锌 0.11 kg，问电镀10 000个零件需锌多少千克（结果精确到 0.01 kg）？



（第 2 题）

3. 下图是一个几何体的三视图（单位：cm），画出它的直观图，并求出它的表面积和体积.



（第 3 题）

1.3.2 球的体积和表面积

1. 球的体积

设球的半径为 R，它的体积只与半径 R 有关，是以 R 为自变量的函数.

事实上，如果球的半径为 R，那么它的体积

这个公式以后可以证明.

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2. 球的表面积

设球的半径为 R，它的表面积由半径 R 惟一确定，即它的表面积 S 也是以 R 为自变量的函数.

事实上，如果球的半径为 R，那么它的表面积

这个公式以后可以证明.

$$S=4\pi R^2.$$

例 4 如图 1.3-8，圆柱的底面直径与高都等于球的直径. 求证：

(1) 球的体积等于圆柱体积的 $\frac{2}{3}$；

(2) 球的表面积等于圆柱的侧面积.

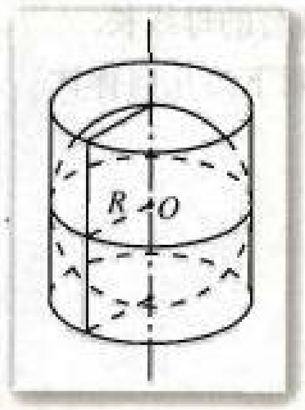


图 1.3-8

证明：(1) 设球的半径为 R，则圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$.

因为 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，

$V_{圆柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$，

所以，$V_{球}=\frac{2}{3}V_{圆柱}$.

(2) 因为 $S_{球}=4\pi R^2$，

$S_{圆柱侧}=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2$，

所以，$S_{球}=S_{圆柱侧}$.

本节我们学习了柱体、锥体、台体、球体的表面积与体积的计算方法. 在生产、生活中我们遇到的物体，虽然形状往往比较复杂，但是很多物体的形状都可以看作是由这些简单的几何体组合而成，它们的表面积与体积可以转化为这些简单几何体的表面积与体积的和.

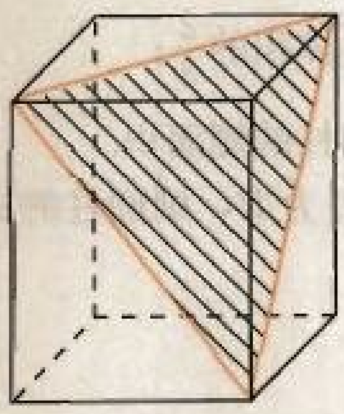
练 习

1. 将一个气球的半径扩大 1 倍，它的体积扩大到原来的几倍？
2. 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 a cm，求球的体积.
3. 一个球的体积是 100 cm^3，试计算它的表面积（π 取 3.14，结果精确到 1 cm^2，可用计算器）.

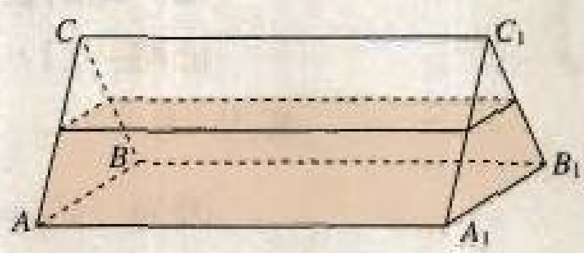
习题1.3

A 组

1. 五棱台的上、下底面均是正五边形，边长分别是 8 cm 和 18 cm，侧面是全等的等腰梯形，侧棱长是 13 cm，求它的侧面面积.
2. 已知圆台的上、下底面半径分别是 r，R，且侧面面积等于两底面积之和，求圆台的母线长.
3. 如图，将一个长方体沿相邻三个面的对角线截出一个棱锥，求棱锥的体积与剩下的几何体体积的比.

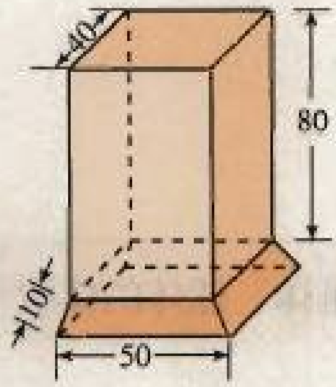


（第 3 题）

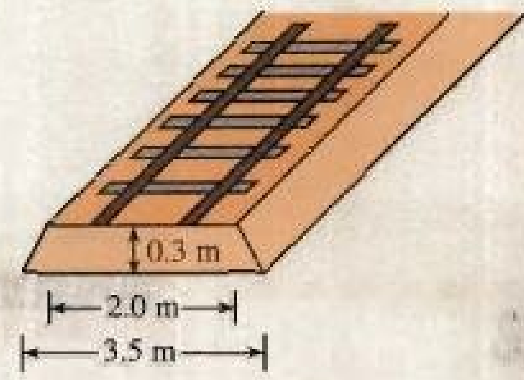


（第 4 题）

4. 如图，一个三棱柱形容器中盛有水，且侧棱 $AA_1=8$. 若侧面 AA_1B_1B 水平放置时，液面恰好过 AC，BC，A_1C_1，B_1C_1 的中点. 当底面 ABC 水平放置时，液面高为多少？
5. 如图是一个烟筒的直观图（图中单位：cm），它的下部是一个四棱台（上、下底面均是正方形，侧面是全等的等腰梯形）形物体；上部是一个四棱柱（底面与四棱台的上底面重合，侧面是全等的矩形）形物体. 为防止雨水的侵蚀，增加美观，需要粘贴瓷砖，需要瓷砖多少平方厘米（结果精确到 1 cm^2，可用计算器）？



（第 5 题）

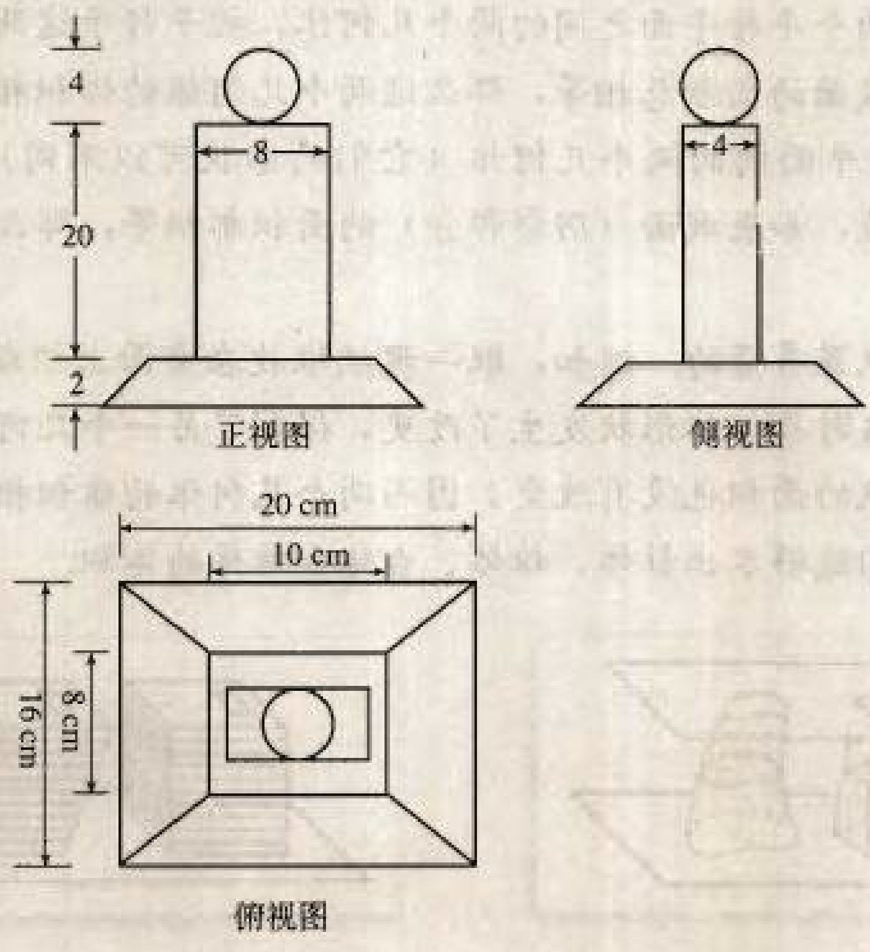


（第 6 题）

6. 我国铁路路基是用碎石铺设的（如图），请你查询北京到上海的铁路长度，并估计所用碎石方数（结果精确到 1 m^3，可用计算器）.

B 组

1. 如图是一个奖杯的三视图，试根据奖杯的三视图计算它的表面积和体积（尺寸如图，单位：cm，π 取 3.14，结果精确到 1 cm^3，可用计算器）.



（第 1 题）

2. 已知三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的侧面均是矩形，求证：它的任意两个侧面的面积和大于第三个侧面的面积.

3. 分别以一个直角三角形的斜边、两直角边所在直线为轴，其余各边旋转一周形成的曲面围成三个几何体，画出它们的三视图和直观图，并探讨它们体积之间的关系.

祖暅原理与柱体、锥体、球体的体积

一、祖暅原理

为了求一般柱体、锥体的体积，我们简要介绍一下祖暅（gèng）原理.

祖暅，字景烁，祖冲之之子，范阳郡蓟县（今河北省涞源县）人，南北朝时代的伟大科学家. 祖暅在数学上有突出贡献，他在实践的基础上，于5世纪末提出下面的体积计算原理：祖暅原理："幂势既同，则积不容异". "势"即是高，"幂"是面积. 意思是，如果两等高的几何体在同高处截得两几何体的截面积恒等，那么这两个几何体的体积相等.

祖暅原理：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.

如图1，夹在平行平面间的两个几何体（它们的形状可以不同），被平行于这两个平面的任何一个平面所截，如果截面（阴影部分）的面积都相等，那么这两个几何体的体积一定相等.

这个原理是非常浅显易懂的. 例如，取一摞纸堆放在桌面上组成一个几何体（图2），将它改变一下形状，这时几何体形状发生了改变，得到了另一个几何体，但两个几何体的高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而两个几何体的体积相等。利用这个原理和长方体体积公式，我们能够求出柱体、锥体、台体和球体的体积.

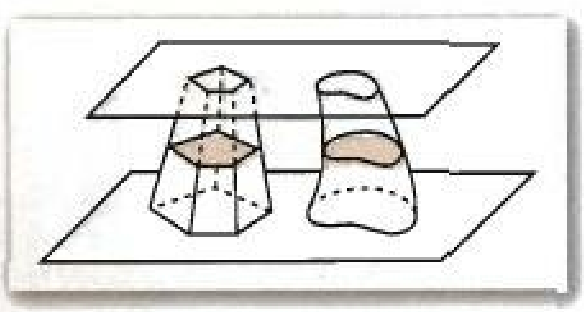


图1

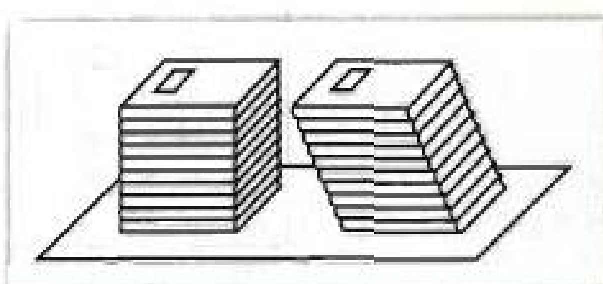


图2

祖暅提出上面的原理，要比其他国家的数学家早一千多年. 在欧洲直到17世纪，才有意大利数学家卡瓦列里（Cavalieri. B，1598—1647）提出上述结论.

二、柱体和锥体的体积

下面我们用祖暅原理推导柱体和锥体的体积公式.

设有底面积都等于 S，高都等于 h 的任意一个棱柱、一个圆柱和一个长方体，使它们的下底面在同一平面内（图3）. 根据祖暅原理，可知它们的体积相等. 由于长方体的体

积等于它的底面积乘以高，于是我们得到柱体的体积公式

$$V_{柱体}=Sh.$$

其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

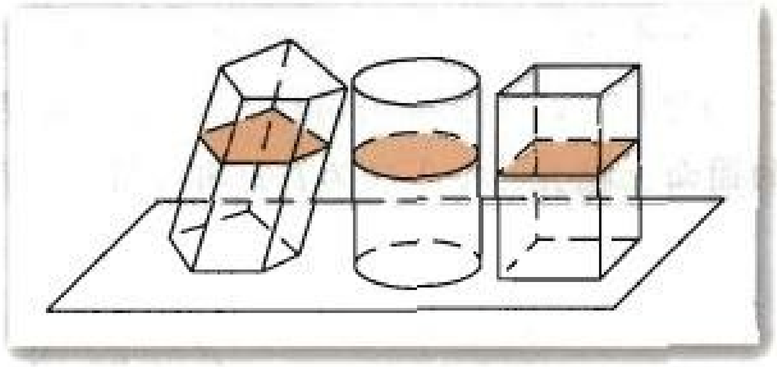


图 3

设有底面积都等于 S，高都等于 h 的两个锥体（例如一个棱锥和一个圆锥），使它们的底面在同一平面内（图 4）. 根据祖暅原理，可推导出它们的体积相等. 这就是说，等底面积等高的两个锥体的体积相等.

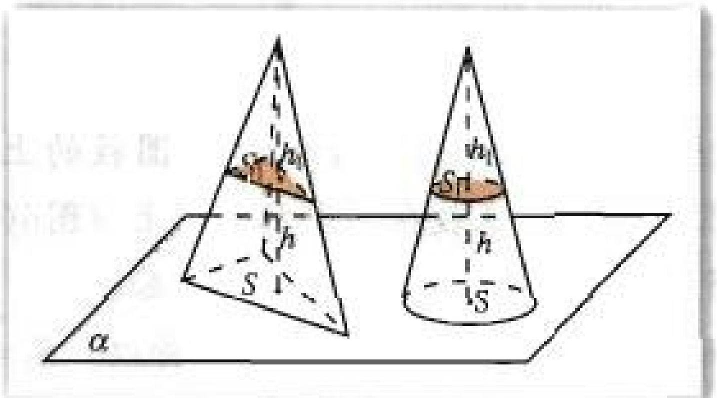


图 4

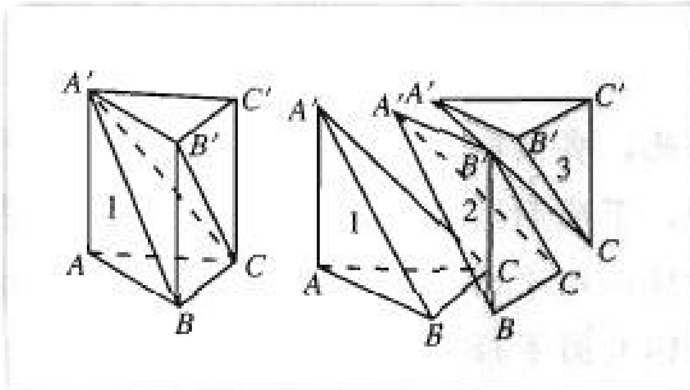


图 5

如图 5，设三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的底面积（即$\triangle ABC$ 的面积）为 S，高（即点 A' 到平面 ABC 的距离）为 h，则它的体积为 Sh. 沿平面 $A'BC$ 和平面 $A'B'C$，将这个三棱柱分割为 3 个三棱锥. 其中三棱锥 1、2 的底面积相等（$S_{\triangle A'AB}=S_{\triangle A'B'B}$），高也相等（点 C 到平面 $ABB'A'$ 的距离）；三棱锥 2、3 也有相等的底面积（$S_{\triangle B'BC}=S_{\triangle B'C'C}$）和相等的高（点 A' 到平面 $BCC'B'$ 的距离）. 因此，这三个三棱锥的体积相等，每个三棱锥的体积是 $\frac{1}{3}Sh$.

三棱锥 $A'—ABC$（即三棱锥 1）如果以$\triangle ABC$ 为底，那么它的底面积是 S，高是 h，而它的体积是$\frac{1}{3}Sh$. 这说明三棱锥的体积等于它的底面积乘以高的积的三分之一.

事实上，对于一个任意的锥体，设它的底面积为 S，高为 h，那么它的体积应等于一个底面积为 S，高为 h 的三棱锥的体积，即这个锥体的体积为

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.$$

这就是锥体的体积公式.

柱体和锥体是两种基本几何体，它们的体积公式有着广泛的应用.

三、球体的体积

先来研究半球（半径为 R）的体积计算. 为了应用祖暅原理，我们需要找到一个能够求体积的，使它和半球高度一样，并且用任何一个水平面去截它们时，得到的截面面积都相等的几何体.

如图 6(1)，设平行于大圆且与大圆的距离为 l 的平面截半球所得圆面的半径为 r，$r=\sqrt{R^2-l^2}$，于是截面面积 $S_1=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)=\pi R^2-\pi l^2$. S_1 可以看成是在半径为 R 的圆面上挖去一个半径为 l 的同心圆，所得圆环的面积.

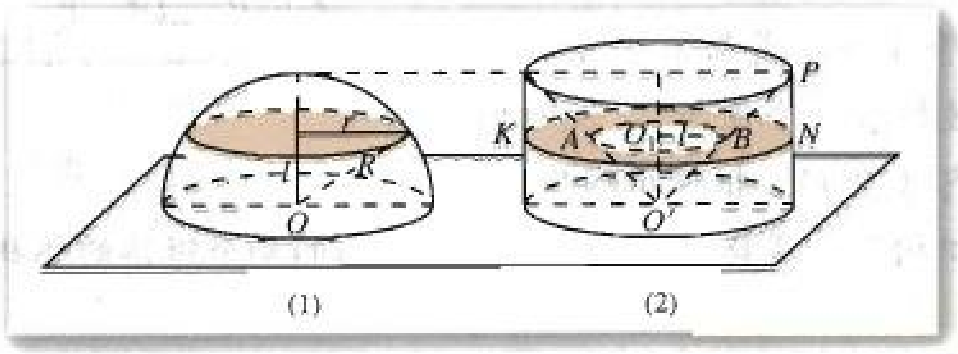


图 6

为此，我们取一个底面半径和高均为 R 的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面、下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体与半球放在同一水平面上（图6(2)).

用任一水平面去截这两个几何体，截面分别为圆面和圆环面. 由上述可知：

圆环大圆半径为 R，小圆半径为 l，面积 $S_2=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$. 所以，$S_1=S_2$. 根据祖暅原理，这两个几何体体积相等. 即

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以球的体积

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

利用祖暅原理求几何体的体积，关键是找出一个满足条件的能够求出体积的几何体.

目　的：画出某些物体（如某些建筑物）的三视图和直观图，体会几何学在现实生活中的应用.

要　求：以小组为单位，分别到不同地点画所见物体的三视图和直观图，最后汇总完成作业.

过　程：

1. 从不同角度，观察你所在学校的某一座教学楼，了解它的几何结构，画出它的三视图和直观图（在不影响图形特征的基础上，尺寸、线条等不作严格要求）.

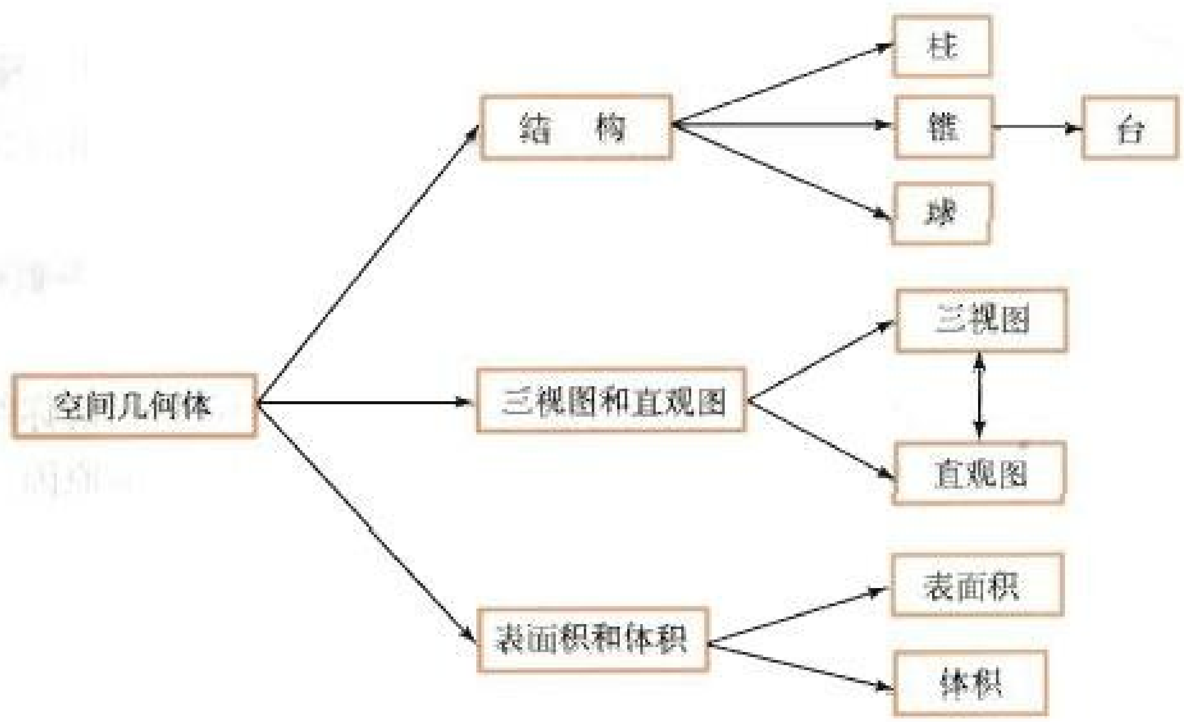
2. 估计上述教学楼的高度、长度、宽度及墙壁的厚度、窗户的大小等数据.

思　考：(1) 你们学校教学楼的主体结构具有什么几何结构特征？

(2) 观察你们地区的其他建筑，它们大多具有什么几何结构特征？请你结合其他学科知识，或向专业人士请教，或上网查询，了解具备上述几何结构特征的原因.

小 结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

1. 我们生活的世界，存在各式各样的物体，它们大多是由具有柱、锥、台、球等形状的物体组成的．认识和把握柱体、锥体、台体、球体的几何结构特征，是我们认识空间几何体的基础．本章接触到的空间几何体是单一的柱体、锥体、台体、球体，或者是它们的简单组合体．你能说出较复杂的几何体（如你身边的建筑物）的结构吗？

2. 对于空间几何体，可以有不同的分类标准．你能从不同的方面认识柱、锥、台、球等空间几何体吗？你分类的依据是什么？

3. 为了研究空间几何体，我们需要在平面上画出空间几何体．空间几何体有哪些不同的表现形式？空间几何体的三视图可以使我们很好地把握空间几何体的性质．由空间几何体可以画出它的三视图，同样由三视图可以想象出空间几何体的形状，两者之间的互相转化，可以培养我们的几何直观能力、空间想象能力．你有这方面的感受和体会吗？

4. 利用斜二测画法，我们可以画出空间几何体的直观图．你能回顾用斜二测画法画空间几何体的基本步骤吗？

5. 计算空间几何体的表面积和体积时，要充分利用平面几何知识，把空间图形转化为平面图形，特别是柱、锥、台体侧面展开图．请同学们回顾柱、锥、台体的侧面展开图是什么？如何计算它们的表面积？柱、锥、台体的体积之间是否存在一定的关系？

6. 球是比较特殊的空间几何体，它的表面积公式和体积公式是什么？

复习参考题

A 组

1. 填空题.

(1) 伐木工人将树伐倒后，再将枝杈砍掉，根据需要将其截成不同长度的圆木，圆木可以近似地看成是________体.

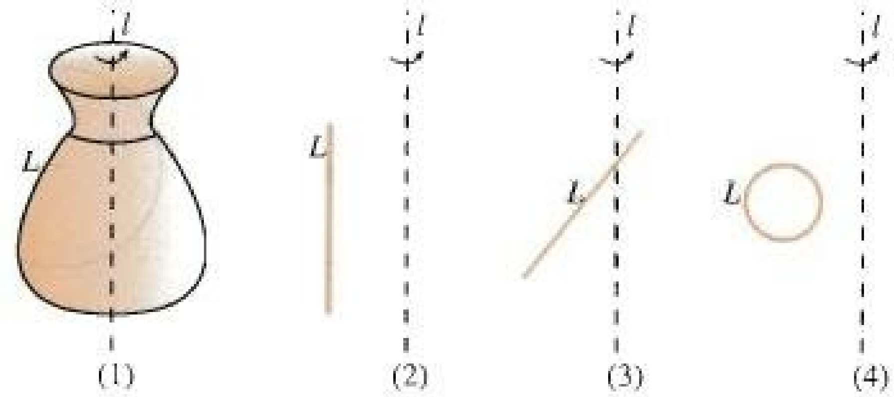
(2) 用铁丝作一个三角形，在三个顶点上分别固定一根筷子，把三根筷子的另一端也用铁丝连接成一个三角形，从而获得一个几何体模型. 如果筷子的长度相同，那么这个几何体可能是________.

(3) 正方形边长扩大 n 倍，其面积扩大____倍；正方体棱长扩大 n 倍，其表面积扩大____倍，体积扩大____倍.

(4) 圆半径扩大 n 倍，其面积扩大____倍；球半径扩大 n 倍，其表面积扩大____倍，体积扩大____倍.

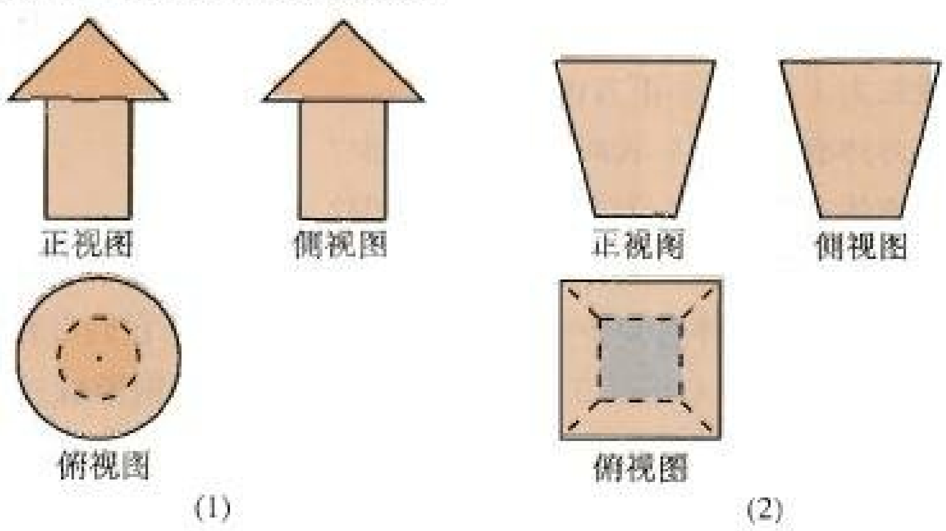
(5) 圆柱的底面不变，体积扩大到原来的 n 倍，则高扩大到原来的____倍；反之，高不变，底面半径应扩大到原来的____倍.

2. 仿照下图 (1)，画出 (2)、(3)、(4) 中 L 围绕 l 旋转一周形成的空间几何体：



(第 2 题)

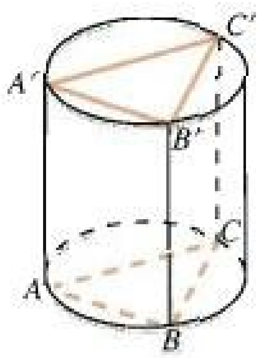
3. 已知几何体的三视图如下，画出它们的直观图.



(第 3 题)

4. 按第 3 题的三视图，用硬纸制作实物模型，并将它们设计成学习用品或装饰物.

5. 如图，圆柱内有一个三棱柱，三棱柱的底面在圆柱底面内，并且底面是正三角形. 如果圆柱的体积是 V，底面直径与母线长相等，那么三棱柱的体积是多少？

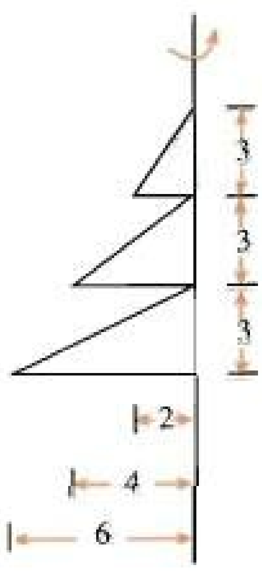


（第 5 题）

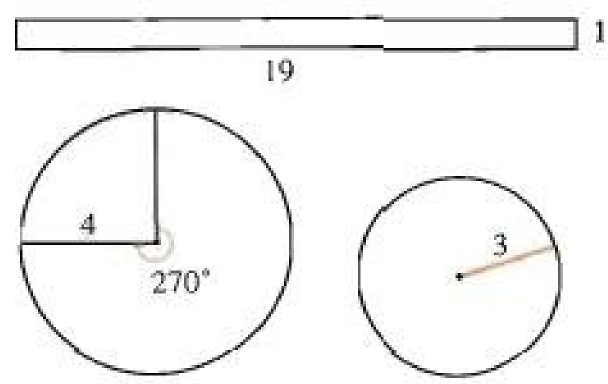
（第 6 题）

6. 如图是一个漏斗形铁管接头，它的母线长是 35 cm，两底面直径分别是 50 cm 和 20 cm，制作1 万个这样的接头需要多少平方米的铁皮（π 取 3.1，结果精确到 1 m^2）？

7. 三个直角三角形如图放置，它们围绕固定直线旋转一周形成几何体，画出它的三视图，并求出它的表面积和体积.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 用硬纸依据如图所示（单位：cm）的平面图形制作一个几何体，画出该几何体的三视图并求出其表面积.

9. 一个红色的棱长是 4 cm 的立方体，将其适当分割成棱长为 1 cm 的小正方体，问：

（1）共得到多少个棱长为 1 cm 的小正方体？

（2）三面涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？

（3）二面涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？

（4）一面涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？

（5）六个面均没有涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？它们占有多少立方厘米的空间？

10. 直角三角形三边长分别是 3 cm、4 cm、5 cm，绕三边旋转一周分别形成三个几何体. 想象并说出三个几何体的结构，画出它们的三视图，求出它们的表面积和体积.

B 组

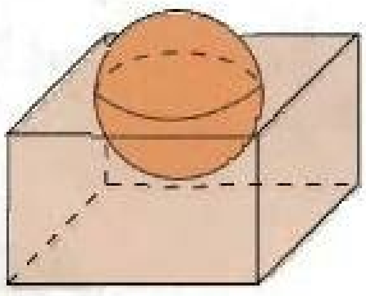
1. 由 8 个面围成的几何体，每一个面都是正三角形，并且有四个顶点 A，B，C，D 在同一个平面内，$ABCD$ 是边长为 30 cm 的正方形.

   (1) 想象几何体的结构，并画出它的三视图和直观图；

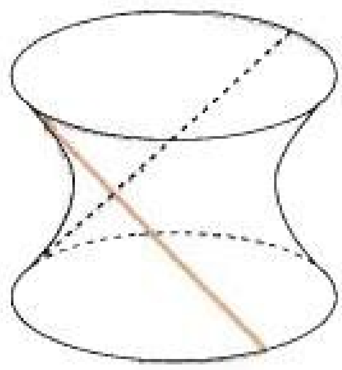
   (2) 求出此几何体的表面积和体积；

   (3) 用硬纸制作这个模型.

2. 一个长、宽、高分别是 80 cm、60 cm、55 cm 的水槽中有水200 000 cm³. 现放入一个直径为50 cm 的木球，如果木球的三分之二在水中，三分之一在水上，那么水是否会从水槽中流出？



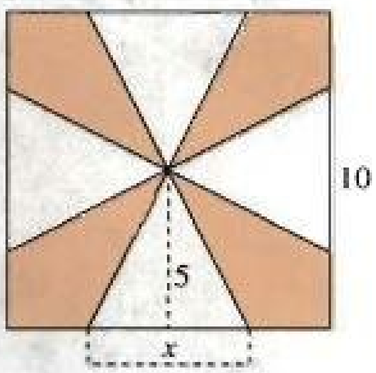
（第 2 题）

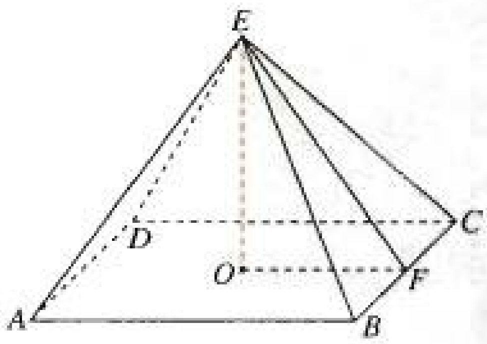


（第 3 题）

3. 你见过如图所示的纸篓吗？仔细观察它的几何结构，可以发现，它可以由多条直线围成，你知道它是怎么形成的吗？

4. 一块边长为 10 cm 的正方形铁片按如图所示的阴影部分裁下，然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥（底面是正方形，从顶点向底面作垂线，垂足是底面中心的四棱锥）形容器，试把容器的容积 V 表示为 x 的函数.





（第 4 题）

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

空间几何体各式各样、千姿百态，如何认识和把握它们呢？一般的方法是，从构成空间几何体的基本元素——点、直线和平面入手，研究它们的性质以及相互之间的位置关系，由整体到局部，由局部再到整体，逐步认识空间几何体的性质.

本章以长方体为载体，直观认识和理解空间中点、直线、平面的位置关系，学会用数学语言表述有关平行、垂直的判定与性质，并对某些结论进行论证.

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

长方体是我们非常熟悉的空间几何图形.

思考

观察长方体（图 2.1-1），你能发现长方体的顶点，棱所在的直线，以及侧面、底面之间的位置关系吗？

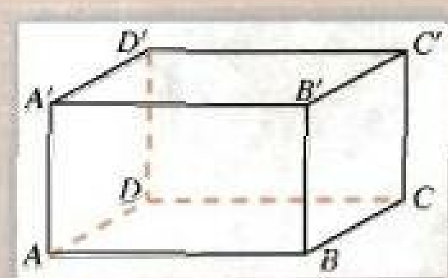


图 2.1-1

长方体由上下、前后、左右六个面围成. 有些面是平行的，有些面是相交的；有些棱所在的直线与面平行，有些棱所在的直线与面相交；每条棱所在的直线都可以看成是某个平面内的直线等等.

空间中的点、直线、平面之间有哪些位置关系呢？本节我们将讨论这个问题.

2.1.1 平面

生活中的一些物体通常呈平面形，课桌面、黑板面、海面都给我们以平面的形象.

几何里所说的“平面”（plane）就是从这样的一些物体中抽象出来的. 但是，几何里的平面是无限延展的.

观察

请你从适当的角度和距离观察桌面、黑板面或者门的表面，它们呈现出怎样的形象？

我们常常把水平的平面画成一个平行四边形，用平行四边形表示平面，如图 2.1-2．平行四边形的锐角通常画成 45°，且横边长等于其邻边长的 2 倍．如果一个平面被另一个平面遮挡住，为了增强它的立体感，我们常把被遮挡部分用虚线画出来，如图 2.1-3．

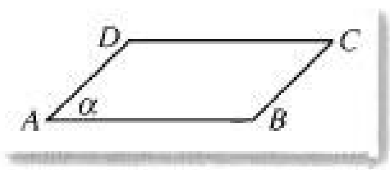


图 2.1-2

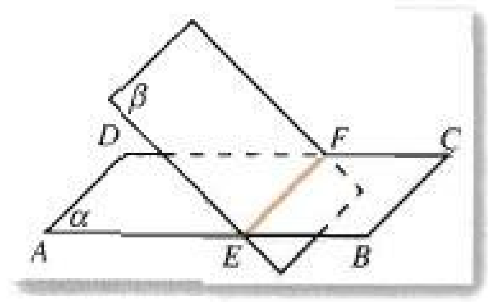


图 2.1-3

为了表示平面，我们常把希腊字母 α，β，γ 等写在代表平面的平行四边形的一个角上，如平面 α、平面 β；也可以用代表平面的平行四边形的四个顶点，或者相对的两个顶点的大写英文字母作为这个平面的名称，图 2.1-2 的平面 α，也可以表示为：平面 $ABCD$、平面 AC 或者平面 BD．

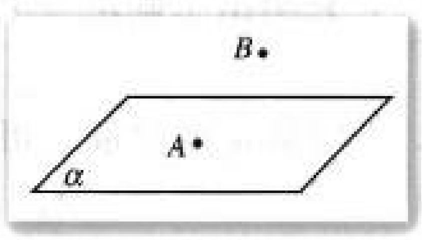


图 2.1-4

平面内有无数个点，平面可以看成点的集合．如图 2.1-4，点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 B 在平面 α 外，记作 $B\notin\alpha$．

思考

如果直线 l 与平面 α 有一个公共点 P，直线 l 是否在平面 α 内？如果直线 l 与平面 α 有两个公共点呢？

实际生活中，我们有这样的经验：把一根直尺边缘上的任意两点放到桌面上，可以看到，直尺的整个边缘就落在了桌面上．

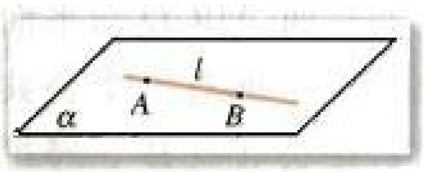


图 2.1-5

上述经验和类似的事实可以归纳为以下公理．

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内（图 2.1-5）．

在生产、生活中，人们经过长期观察与实践，总结出关于平面的一些基本性质，我们把它作为公理．这些公理是进一步推理的基础．

此公理可以用来判断直线是否在平面内．

点动成线、线动成面．直线、平面都可以看成点的集合．点 P 在直线 l 上，记作 $P\in l$；点 P 在直线 l 外，记作 $P\notin l$．如果直线 l 上的所有点都在平面 α 内，就说**直线 l 在平面 α 内**，或者说**平面 α 经过直线 l**，记作 $l\subset\alpha$；否则，就说**直线 l 在平面 α 外**，记作 $l\not\subset\alpha$.

公理 1 也可以用符号表示：

$$A\in l,\ B\in l,\ 且\ A\in\alpha,\ B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha.$$

生活中，我们常常可以看到这样的现象：三脚架可以牢固地支撑照相机或测量用的平板仪等等（图2.1-6）.

图 2.1-6

上述事实和类似经验可以归纳为下面的公理.

公理 2　过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面.

公理 2 刻画了平面特有的基本性质，它给出了确定一个平面的依据.

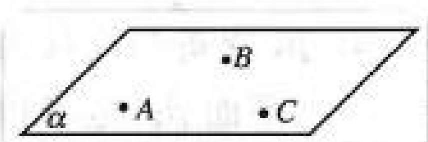


图 2.1-7

不在一条直线上的三个点 A，B，C 所确定的平面，可以记成“平面 ABC”，如图 2.1-7.

思考

如图 2.1-8，把三角板的一个角立在课桌面上，三角板所在平面与桌面所在平面是否只相交于一点 B？为什么？

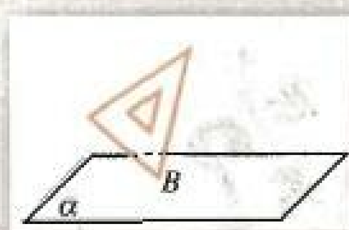


图 2.1-8

观察图 2.1-1 的长方体，我们发现，两个平面相交成直线，这条直线叫做两个平面的交线，如平面 $ABCD$ 与平面 $B'BCC'$ 相交于 BC．另一方面，相邻两个平面有一个公共点，如平面 $ABCD$ 与平面 $B'BCC'$ 有一个公共点 B，经过点 B 有且只有一条过该点的公共直线 BC.

由上及其他相应事实，可以归纳得到：

公理 3 **如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.**

公理 3 告诉我们，如果两个不重合的平面有一个公共点，那么这两个平面一定相交，且其交线一定过这个公共点. 也就是说，如果两个平面有一个公共点，那么它们必定还有另外一个公共点，只要找出这两个平面的两个公共点，就找出了它们的交线.

平面 α 与 β 相交于直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$，如图 2.1-9. 公理 3 也可以用符号表示：

$$P\in\alpha，且\ P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l，且\ P\in l.$$

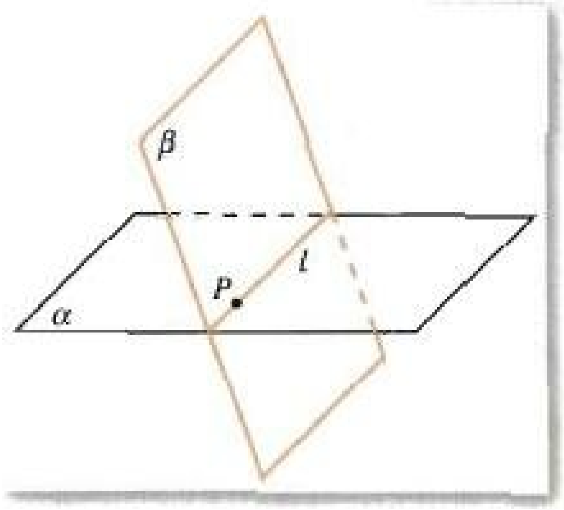


图 2.1-9

从一些原始概念（基本概念）和一些不加证明的原始命题（公理）出发，运用逻辑推理，推导出其他命题和定理的方法叫做公理化方法.

上述三个公理是人们经过长期观察与实践总结出来的，是几何推理的基本依据，也是我们进一步研究空间图形的基础.

例 1 如图 2.1-10，用符号表示下列图形中点、直线、平面之间的位置关系.

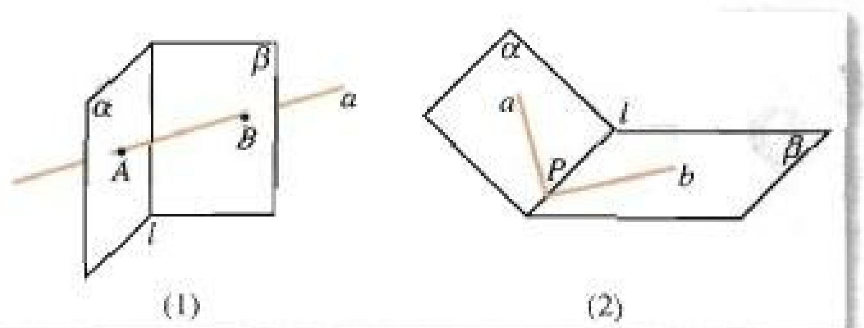


图 2.1-10

分析：根据图形，先判断点、直线、平面之间的位置关

系，然后用符号表示出来.

解： 在（1）中，$\alpha\cap\beta=l$，$a\cap\alpha=A$，$a\cap\beta=B$.

在（2）中，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap l=P$，$b\cap l=P$.

练 习

1. 下列命题正确的是（　）

（A）经过三点确定一个平面

（B）经过一条直线和一个点确定一个平面

（C）四边形确定一个平面

（D）两两相交且不共点的三条直线确定一个平面

2. （1）不共面的四点可以确定几个平面？

（2）共点的三条直线可以确定几个平面？

3. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”.

（1）平面 α 与平面 β 相交，它们只有有限个公共点.（　）

（2）经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.（　）

（3）经过两条相交直线，有且只有一个平面.（　）

（4）如果两个平面有三个不共线的公共点，那么这两个平面重合.（　）

4. 用符号表示下列语句，并画出相应的图形：

（1）点 A 在平面 α 内，但点 B 在平面 α 外；

（2）直线 a 经过平面 α 外的一点 M；

（3）直线 a 既在平面 α 内，又在平面 β 内.

2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系

思考？ 同一平面内的两条直线有几种位置关系？空间中的两条直线呢？

如图 2.1-11，教室内的日光灯管所在直线与黑板的左右两侧所在的直线，既不相交，也不共面，即它们不同在任何一平面内；又如天安门广场上（图2.1-12），旗杆所在的

直线与长安街所在的直线，它们既不相交，也不共面，即不能处在同一平面内.

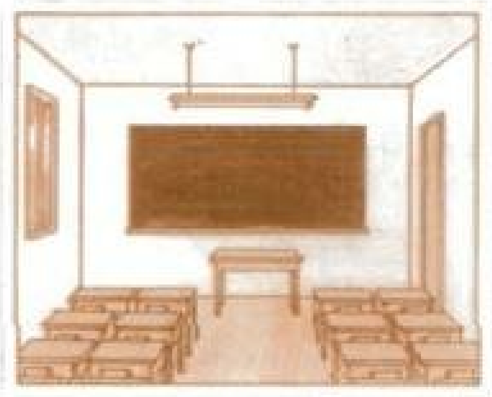


图 2.1-11

图 2.1-12

观察

如图 2.1-13，长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，线段 $A'B$ 所在直线与线段 $C'C$ 所在直线的位置关系如何？

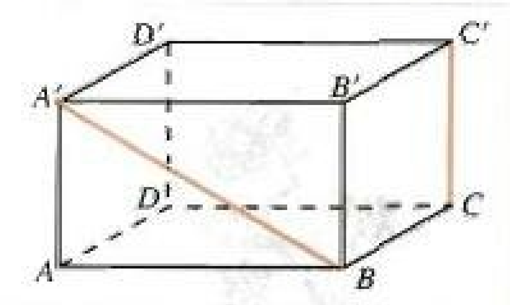


图 2.1-13

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**(skew lines).

空间两条直线的位置关系有且只有三种：

$$\begin{cases}\text{共面直线}\begin{cases}\text{相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点；}\\\text{平行直线：同一平面内，没有公共点；}\end{cases}\\\text{异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点.}\end{cases}$$

这样，空间中两直线平行和过去我们学过的平面上两直线平行的意义是一致的，即首先这两条直线在同一平面内，其次是它们不相交.

为了表示异面直线 a，b 不共面的特点，作图时，通常用一个或两个平面衬托，如图 2.1-14.

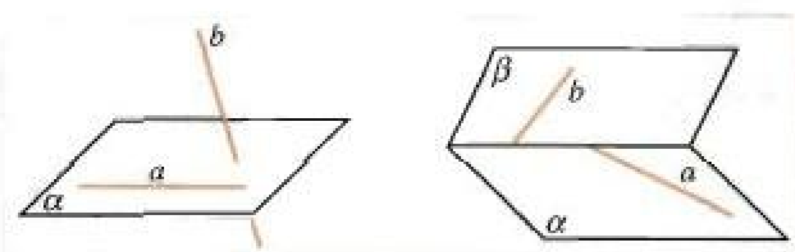


图 2.1-14

探究

图 2.1-15 是一个正方体的展开图，如果将它还原为正方体，那么 AB，CD，EF，GH 这四条线段所在直线是异面直线的有____对.

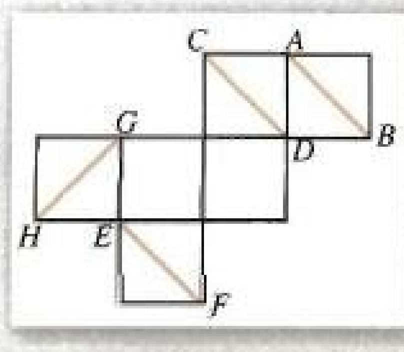


图 2.1-15

我们知道，在同一平面内，如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线互相平行. 在空间中，如果两条直线都与第三条直线平行，是否也有类似的规律？

观察

如图 2.1-16，长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，$BB' \parallel AA'$，$DD' \parallel AA'$，那么 BB' 与 DD' 平行吗？

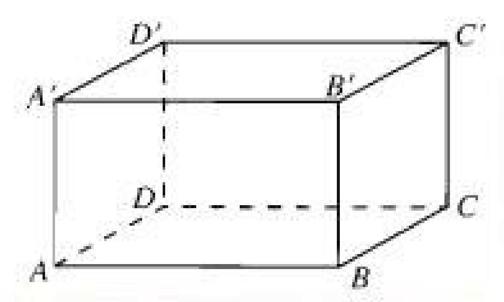


图 2.1-16

联系其他相应事实，可以归纳出以下公理.

公理 4 **平行于同一条直线的两条直线互相平行.**

这个公理表明，空间平行于一条已知直线的所有直线都互相平行. 它给出了判断空间两条直线平行的依据.

公理 4 表述的性质通常叫做空间**平行线的传递性**.

根据公理 4，上面"观察"的答案是肯定的.

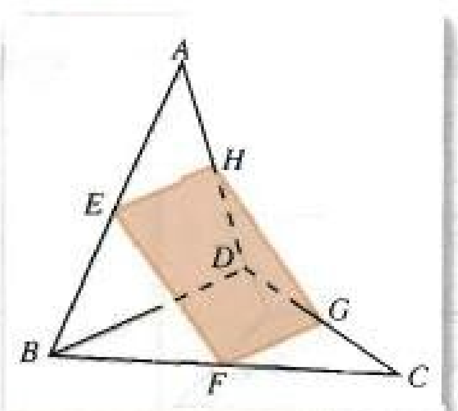


图 2.1-17

例 2 如图 2.1-17，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明： 连接 BD，

因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

所以　$EH /\!/ BD$，且 $EH=\frac{1}{2}BD$.

同理，$FG /\!/ BD$，且 $FG=\frac{1}{2}BD$.

因为　$EH /\!/ FG$，且 $EH=FG$，

所以　四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

探究

在例 2 中，如果再加上条件 $AC=BD$，那么四边形 $EFGH$ 是什么图形?

思考

在平面上，我们容易证明"如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补". 空间中，结论是否仍然成立呢?

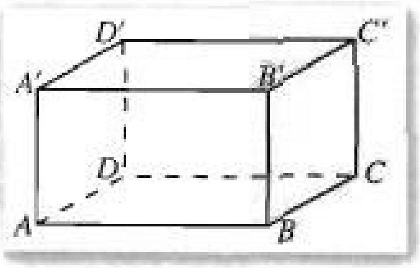


图 2.1-18

观察图 2.1-18，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$\angle ADC$ 与 $\angle A'D'C'$，$\angle ADC$ 与 $\angle A'B'C'$ 的两边分别对应平行，这两组角的大小关系如何?

我们从图中可以看出，

$\angle ADC=\angle A'D'C'$，$\angle ADC+\angle A'B'C'=180°$.

一般地，有以下定理.

定理　**空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.**

我们知道，平面内两条直线相交成 4 个角，其中不大于 $90°$ 的角称为它们的夹角. 夹角刻画了一条直线相对于另一条直线倾斜的程度. 两条异面直线之间也存在类似的问题，为此我们引入"异面直线所成的角"的概念.

a' 与 b' 所成角的大小与点 O 的位置有关吗?

如图 2.1-19，已知两条异面直线 a，b，经过空间任一点 O 作直线 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$，我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做**异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角）**.

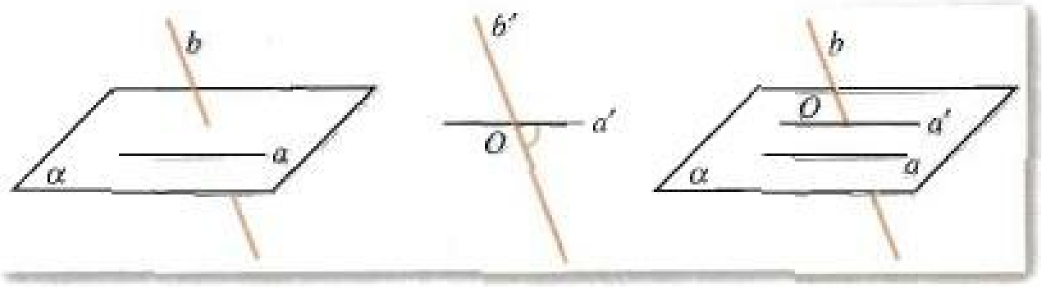


图 2.1-19

研究异面直线所成的角，就是通过平移把异面直线转化为相交直线. 这是研究空间图形的一种基本思路，即把空间图形问题转化为平面图形问题.

为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上. 例如取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a'\parallel a$，a' 和 b 所成的锐角（或直角）就是异面直线 a 与 b 所成的角.

如果两条异面直线所成的角是直角，那么我们就说这**两条直线互相垂直**. 两条互相垂直的异面直线 a，b，记作 $a\perp b$.

探究

（1）如图 2.1-18，观察长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，有没有两条棱所在的直线是互相垂直的异面直线？

（2）如果两条平行直线中的一条与某一条直线垂直，那么，另一条直线是否也与这条直线垂直？

（3）垂直于同一条直线的两条直线是否平行？

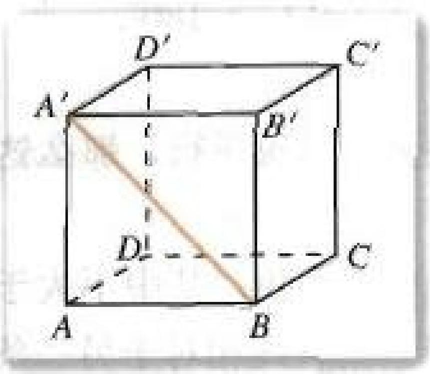


图 2.1-20

例 3 如图 2.1-20，已知正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$.

（1）哪些棱所在直线与直线 BA' 是异面直线？

（2）直线 BA' 和 CC' 的夹角是多少？

（3）哪些棱所在的直线与直线 AA' 垂直？

解：（1）由异面直线的定义可知，棱 AD，DC，CC'，DD'，$D'C'$，$B'C'$ 所在直线分别与直线 BA' 是异面直线.

（2）由 $BB'\parallel CC'$ 可知，$\angle B'BA'$ 为异面直线 BA' 与 CC' 的夹角，$\angle B'BA'=45°$，所以直线 BA' 与 CC' 的夹角为 $45°$.

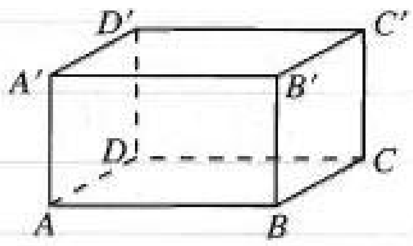
（3）直线 AB，BC，CD，DA，$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$ 分别与直线 AA' 垂直.

练　习

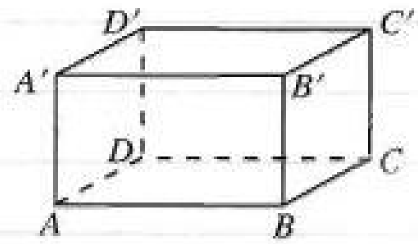
1. 填空题.

(1) 如图，AA'是长方体的一条棱，长方体中与AA'平行的棱共有________条.

(2) 如果$OA /\!/ O'A'$、$OB /\!/ O'B'$，那么$\angle AOB$和$\angle A'O'B'$________.



(第1(1)题)



(第2题)

2. 如图，已知长方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{3}$，$AA'=2$.

(1) BC和$A'C'$所成的角是多少度？

(2) AA'和BC'所成的角是多少度？

2.1.3　空间中直线与平面之间的位置关系

思考

(1) 一支笔所在的直线与一个作业本所在的平面，可能有几种位置关系？

(2) 如图 2.1-21，线段$A'B$所在直线与长方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$的六个面所在平面有几种位置关系？

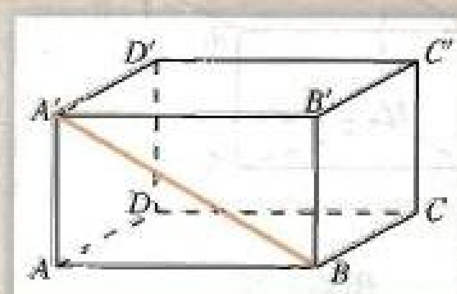


图 2.1-21

通过生活实例以及对长方体模型的观察、思考，我们可以看出，直线与平面的位置关系有且只有三种：

(1) **直线在平面内**——有无数个公共点；

(2) **直线与平面相交**——有且只有一个公共点；

(3) **直线与平面平行**——没有公共点.

直线与平面相交或平行的情况统称为**直线在平面外**.

一般地，直线 a 在平面 α 内，应把直线 a 画在表示平面 α 的平行四边形内；直线 a 在平面 α 外，应把直线 a 或它的一部分画在表示平面 α 的平行四边形外.

图 2.1-22 表示直线与平面的三种位置关系.

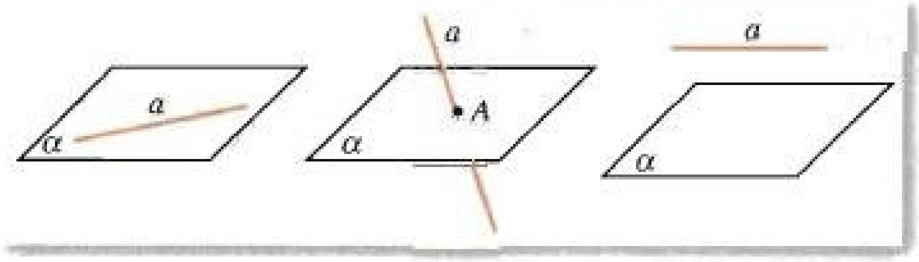


图 2.1-22

直线 a 与平面 α 相交于点 A，记作

$$a\cap\alpha=A;$$

直线 a 与平面 α 平行，记作

$$a/\!/\alpha.$$

例 4 下列命题中正确的个数是（　　）

① 若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l/\!/\alpha$.

② 若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都平行.

③ 如果两条平行直线中的一条与一个平面平行，那么另一条也与这个平面平行.

④若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

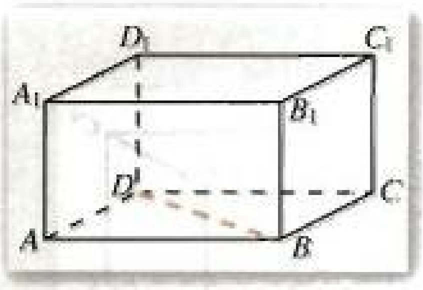


图 2.1-23

解： 如图 2.1-23，我们借助长方体模型，棱 AA_1 所在直线有无数点在平面 $ABCD$ 外，但棱 AA_1 所在直线与平面 $ABCD$ 相交，所以命题①不正确；A_1B_1 所在直线平行于平面 $ABCD$，A_1B_1 显然不平行于 BD，所以命题②不正确；$A_1B_1/\!/AB$，A_1B_1 所在直线平行于平面 $ABCD$，但直线 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以命题③不正确；l 与平面 α 平行，则 l 与 α 无公共点，l 与平面 α 内所有直线都没有公共点，所以命题④正确，应选 B.

练　习

若直线 a 不平行于平面 α，且 $a\not\subset\alpha$，则下列结论成立的是（　　）

（A）α 内的所有直线与 a 异面　　（B）α 内不存在与 a 平行的直线

（C）α 内存在唯一的直线与 a 平行　　（D）α 内的直线与 a 都相交

2.1.4　平面与平面之间的位置关系

思考？

（1）拿出两本书，看作两个平面，上下、左右移动和翻转，它们之间的位置关系有几种？

（2）如图 2.1-24，围成长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的六个面，两两之间的位置关系有几种？

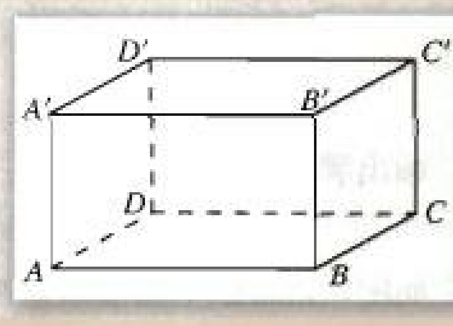


图 2.1-24

通过生活实例以及对长方体模型的观察、思考，我们可以看出，两个平面之间的位置关系有且只有以下两种：

（1）**两个平面平行**——没有公共点；

（2）**两个平面相交**——有一条公共直线.

画两个互相平行的平面时，要注意使表示平面的两个平行四边形的对应边平行，如图 2.1-25.

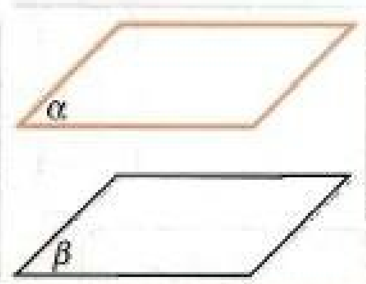


图 2.1-25

平面 α 与平面 β 平行，记作

$$\alpha /\!/ \beta.$$

探究

已知平面 α，β，直线 a，b，且 $\alpha /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则直线 a 与直线 b 具有怎样的位置关系？

练　习

如果三个平面两两相交，那么它们的交线有多少条？画出图形表示你的结论.

习题2.1

A 组

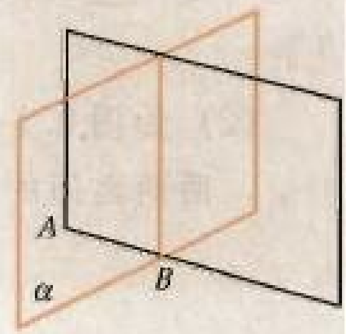
1. 画出满足下列条件的图形：

$$\alpha\cap\beta=l,\ AB\subset\alpha,\ CD\subset\beta,\ AB/\!/l,\ CD/\!/l.$$

2. 如图，试根据下列要求，把被遮挡的部分改为虚线：

(1) AB 没有被平面 α 遮挡；

(2) AB 被平面 α 遮挡.



（第2题）

3. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画"√"，错误的画"×."

(1) 梯形可以确定一个平面. （ ）

(2) 圆心和圆上两点可以确定一个平面. （ ）

(3) 已知 a、b、c、d 是四条直线，若 $a/\!/b$，$b/\!/c$，$c/\!/d$，则 $a/\!/d$. （ ）

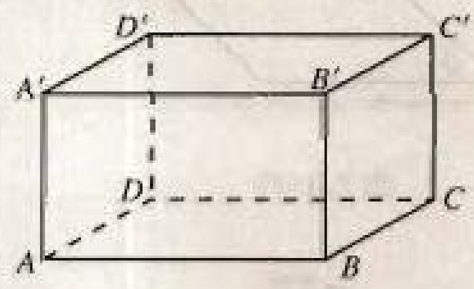
(4) 两条直线 a、b 没有公共点，那么 a 与 b 是异面直线. （ ）

(5) 若 a、b 是两条直线，α、β 是两个平面，且 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 a，b 是异面直线. （ ）

4. 填空题.

(1) 已知 a、b、c 是三条直线，且 $a/\!/b$，a 与 c 的夹角为 θ，那么 b 与 c 夹角为______；

(2) 如图，AA' 是长方体的一条棱，这个长方体中与 AA' 垂直的棱共____条；



（第4(2)题）

(3) 如果 a，b 是异面直线，直线 c 与 a，b 都相交，那么这三条直线中的两条所确定的平面共有____个.

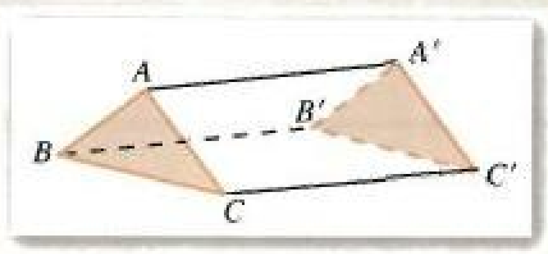
(4) 若一条直线与两个平行平面中的一个平面平行，则这条直线与另一个平面的位置关系是______.

(5) 已知两条相交直线 a，b，$a/\!/$平面 α，则 b 与 α 的位置关系是______.

(6) 设直线 a，b 分别是长方体相邻两个面的对角线所在的直线，则 a 与 b 的位置关系是______.

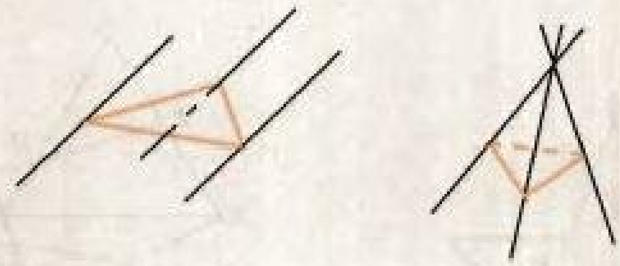
5. 如果一条直线与两条平行直线都相交，那么这三条直线是否共面？

6. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，且 $AA'/\!/BB'$，$AA'=BB'$，$BB'/\!/CC'$，$BB'=CC'$. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.



（第6题）

7. 如图，三条直线两两平行且不共面，每两条直线确定一个平面，一共可以确定几个平面？如果三条直线相交于一点，它们最多可以确定几个平面？



（第 7 题）

8. 正方体各面所在平面将空间分成几部分？

B 组

1. 选择题.

(1) 如图是正方体的平面展开图，则在这个正方体中：

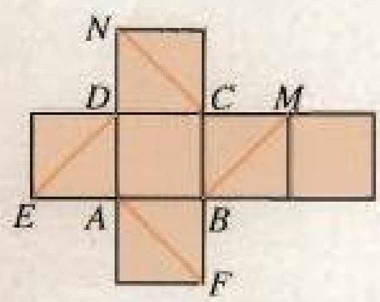
① BM 与 ED 平行.　　② CN 与 BE 是异面直线.

③ CN 与 BM 成 60° 角.　　④ DM 与 BN 是异面直线.

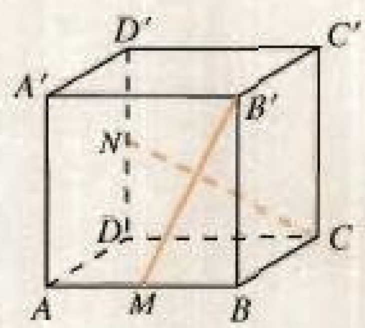
以上四个命题中，正确命题的序号是（　　）

(A) ①、②、③　　(B) ②、④

(C) ③、④　　(D) ②、③、④



（第 1(1) 题）



（第 1(2) 题）

(2) 如图，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，AB 的中点为 M，DD' 的中点为 N，则异面直线 $B'M$ 与 CN 所成的角是（　　）

(A) 0°　　(B) 45°　　(C) 60°　　(D) 90°

(3) 给出三个命题：

① 若两条直线和第三条直线所成的角相等，则这两条直线互相平行.

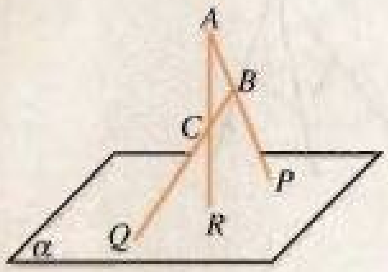
② 若两条直线都与第三条直线垂直，则这两条直线互相平行.

③ 若两条直线都与第三条直线平行，则这两条直线互相平行.

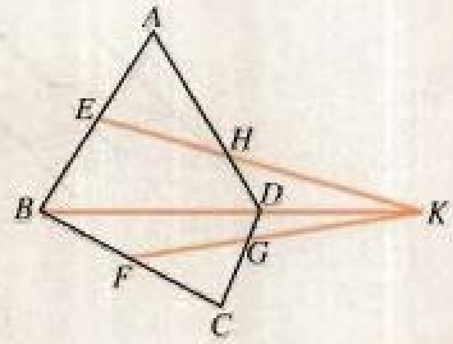
其中不正确命题的个数是（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 如图，$\triangle ABC$ 在平面 α 外，$AB \cap \alpha = P$，$BC \cap \alpha = Q$，$AC \cap \alpha = R$，求证：P，Q，R 三点共线.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 CB 上的点，G，H 分别是 CD 和 AD 上的点，且 EH 与 FG 相交于点 K. 求证：EH，BD，FG 三条直线相交于同一点.

2.2 直线、平面平行的判定及其性质

2.2.1 直线与平面平行的判定

直线与平面的位置关系中，平行是一种非常重要的关系. 它不仅应用较多，而且是学习平面与平面平行的基础.

怎样判定直线与平面平行呢?

根据定义，判定直线与平面是否平行，只需判定直线与平面有没有公共点. 但是，直线无限伸长，平面无限延展，如何保证直线与平面没有公共点呢?

在生活中，我们注意到门扇的两边是平行的. 当门扇绕着一边转动时，另一边始终与门框所在的平面没有公共点，此时门扇转动的一边与门框所在的平面给人以平行的印象.

观察

如图 2.2-1，将一本书平放在桌面上，翻动书的封面，封面边缘 AB 所在直线与桌面所在平面具有什么样的位置关系?

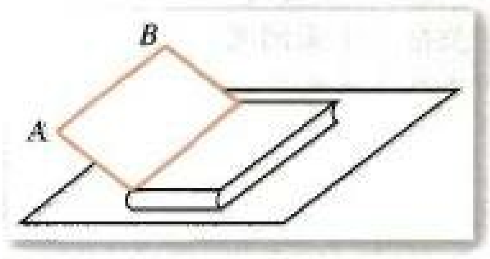


图 2.2-1

如图 2.2-2，直线 a 与平面 α 平行吗？

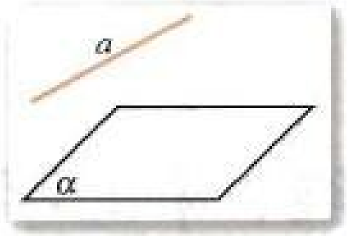


图 2.2-2

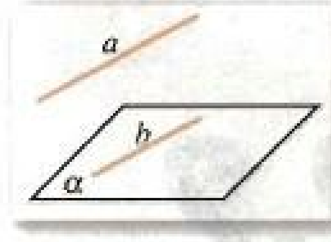


图 2.2-3

如图 2.2-3，如果在平面 α 内有直线 b 与直线 a 平行，那么直线 a 与平面 α 的位置关系如何？是否可以保证直线 a 与平面 α 平行？

探究

如图 2.2-4，平面 α 外的直线 a 平行于平面 α 内的直线 b.

（1）这两条直线共面吗？

（2）直线 a 与平面 α 相交吗？

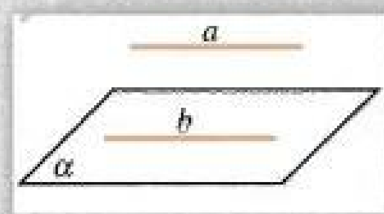


图 2.2-4

定理告诉我们，可以通过直线间的平行，推证直线与平面平行. 这是处理空间位置关系一种常用方法，即将直线与平面平行关系（空间问题）转化为直线间平行关系（平面问题）.

通过探究，我们发现，直线 a 与直线 b 共面，直线 a 与平面 α 不可能相交，直线 a 与平面 α 平行.

一般地，我们可以证明下面的结论.

定理 **平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.**

上述定理通常称为直线与平面平行的判定定理，它可以用符号表示：$a \not\subset \alpha$，$b \subset \alpha$，且 $a /\!/ b \Rightarrow a /\!/ \alpha$.

例 1 求证：空间四边形相邻两边中点的连线平行于经过另外两边所在的平面.

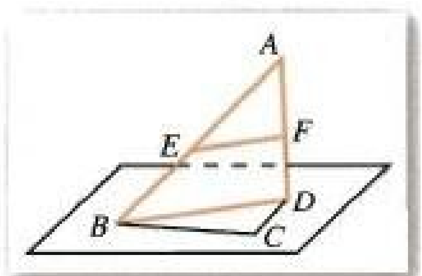


图 2.2-5

已知：如图 2.2-5，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点.

求证：$EF /\!/$ 平面 BCD.

证明： 连接 BD.

因为 $AE=EB$，$AF=FD$，

所以 $EF /\!/ BD$（三角形中位线的性质）.

今后要证明一条已知直线与一个平面平行，只要在这个平面内找出一条直线与已知直线平行，就可断定已知直线与这个平面平行.

因为　$EF \not\subset$ 平面 BCD，$BD \subset$ 平面 BCD，

由直线与平面平行的判定定理得

$EF /\!/$ 平面 BCD.

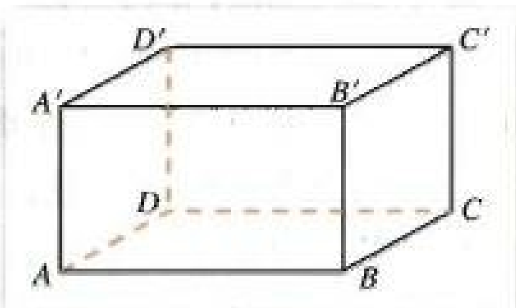
练　习

1. 如图，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，

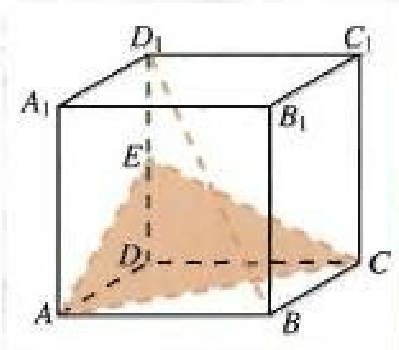
（1）与 AB 平行的平面是__________；

（2）与 AA' 平行的平面是__________；

（3）与 AD 平行的平面是__________.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 DD_1 的中点，试判断 BD_1 与平面 AEC 的位置关系，并说明理由.

2.2.2　平面与平面平行的判定

观察

三角板的一条边所在直线与桌面平行，这个三角板所在平面与桌面平行吗？三角板的两条边所在直线分别与桌面平行，情况又如何呢？

下面我们讨论平面与平面平行的判定问题.

根据定义可知，判定平面与平面平行的关键在于判定它们有没有公共点. 若一个平面内的所有直线都与另一个平面平行，那么这两个平面一定平行. 否则，这两个平面就会有公共点，这样在一个平面内通过这个公共点的直线就不平行于另一个平面了.

由上所述，两个平面平行的问题可转化为一个平面内的直线与另一个平面平行的问题. 实际上，判定两个平面平行不需要判定一个平面内的所有直线都平行于另一个平面.

探究

(1) 平面 β 内有一条直线与平面 α 平行，α，β 平行吗？

(2) 平面 β 内有两条直线与平面 α 平行，α，β 平行吗？

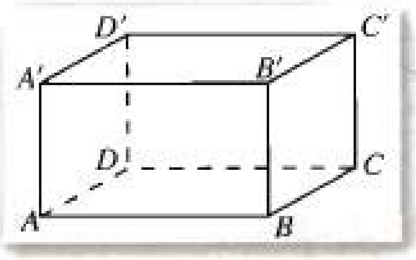


图 2.2-6

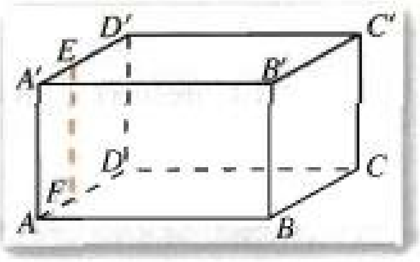


图 2.2-7

探究 (1) 中的平面 α 和平面 β 不一定平行. 如图 2.2-6，借助长方体模型，我们可以看出，平面 $A'ADD'$ 中直线 AA' // 平面 $DCC'D'$，但平面 $A'ADD'$ 与平面 $DCC'D'$ 相交.

对于探究 (2)，我们分两种情况考虑.

如果平面 β 内的两条直线是平行直线，平面 α 和平面 β 不一定平行. 如图 2.2-7，借助长方体模型，在平面 $A'ADD'$ 内，有一条与 AA' 平行的直线 EF，显然，AA' 与 EF 都平行于平面 $DCC'D'$，但这两条平行直线所在的平面 $A'ADD'$ 与平面 $DCC'D'$ 相交.

如果平面 β 内有两条相交直线与平面 α 平行，情况如何呢？

如图 2.2-8，借助长方体模型，平面 $ABCD$ 内两条相交直线 AC，BD 分别与平面 $A'B'C'D'$ 内两条相交直线 $A'C'$，$B'D'$ 平行，由直线与平面平行的判定定理可知，这两条相交直线 AC，BD 都与平面 $A'B'C'D'$ 平行. 此时，平面 $ABCD$ 平行于平面 $A'B'C'D'$.

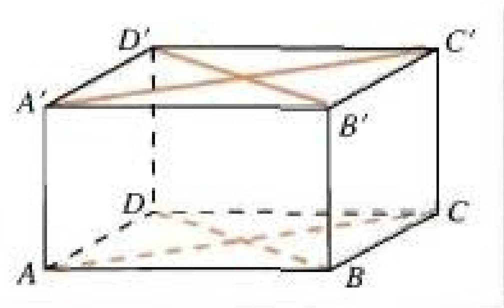


图 2.2-8

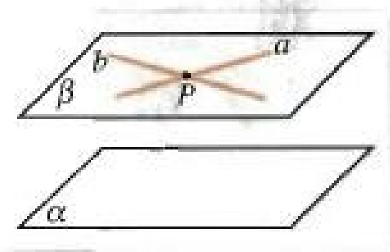


图 2.2-9

一般地，我们有如下判定平面与平面平行的定理（图 2.2-9）.

定理 一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

上述定理通常称为平面与平面平行的判定定理，它告诉我们，可以由直线与平面平行判定平面与平面平行.

平面与平面平行的判定定理可以用符号表示：

$$a\subset\beta，b\subset\beta，a\cap b=P，a /\!/ \alpha，b /\!/ \alpha \Rightarrow \beta /\!/ \alpha.$$

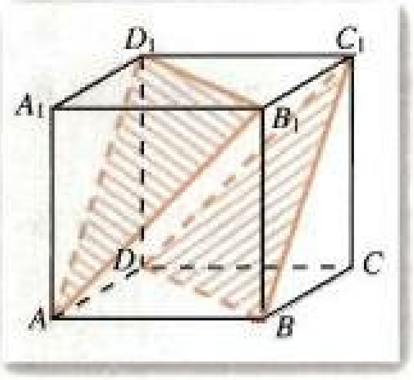


图 2.2-10

例 2　已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$（图 2.2-10），求证：平面 AB_1D_1 // 平面 C_1BD.

证明：因为　$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

所以　$D_1C_1 /\!/ A_1B_1$，$D_1C_1=A_1B_1$.

又 $AB /\!/ A_1B_1$，$AB=A_1B_1$，

所以　$D_1C_1 /\!/ AB$，$D_1C_1=AB$，

所以　D_1C_1BA 为平行四边形.

所以　$D_1A /\!/ C_1B$.

又 $D_1A\not\subset$ 平面 C_1BD，$C_1B\subset$ 平面 C_1BD，

由直线与平面平行的判定定理得

$$D_1A /\!/ \text{平面 } C_1BD，$$

同理

$$D_1B_1 /\!/ \text{平面 } C_1BD，$$

又

$$D_1A\cap D_1B_1=D_1，$$

所以

$$\text{平面 } AB_1D_1 /\!/ \text{平面 } C_1BD.$$

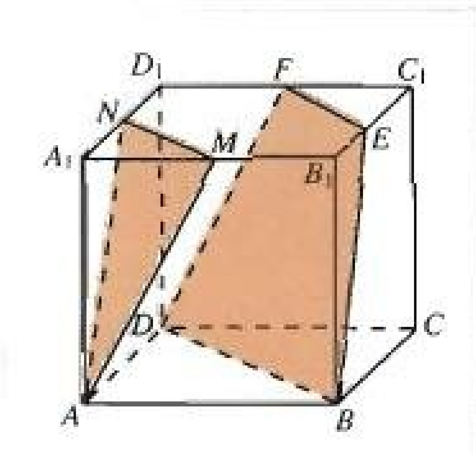
练　习

1. 判断下列命题是否正确，正确的说明理由，错误的举例说明：

(1) 已知平面 α，β 和直线 m，n，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m /\!/ \beta$，$n /\!/ \beta$，则 $\alpha /\!/ \beta$；

(2) 一个平面 α 内两条不平行的直线都平行于另一平面 β，则 $\alpha /\!/ \beta$.

2. 如图，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，E，F 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点. 求证：平面 AMN // 平面 $EFDB$.



（第 2 题）

3. 平面 α 与平面 β 平行的条件可以是（　　）

(A) α 内有无穷多条直线都与 β 平行

(B) 直线 $a /\!/ \alpha$，$a /\!/ \beta$，且直线 a 不在 α 内，也不在 β 内

(C) 直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$，且 $a /\!/ \beta$，$b /\!/ \alpha$

(D) α 内的任何直线都与 β 平行

2.2.3 直线与平面平行的性质

思考？

(1) 如果一条直线与一个平面平行，那么这条直线与这个平面内的直线有哪些位置关系？

(2) 教室内日光灯管所在的直线与地面平行，如何在地面上作一条直线与灯管所在的直线平行？

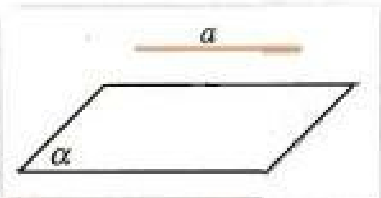


图 2.2-11

如图 2.2-11，由直线与平面平行的定义，如果一条直线 a 与平面 α 平行，那么 a 与 α 无公共点，即 a 上的点都不在 α 内，α 内的任何直线与 a 都无公共点．这样，平面 α 内的直线与平面 α 外的直线 a 只能是异面直线或者平行直线．那么，在什么条件下，平面 α 内的直线与直线 a 平行呢？

由于 a 与平面 α 内的任何直线无公共点，所以，过直线 a 的某一平面，若与平面 α 相交，则直线 a 就平行于这条交线．

下面，我们来证明这一结论．

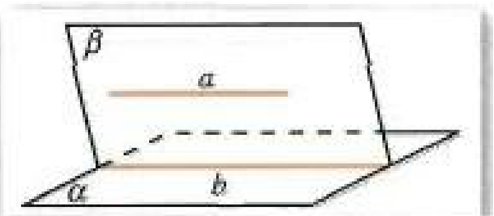


图 2.2-12

如图 2.2-12，$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = b$．

求证：$a /\!/ b$．

证明：因为 $\alpha \cap \beta = b$，所以 $b \subset \alpha$．

又因为 $a /\!/ \alpha$，所以 a 与 b 无公共点．

又因为 $a \subset \beta$，$b \subset \beta$，所以 $a /\!/ b$．

这样，我们得到直线与平面平行的性质定理．

定理 **一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行．**

直线与平面平行的性质定理揭示了直线与平面平行中蕴含着直线与直线平行．通过直线与平面平行可得到直线与直线平行，这给出了一种作平行线的重要方法．对于本节开始提出的问题，我们只需由灯管两端向地面引两条平行线，过两条平行线与地面的交点的连线就是与灯管平行的直线．

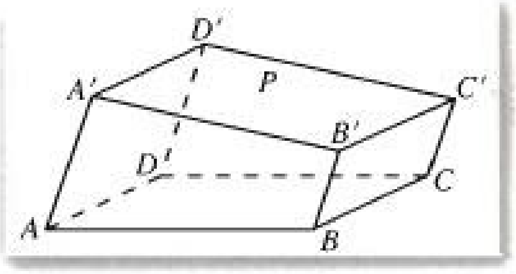


图 2.2-13

例 3　如图 2.2-13 所示的一块木料中，棱 BC 平行于面 $A'C'$.

(1) 要经过面 $A'C'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线？

(2) 所画的线与平面 AC 是什么位置关系？

分析： 经过木料表面 $A'C'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，实际上是经过 BC 及 BC 外一点 P 作截面，也就是找出平面与平面的交线. 我们可以由直线与平面平行的性质定理和公理 4、公理 2 作出.

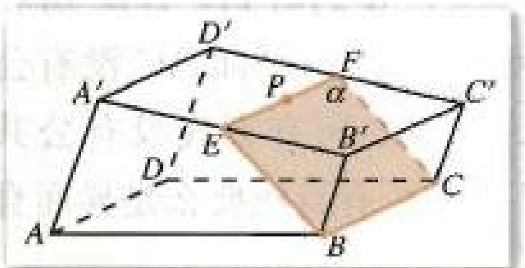


图 2.2-14

解： (1) 如图 2.2-14，在平面 $A'C'$ 内，过点 P 作直线 EF，使 $EF/\!/B'C'$，并分别交棱 $A'B'$，$C'D'$ 于点 E，F. 连接 BE，CF. 则 EF，BE，CF 就是应画的线.

(2) 因为棱 BC 平行于平面 $A'C'$，平面 BC' 与平面 $A'C'$ 交于 $B'C'$，所以，$BC/\!/B'C'$. 由 (1) 知，$EF/\!/B'C'$，所以 $EF/\!/BC$，因此

$$\left.\begin{array}{l} EF/\!/BC \\ EF\not\subset \text{平面 } AC \\ BC\subset \text{平面 } AC \end{array}\right\}\Rightarrow EF/\!/\text{平面 } AC.$$

BE，CF 显然都与平面 AC 相交.

例 4　已知平面外的两条平行直线中的一条平行于这个平面，求证：另一条也平行于这个平面.

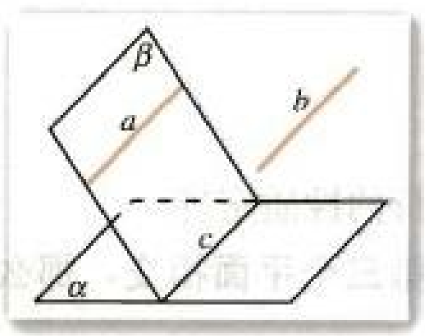


图 2.2-15

如图 2.2-15，已知直线 a，b，平面 α，且 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，a，b 都在平面 α 外.

求证：$b/\!/\alpha$.

证明： 过 a 作平面 β，使它与平面 α 相交，交线为 c.

因为　$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=c$，所以　$a/\!/c$.

因为　$a/\!/b$，所以　$b/\!/c$.

又因为　$c\subset\alpha$，$b\not\subset\alpha$，所以　$b/\!/\alpha$.

直线与平面平行的判定定理是由直线与直线平行得到直线与平面平行，直线与平面平行的性质定理是由直线与平面平行得到直线与直线平行. 这种直线与平面的位置关系同直线与直线的位置关系的相互转化是立体几何的一种重要的思想方法.

2.2.4 平面与平面平行的性质

思考？

如果两个平面平行，那么一个平面内的直线与另一个平面内的直线具有什么位置关系？

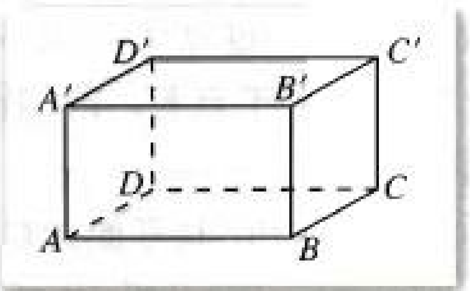


图 2.2-16

如图 2.2-16，借助长方体模型，我们看到，$B'D'$所在的平面 $A'C'$ 与平面 AC 平行，所以 $B'D'$ 与平面 AC 没有公共点. 也就是说，$B'D'$ 与平面 AC 内的所有直线没有公共点. 因此，直线 $B'D'$ 与平面 AC 内的所有直线要么是异面直线，要么是平行直线.

平面 AC 内哪些直线与 $B'D'$ 平行呢？如何找到它们呢？实际上，平面 AC 内的直线只要与直线 $B'D'$ 共面就可以了.

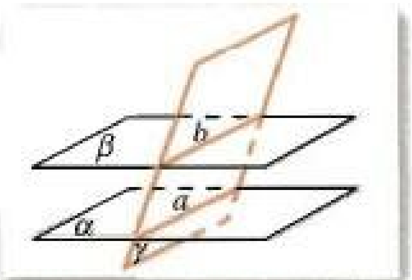


图 2.2-17

例 5 如图 2.2-17，已知平面 α，β，γ 满足 $\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$，求证：$a /\!/ b$.

证明： 因为 $\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$，

所以 $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$.

又因为 $\alpha /\!/ \beta$，

所以 a，b 没有公共点，

又因为 a，b 同在平面 γ 内，

所以，$a /\!/ b$.

我们把这个结论作为两个平面平行的性质定理.

定理 **如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.**

上述定理告诉我们，可以由平面与平面平行得出直线与直线平行.

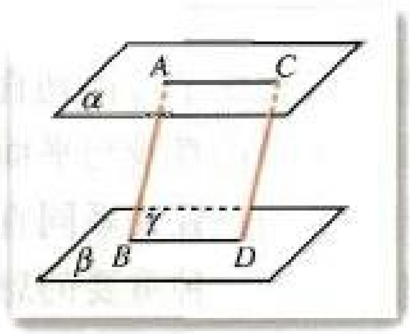


图 2.2-18

例 6 求证：夹在两个平行平面间的平行线段相等.

如图 2.2-18，$\alpha /\!/ \beta$，$AB /\!/ CD$，且 $A \in \alpha$，$C \in \alpha$，$B \in \beta$，$D \in \beta$. 求证：$AB = CD$.

证明：因为 $AB/\!/CD$，所以过 AB，CD 可作平面 γ，且平面 γ 与平面 α 和 β 分别相交于 AC 和 BD.

因为　$\alpha/\!/\beta$，所以　$BD/\!/AC$.

因此，四边形 $ABDC$ 是平行四边形.

所以　$AB=CD$.

从前面的讨论我们可以看到，通过直线与平面平行可以判定平面与平面平行；而由平面与平面平行的定义及性质定理可以得出直线与平面平行、直线与直线平行．这进一步揭示出直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的平行关系可以相互转化.

练　习

判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”号，错误的画“×”号.

(1) 如果 a，b 是两条直线，且 $a/\!/b$，那么 a 平行于经过 b 的任何平面.　（　　）

(2) 如果直线 a 和平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，那么 a 与 α 内的任何直线平行.　（　　）

(3) 如果直线 a，b 和平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，那么 $a/\!/b$.　（　　）

(4) 如果直线 a，b 和平面 α 满足 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，$b\not\subset\alpha$，那么 $b/\!/\alpha$.　（　　）

习题2.2

A 组

1. 选择题.

(1) 下列命题中，错误的是（　　）

(A) 平行于同一条直线的两个平面平行

(B) 平行于同一个平面的两个平面平行

(C) 一个平面与两个平行平面相交，交线平行

(D) 一条直线与两个平行平面中的一个相交，则必与另一个相交

(2) 若直线 a 不平行于平面 α，则下列结论成立的是（　　）

(A) α 内的所有直线都与直线 a 异面　(B) α 内不存在与 a 平行的直线

(C) α 内的直线都与 a 相交　(D) 直线 a 与平面 α 有公共点

(3) 已知直线 $a /\!/$ 平面 α，$P\in\alpha$，那么过点 P 且平行于直线 a 的直线（　　）

(A) 只有一条，不在平面 α 内　(B) 有无数条，不一定在 α 内

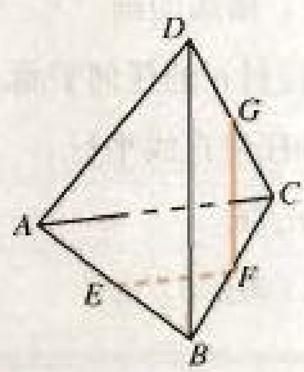
(C) 只有一条，且在平面 α 内　(D) 有无数条，一定在 α 内

2. 填空题.

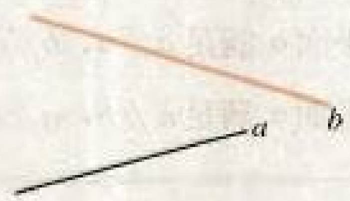
(1) 已知平面 α，β 和直线 a，b，c，且 $a/\!/b/\!/c$，$a\subset\alpha$，b，$c\subset\beta$，则 α 与 β 的关系是________.

(2) 平面内一点与平面外一点的连线和这个平面内直线的关系是________.

3. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G 分别是 AB，BC，CD 的中点，求证：(1) $BD/\!/$平面 EFG；(2) $AC/\!/$平面 EFG.



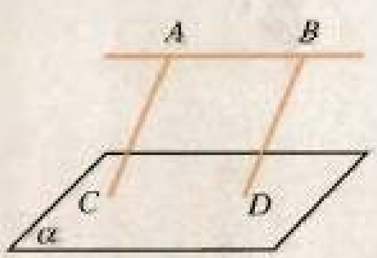
(第 3 题)



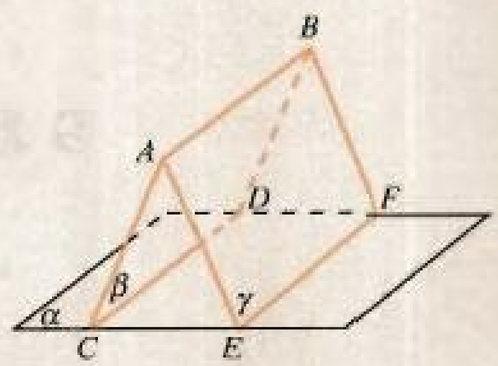
(第 4 题)

4. 如图，a，b 是异面直线，画出平面 α，使 $a\subset\alpha$，且 $b/\!/\alpha$，并说明理由.

5. 如图，$AB/\!/\alpha$，$AC/\!/BD$，$C\in\alpha$，$D\in\alpha$，求证：$AC=BD$.



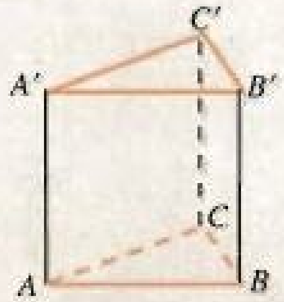
(第 5 题)



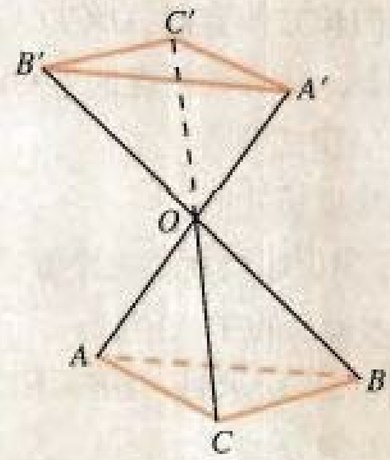
(第 6 题)

6. 如图，$\alpha\cap\beta=CD$，$\alpha\cap\gamma=EF$，$\beta\cap\gamma=AB$，$AB/\!/\alpha$，求证：$CD/\!/EF$.

7. 如图，A，B，C 为不在同一条直线上的三点，$AA'/\!/BB'/\!/CC'$，且 $AA'=BB'=CC'$，求证：平面 $ABC/\!/$平面 $A'B'C'$.



（第 7 题）

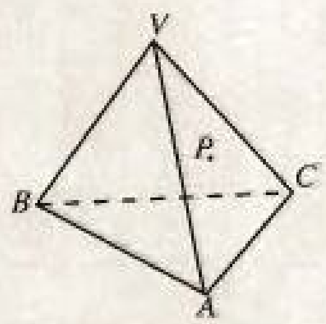


（第 8 题）

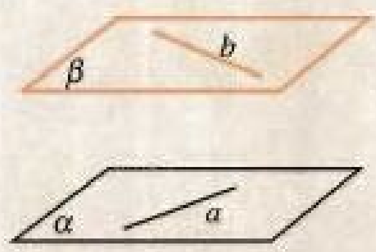
8. 如图，直线 AA'、BB'、CC' 相交于点 O，$AO=A'O$，$BO=B'O$，$CO=C'O$，求证：平面 ABC∥平面 $A'B'C'$.

B 组

1. 一木块如图所示，点 P 在平面 VAC 内，过点 P 将木块锯开，使截面平行于直线 VB 和 AC，应该怎样画线？



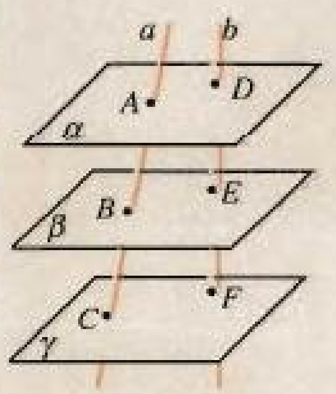
（第 1 题）



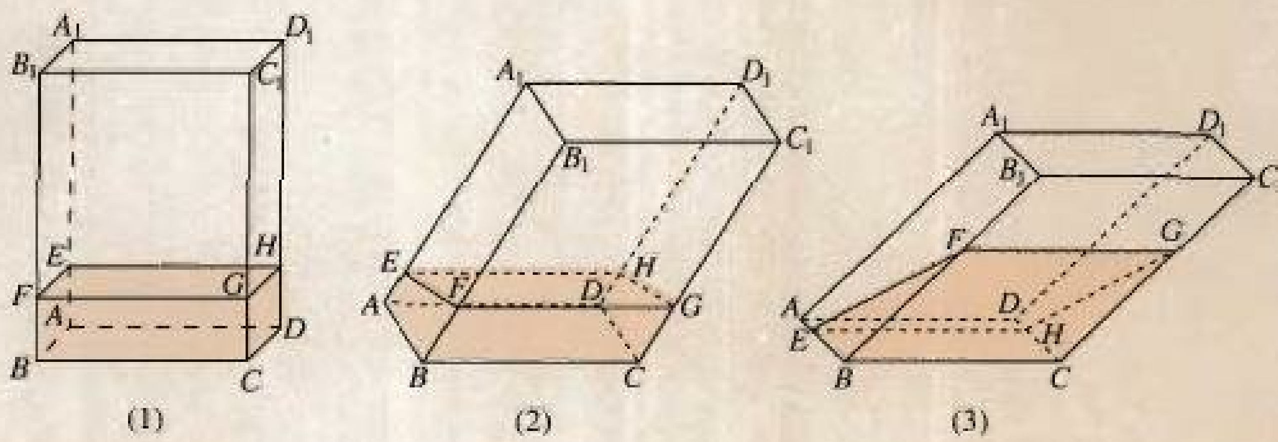
（第 2 题）

2. 如图，a，b 是异面直线，$a\subset\alpha$，$a\parallel\beta$，$b\subset\beta$，$b\parallel\alpha$，求证：$\alpha\parallel\beta$.

3. 如图，$\alpha\parallel\beta\parallel\gamma$，直线 a 与 b 分别交 α，β，γ 于点 A，B，C 和点 D，E，F，求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，透明塑料制成的长方体容器 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 内灌进一些水，固定容器底面一边 BC 于地面上，再将容器倾斜．随着倾斜度的不同，有下面五个命题：

(1) 有水的部分始终呈棱柱形；

(2) 没有水的部分始终呈棱柱形；

(3) 水面 $EFGH$ 所在四边形的面积为定值；

(4) 棱 A_1D_1 始终与水面所在平面平行；

(5) 当容器倾斜如图（3）所示时，$BE\cdot BF$ 是定值．

其中所有正确命题的序号是__________，为什么？

2.3 直线、平面垂直的判定及其性质

2.3.1 直线与平面垂直的判定

图 2.3-1

如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线，那么这条直线是否与这个平面垂直？

日常生活中，我们对直线与平面垂直有很多感性认识，比如，旗杆与地面的位置关系，大桥的桥柱与水面的位置关系（图 2.3-1）等，都给我们以直线与平面垂直的形象.

如图2.3-2，在阳光下观察直立于地面的旗杆及它在地面的影子. 随着时间的变化，尽管影子 BC 的位置在移动，但是旗杆 AB 所在直线始终与 BC 所在直线垂直. 也就是说，旗杆 AB 所在直线与地面内任意一条过点 B 的直线垂直. 事实上，旗杆 AB 所在直线与地面内任意一条不过点 B 的直线 $B'C'$ 也是垂直的.

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说**直线 l 与平面 α 互相垂直**，记作 $l\perp\alpha$. 直线 l 叫做**平面 α 的垂线**，平面 α 叫做**直线 l 的垂面**. 直线与平面垂直时，它们惟一的公共点 P 叫做**垂足**.

画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直，如图 2.3-3.

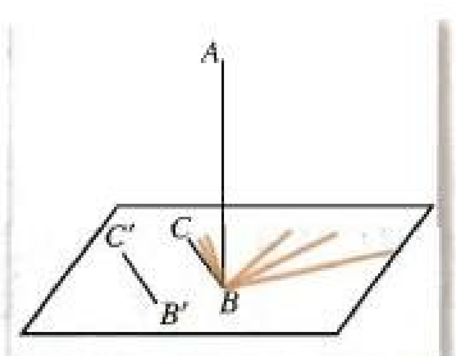


图 2.3-2

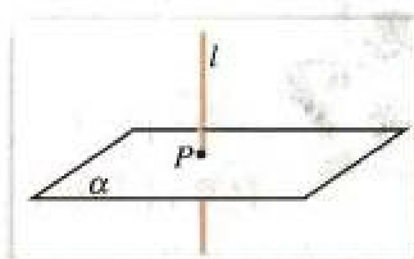


图 2.3-3

除定义外，我们如何判断一条直线与一个平面垂直呢？

探究

如图 2.3-4，请同学们准备一块三角形的纸片，我们一起来做一个试验：

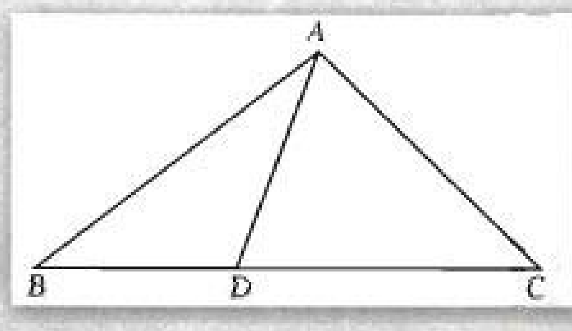


图 2.3-4

过$\triangle ABC$的顶点A翻折纸片，得到折痕AD，将翻折后的纸片竖起放置在桌面上（BD，DC与桌面接触）.

(1) 折痕AD与桌面垂直吗？

(2) 如何翻折才能使折痕AD与桌面所在平面α垂直？

容易发现，当且仅当折痕AD是BC边上的高时，AD所在直线与桌面所在平面α垂直（图 2.3-5）.

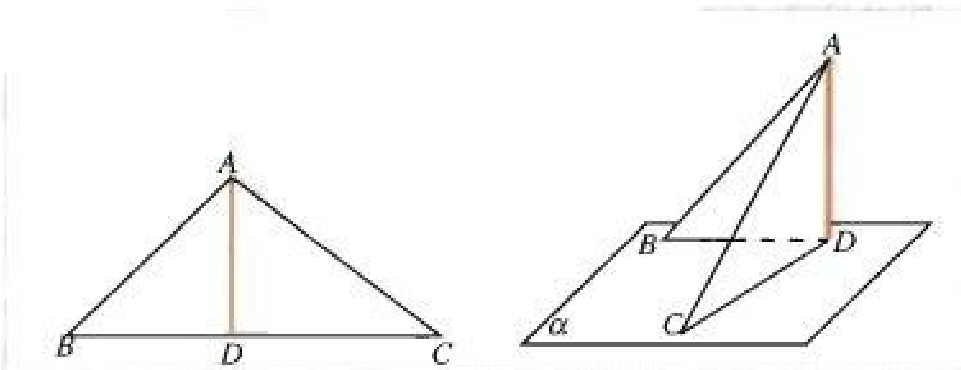


图 2.3-5

思考

(1) 有人说，折痕AD所在直线与桌面所在平面α上的一条直线垂直，就可以判断AD垂直平面α. 你同意他的说法吗？

(2) 如图 2.3-5，由折痕$AD\perp BC$，翻折之后垂直关系不变，即$AD\perp CD$，$AD\perp BD$. 由此你能得到什么结论？

定理体现了“直线与平面垂直”与“直线与直线垂直”互相转化的数学思想.

一般地，我们有下面的判定直线与平面垂直的定理.

定理　一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直.

定理中的“两条相交直线”这一条件不可忽视.

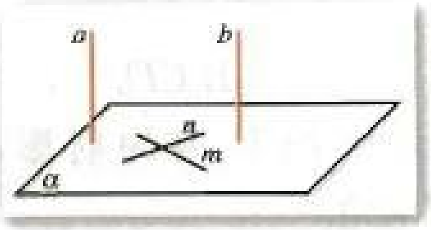


图 2.3-6

例 1　如图 2.3-6，已知 $a/\!/b$，$a\perp\alpha$，求证：$b\perp\alpha$.

证明：在平面 α 内作两条相交直线 m，n.

因为直线 $a\perp\alpha$，根据直线与平面垂直的定义知

$$a\perp m,\ a\perp n.$$

又因为 $$b/\!/a,$$

所以

$$b\perp m,\ b\perp n.$$

又因为 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，m，n 是两条相交直线，

所以

$$b\perp\alpha.$$

探究

如图 2.3-7，直四棱柱 $A'B'C'D'$-$ABCD$（侧棱与底面垂直的棱柱称为直棱柱）中，底面四边形 $ABCD$ 满足什么条件时，$A'C\perp B'D'$？

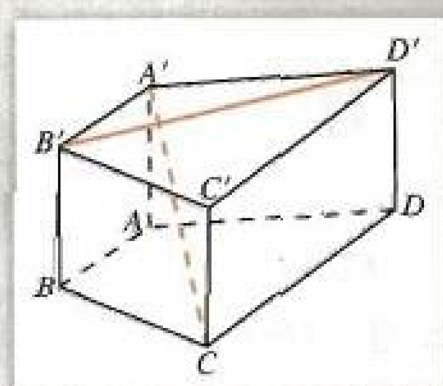


图 2.3-7

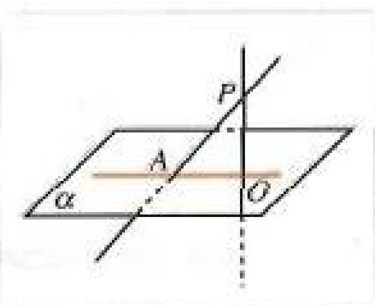


图 2.3-8

如图 2.3-8，一条直线 PA 和一个平面 α 相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点 A 叫做斜足．过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线 PO，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫做斜线在这个平面上的射影．平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做**这条直线和这个平面所成的角**.

一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是 $0°$ 的角.

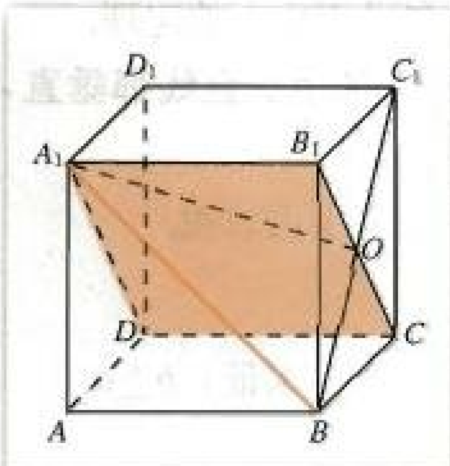


图 2.3-9

例 2 如图 2.3-9，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求直线 A_1B 和平面 A_1B_1CD 所成的角.

分析： 找出直线 A_1B 在平面 A_1B_1CD 内的射影，就可以求出 A_1B 和平面 A_1B_1CD 所成的角.

解： 连结 BC_1 交 B_1C 于点 O，连结 A_1O.

设正方体的棱长为 a，因为 $A_1B_1 \perp B_1C_1$，$A_1B_1 \perp B_1B$，所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1.

所以 $A_1B_1 \perp BC_1$.

又因为 $BC_1 \perp B_1C$，所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD.

所以 A_1O 为斜线 A_1B 在平面 A_1B_1CD 内的射影，$\angle BA_1O$ 为 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成的角.

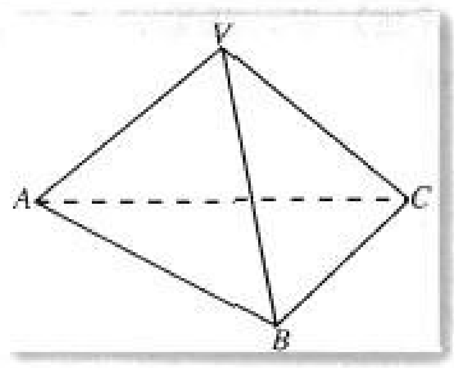
在 $Rt\triangle A_1BO$ 中，$A_1B=\sqrt{2}a$，$BO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

所以 $BO=\dfrac{1}{2}A_1B$，$\angle BA_1O=30°$.

因此，直线 A_1B 和平面 A_1B_1CD 所成的角为 $30°$.

练 习

1. 如图，在三棱锥 $V\text{-}ABC$ 中，$VA=VC$，$AB=BC$，求证：$VB \perp AC$.



（第 1 题）

2. 过 $\triangle ABC$ 所在平面 α 外一点 P，作 $PO \perp \alpha$，垂足为 O，连接 PA，PB，PC.

   (1) 若 $PA=PB=PC$，$\angle C=90°$，则点 O 是 AB 边的______点.

   (2) 若 $PA=PB=PC$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的______心.

   (3) 若 $PA \perp PB$，$PB \perp PC$，$PC \perp PA$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的______心.

3. 两条直线和一个平面所成的角相等，这两条直线一定平行吗？

2.3.2 平面与平面垂直的判定

为了解决实际问题，人们需要研究两个平面所成的角．如图 2.3-10，修筑水坝时，为了使水坝坚固耐用，必须使水坝面与水平面成适当的角度；发射人造地球卫星时，也要根据需要，使卫星轨道平面与地球赤道平面成一定的角度．为此，我们引入二面角的概念，研究两个平面所成的角．

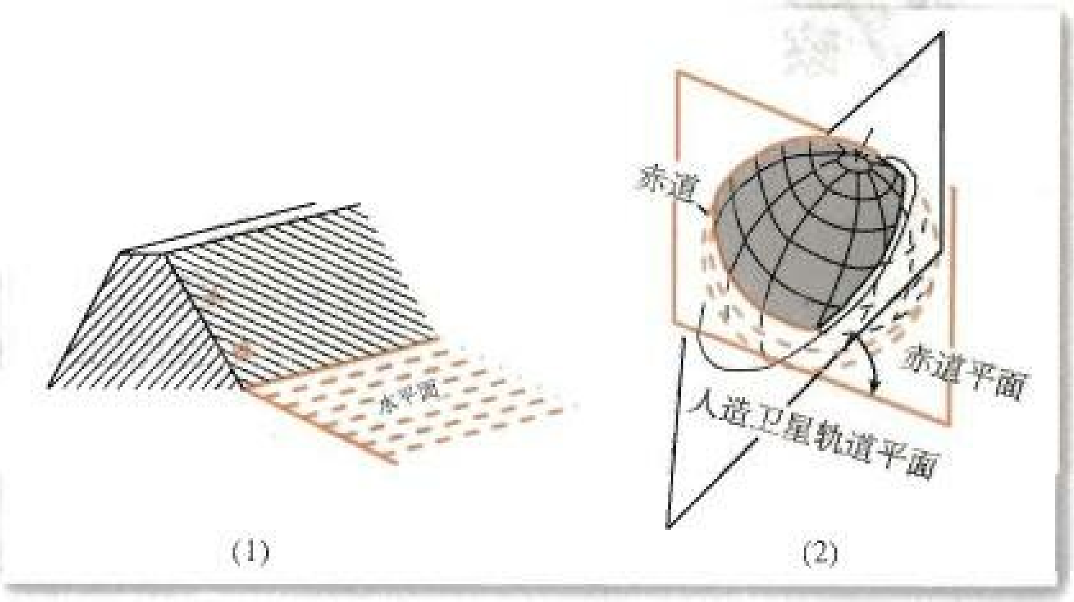


图 2.3-10

平面内的一条直线把平面分成两部分，这两部分通常称为半平面．

我们常说“把门开大一些”，是指哪个角大一些？我们应该怎样刻画二面角的大小呢？

如图 2.3-11，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**（dihedral angle）．这条直线叫做**二面角的棱**，这两个半平面叫做**二面角的面**．棱为 AB、面分别为 α，β 的二面角记作二面角 $\alpha\text{-}AB\text{-}\beta$．有时为了方便，也可在 α，β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 P，Q，将这个二面角记作二面角 $P\text{-}AB\text{-}Q$．如果棱记作 l，那么这个二面角记作二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 或 $P\text{-}l\text{-}Q$．

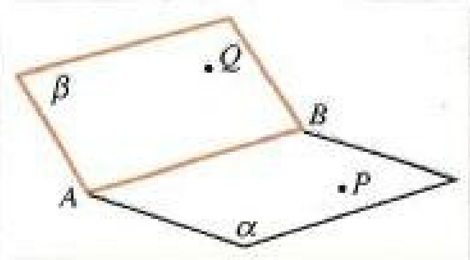


图 2.3-11

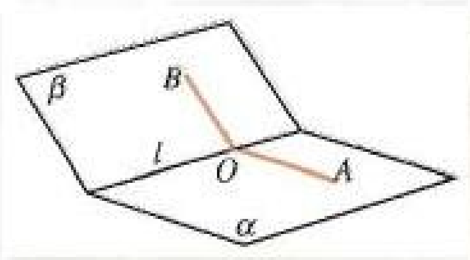


图 2.3-12

如图 2.3-12，在二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的棱 l 上任取一点 O，

∠AOB 的大小与点 O 在 l 上的位置有关吗？为什么？

以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的∠AOB 叫做**二面角的平面角**.

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 平面角是直角的二面角叫做直二面角.

观察

教室相邻的两个墙面与地面可以构成几个二面角？分别指出构成这些二面角的面、棱、平面角及其度数.

教室里的墙面所在平面与地面所在平面相交，它们所成的二面角是直二面角，我们常说墙面直立于地面上.

一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这**两个平面互相垂直**.

两个互相垂直的平面通常画成图 2.3-13 的样子，此时，把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直. 平面 α 与 β 垂直，记作 $\alpha\perp\beta$.

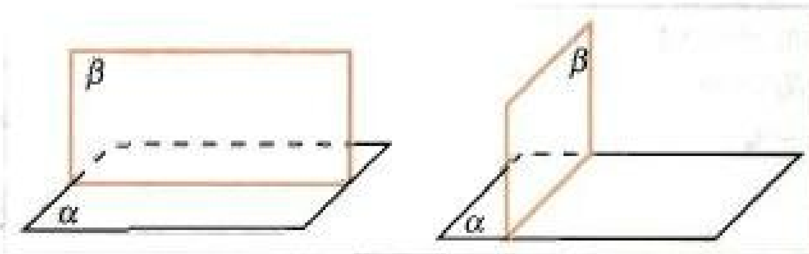


图 2.3-13

一般地，我们有下面判定两个平面互相垂直的定理.

定理 **一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直.**

这个定理说明，可以由直线与平面垂直证明平面与平面垂直.

例 3 如图 2.3-14，AB 是⊙O 的直径，PA 垂直于⊙O所在的平面，C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，求

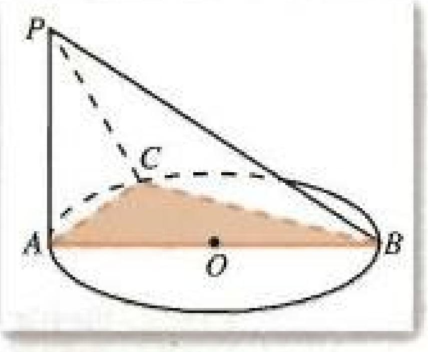


图 2.3-14

证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.

证明： 设⊙O 所在平面为 α，由已知条件，

$PA\perp\alpha$，BC 在 α 内，

所以 $PA\perp BC$.

因为点 C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，AB 是⊙O 的直径，

所以，$\angle BCA$ 是直角，即 $BC\perp AC$.

又因为 PA 与 AC 是 $\triangle PAC$ 所在平面内的两条相交直线，

所以，$BC\perp$ 平面 PAC.

又因为 BC 在平面 PBC 内，

所以，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.

探究

如图 2.3-15，已知 $AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，你能发现哪些平面互相垂直，为什么？

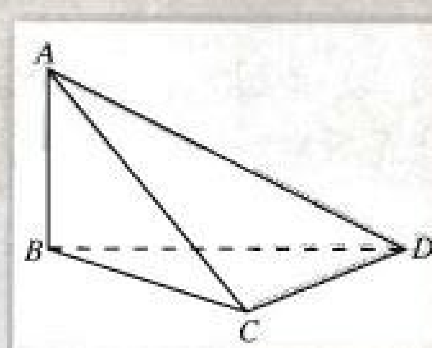


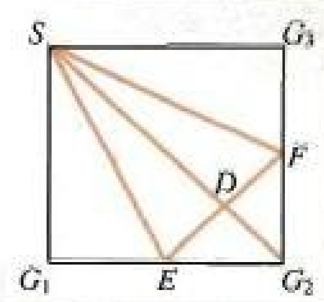
图 2.3-15

练习

如图，正方形 $SG_1G_2G_3$ 中，E，F 分别是 G_1G_2，G_2G_3 的中点，D 是 EF 的中点，现在沿 SE，SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1，G_2，G_3 三点重合，重合后的点记为 G，则在四面体 $S\text{-}EFG$ 中必有（　）

(A) $SG\perp\triangle EFG$ 所在平面　　(B) $SD\perp\triangle EFG$ 所在平面

(C) $GF\perp\triangle SEF$ 所在平面　　(D) $GD\perp\triangle SEF$ 所在平面



2.3.3 直线与平面垂直的性质

思考？

（1）如图 2.3-16，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，棱 AA'，BB'，CC'，DD' 所在直线都垂直于平面 $ABCD$，它们之间具有什么位置关系？

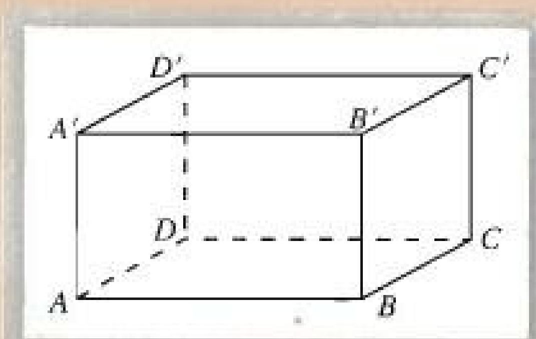


图 2.3-16

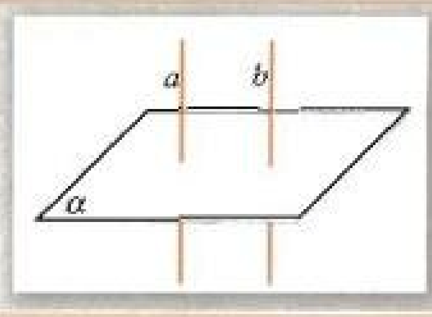


图 2.3-17

（2）如图 2.3-17，已知直线 a，b 和平面 α．如果 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，那么，直线 a，b 一定平行吗？

如图 2.3-18，假定 b 与 a 不平行，且 $b\cap\alpha=O$，b' 是经过点 O 与直线 a 平行的直线．直线 b 与 b' 确定平面 β，设 $\alpha\cap\beta=c$，则 $O\in c$．因为 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，所以 $a\perp c$，$b\perp c$，又因为 $b'/\!/a$，所以 $b'\perp c$．这样在平面 β 内，经过直线 c 上同一点 O 就有两条直线 b，b' 与 c 垂直，显然不可能．因此 $b/\!/a$．

由于无法把两条直线 a，b 归入到一个平面内，所以在定理的证明中，无法应用平行直线的判定知识，也无法应用公理 4．在这种情况下我们采用了“反证法”．

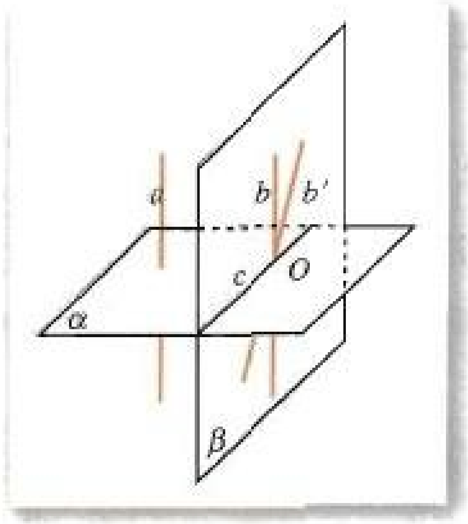


图 2.3-18

一般地，我们得到直线与平面垂直的性质定理．

定理 垂直于同一个平面的两条直线平行．

判定两条直线平行的方法很多，直线与平面垂直的性质

定理告诉我们，可以由两条直线与一个平面垂直判定两条直线平行. 直线与平面垂直的性质定理揭示了“平行”与“垂直”之间的内在联系.

探究

设直线 a，b 分别在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中两个不同的面所在平面内，欲使 $a\parallel b$，a，b 应满足什么条件？

练 习

1. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”.

(1) 垂直于同一条直线的两个平面互相平行. (　　)

(2) 垂直于同一个平面的两条直线互相平行. (　　)

(3) 一条直线在平面内，另一条直线与这个平面垂直，则这两条直线互相垂直. (　　)

2. 已知直线 a，b 和平面 α，且 $a\perp b$，$a\perp\alpha$，则 b 与 α 的位置关系是________.

2.3.4 平面与平面垂直的性质

思考？

(1) 黑板所在平面与地面所在平面垂直，你能否在黑板上画一条直线与地面垂直？

(2) 如图 2.3-19，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，平面 $A'ADD'$ 与平面 $ABCD$ 垂直，直线 $A'A$ 垂直于其交线 AD. 平面 $A'ADD'$ 内的直线 $A'A$ 与平面 $ABCD$ 垂直吗？

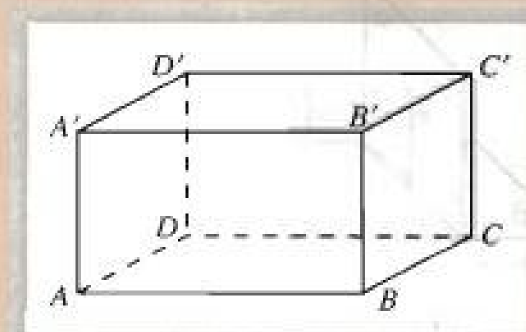


图 2.3-19

如图 2.3-20，设 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=CD$，$AB\subset\alpha$，$AB\perp CD$，且 $AB\cap CD=B$. 我们看直线 AB 与平面 β 的位置关系.

在 β 内引直线 $BE\perp CD$，垂足为 B，则 $\angle ABE$ 是二面角 $\alpha\text{-}CD\text{-}\beta$ 的平面角. 由 $\alpha\perp\beta$ 知，$AB\perp BE$. 又 $AB\perp CD$，BE

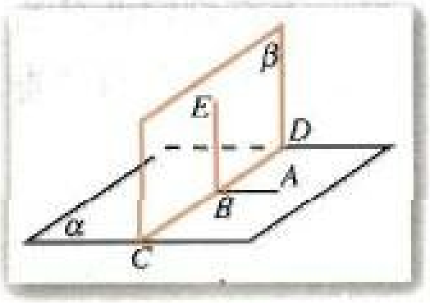


图 2.3-20

与 CD 是 β 内的两条相交直线，所以 $AB\perp\beta$.

一般地，我们得到平面与平面垂直的性质定理.

定理　两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

我们知道，可以通过直线与平面垂直判定平面与平面垂直. 平面与平面垂直的性质定理说明，由平面与平面垂直可以得到直线与平面垂直. 这种直线与平面的位置关系同平面与平面的位置关系的相互转化，是解决空间图形问题重要的思想方法.

思考

设平面 $\alpha\perp$ 平面 β，点 P 在平面 α 内，过点 P 作平面 β 的垂线 a，直线 a 与平面 α 具有什么位置关系？

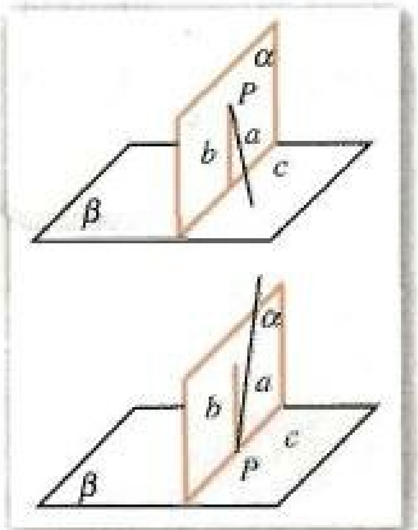


图 2.3-21

我们知道，过一点只能作一条直线与已知平面垂直. 因此，如果过一点有两条直线与平面垂直，那么这两条直线重合.

如图 2.3-21，设 $\alpha\cap\beta=c$，过点 P 在平面 α 内作直线 $b\perp c$，根据平面与平面垂直的性质定理有 $b\perp\beta$.

因为过一点有且只有一条直线与平面 β 垂直，所以直线 a 与直线 b 重合，因此 $a\subset\alpha$.

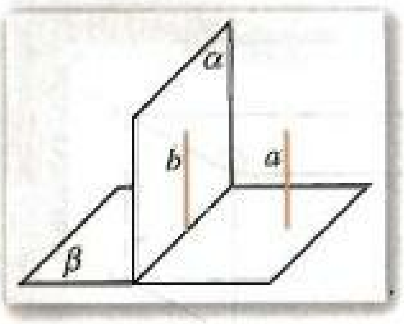


图 2.3-22

例 5　如图 2.3-22，已知平面 α，β，$\alpha\perp\beta$，直线 a 满足 $a\perp\beta$，$a\not\subset\alpha$，试判断直线 a 与平面 α 的位置关系.

解： 在 α 内作垂直于 α 与 β 交线的直线 b，

因为　$\alpha\perp\beta$，所以　$b\perp\beta$.

因为　$a\perp\beta$，所以　$a/\!/b$.

又因为　$a\not\subset\alpha$，所以　$a/\!/\alpha$.

即直线 a 与平面 α 平行.

探究

已知平面 α，β，直线 a，且 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=AB$，$a/\!/\alpha$，$a\perp AB$，试判断直线 a 与平面 β 的位置关系.

练　习

1. 下列命题中错误的是（　　）

(A) 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β，那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

(B) 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β，那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β

(C) 如果平面 α 不垂直于平面 β，那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β

(D) 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 γ，平面 $\beta\perp$ 平面 γ，$\alpha\cap\beta=l$，那么 $l\perp\gamma$

2. 已知两个平面垂直，下列命题

① 一个平面内已知直线必垂直于另一个平面内的任意一条直线.

② 一个平面内的已知直线必垂直于另一个平面的无数条直线.

③ 一个平面内的任一条直线必垂直于另一个平面.

④ 过一个平面内任意一点作交线的垂线，则此垂线必垂直于另一个平面.

其中正确命题的个数是（　　）

(A) 3　　　(B) 2　　　(C) 1　　　(D) 0

习题 2.3

A 组

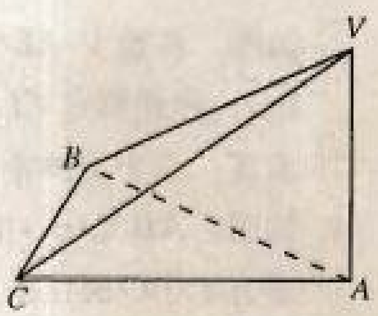
1. 判断下列命题是否正确，正确的说明理由，错误的举例说明：

(1) 平面 $\alpha\perp$ 平面 β，平面 $\beta\perp$ 平面 $\gamma\Rightarrow$ 平面 $\alpha\perp$ 平面 γ；

(2) 平面 α//平面 α_1，平面 β//平面 β_1，平面 $\alpha\perp$ 平面 $\beta\Rightarrow$ 平面 $\alpha_1\perp$ 平面 β_1.

2. 已知平面 α，β，γ，且 $\alpha\perp\gamma$，$\beta/\!/\alpha$，求证：$\beta\perp\gamma$.

3. 如图，在三棱锥 V-ABC 中，$\angle VAB=\angle VAC=\angle ABC=90^\circ$，试判断平面 VBA 与平面 VBC 的位置关系，并说明理由.

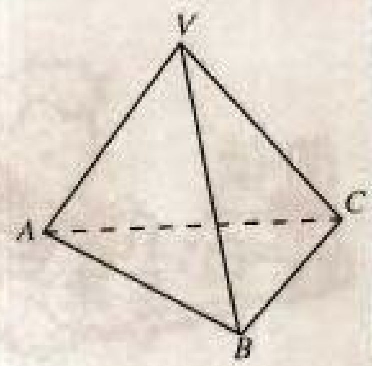


（第 3 题）

4. 如图，三棱锥 V-ABC 中，$VA=VB=AC=BC=2$，$AB=2\sqrt{3}$，$VC=1$，试画出二面角 V-AB-C 的平面角，并求它的度数.

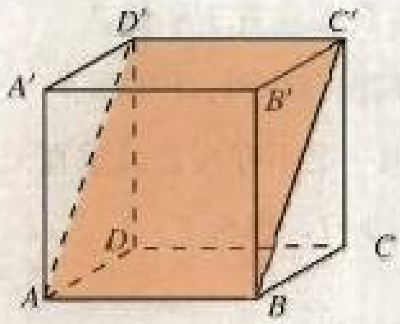
5. 已知平面 α，β，γ 满足 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，$\alpha\cap\beta=l$，求证：$l\perp\gamma$.

6. 求证：如果共点的三条直线两两垂直，那么它们中每两条直线确定的平面也两两垂直.

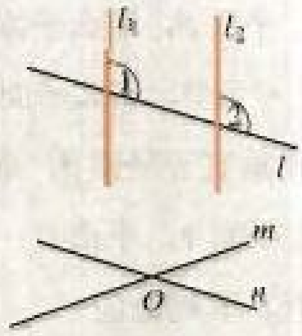


（第 4 题）

7. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，平面 $ABC'D'$ 与正方体的其他各个面所成二面角的大小分别是多少？



（第 7 题）



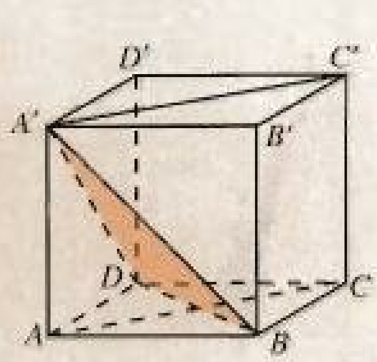
（第 8 题）

8. 如图，m，n 是两条相交直线，l_1，l_2 是与 m，n 都垂直的两条直线，且直线 l 与 l_1，l_2 都相交，求证：$\angle 1=\angle 2$.

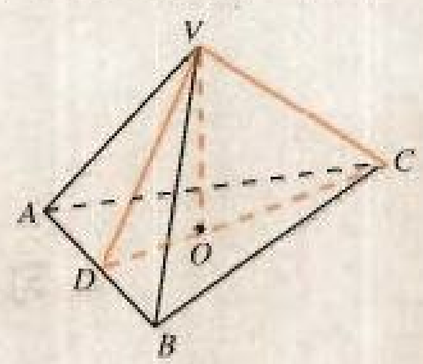
9. 求证：两条平行线和同一个平面所成的角相等.

B 组

1. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求证：平面 $ACC'A'\perp$ 平面 $A'BD$.



（第 1 题）

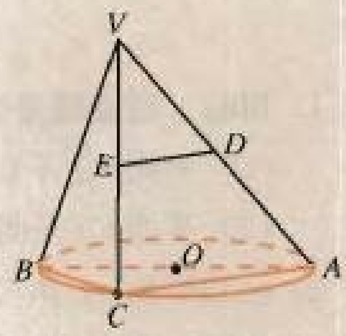


（第 2 题）

2. 如图，棱锥 $V\text{-}ABC$ 中，$VO\perp$ 平面 ABC，$O\in CD$，$VA=VB$，$AD=BD$，你能判定 $CD\perp AB$ 以及 $AC=BC$ 吗？

3. 求证：三个两两垂直的平面的交线也两两垂直.

4. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 是⊙O 上的动点，过动点 C 的直线 VC 垂直于⊙O 所在平面，D，E 分别是 VA，VC 的中点. 试判断直线 DE 与平面 VBC 的位置关系，并说明理由.



（第 4 题）

欧几里得《原本》与公理化方法

古希腊最为重要的数学著作几何《原本》（简称《原本》）是由古希腊数学家欧几里得

(Euclid，前 330—前 275) 编著，大约在公元前 300 年左右完成的. 欧几里得将公元前 7 世纪以来希腊几何学家积累起来的丰富成果整理、收集起来，并且加以系统化. 他从少数已被经验反复验证的公理出发，运用逻辑推理以及数学运算方法演绎出一系列定理与推论，写成了十三卷在数学发展史上具有极其深远影响的数学巨著《原本》，使几何学成为一门独立的、演绎的科学.

欧几里得

欧几里得《原本》是一部划时代的著作，其伟大的历史意义是它在人类数学史中第一次给出了公理化的数学体系. 过去所积累下来的数学知识，是零碎的、片断的. 欧几里得借助逻辑方法，把这些知识组织起来，加以分类、比较，揭示彼此间的内在联系，整理在一个严密的系统之中. 《原本》体现了这种理性精神，它对整个数学的发展产生深远的影响. 正因为如此，《原本》得以跨越地域、民族、语言、时间的一切障碍传播到了整个世界. 公理化方法作为一种理论形式为人们普遍接受. 人们现在已普遍建立了这样的认识，所有的数学理论，都必须按照数学的定义、公理与三段论的逻辑论证来组织. 《原本》为数学发展树起一面旗帜，并成为理性思维的象征.

什么是公理化方法呢？

数学公理化方法，就是从尽可能少的原始概念（基本概念）和尽可能少的一组不加证明的原始命题（公理、公设）出发，应用严格的逻辑推理，推导出其余的命题，使某一数学分支成为演绎系统的一种方法.

基本概念是一些不加定义的原始概念，它们必须是真正基本的，无法用更原始、更基本的概念去定义的. 如中学数学中的点、直线、平面、集合等概念都是基本概念.

公理是对基本概念间的相互关系和基本性质所作的一种阐述和规定. 如“过两点至少有一条直线”“经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面”等都是作为公理的命题.

公理化方法主要有以下三个作用：

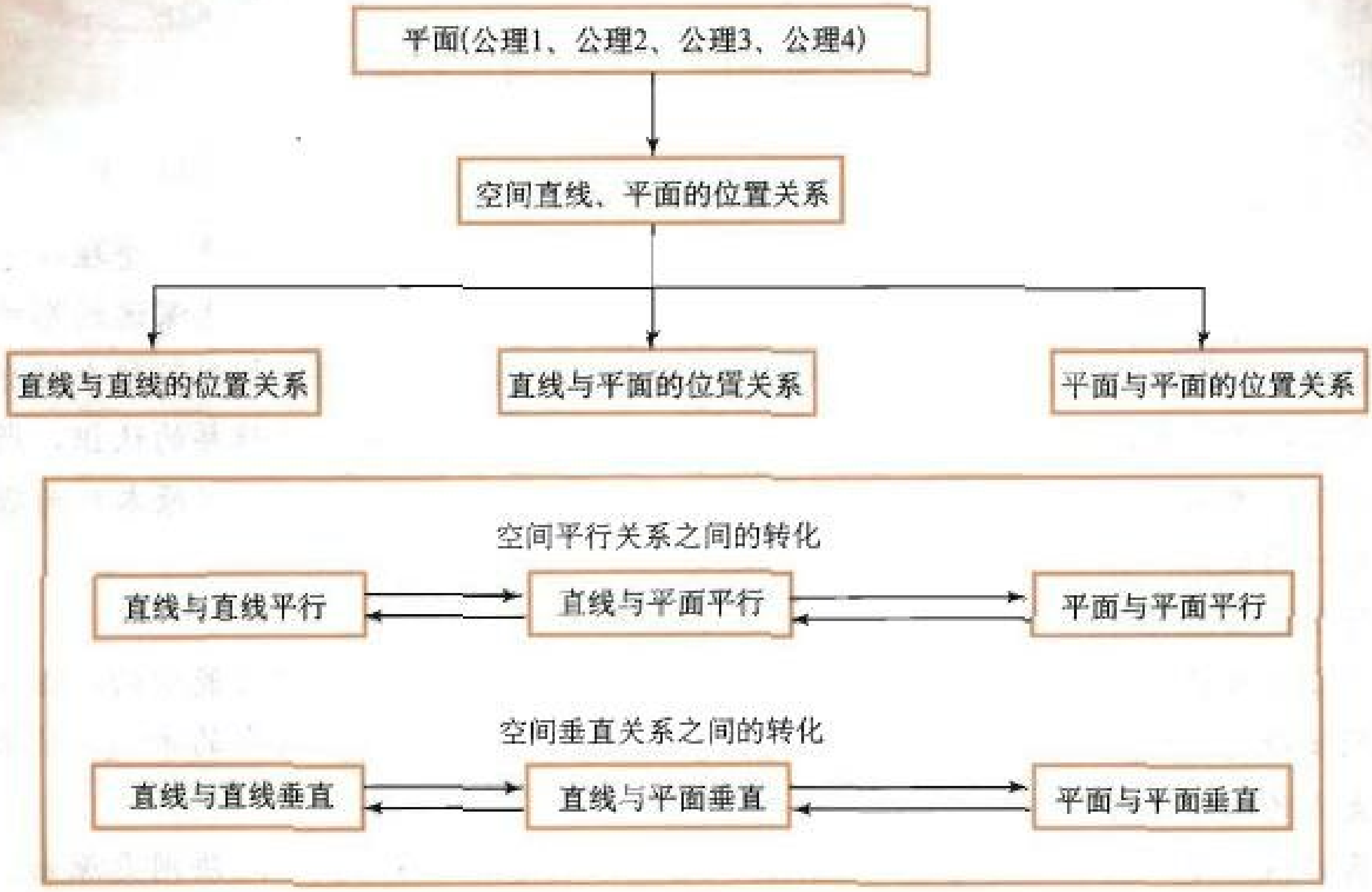
(1) 概括整理数学知识. 《原本》就是欧几里得用公理化的方法把零散的几何知识归为一体，树立了以公理化方法研究数学的典范.

(2) 促进新理论的创立. 由于公理化方法把数学分支的基础分析得十分清楚，结构严谨有序，这就有利于比较数学各分支实质上的异同，从而推动和促进数学新理论的产生，促进数学基础的研究与探索. 例如，非欧几何就是在研究和应用公理化的过程中产生的.

(3) 对其他学科有示范作用. 由于数学公理化方法表述数学理论的简捷性、条理性，以及结构的和谐性，为其他科学理论的表述起了示范作用. 其他科学纷纷效法，建立了自己的公理化系统.

小 结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

1. 刻画平面的三个公理是立体几何公理体系的基石，是研究空间图形、进行逻辑推理的基础．公理 1 是判定直线是否在平面内的依据；公理 2 提供了确定平面最基本的依据；公理 3 是判定两个平面交线位置的依据．

公理 4 是判断空间直线之间平行关系的一个依据．

2. 空间图形问题经常转化为平面问题．“确定平面”是将空间问题转化为平面问题的重要条件，而这种转化又是空间图形中解决部分问题的重要思想方法．这种转化最基本的依据就是四个公理．

3. 本章的核心是空间中点、直线、平面之间的位置关系．从知识结构上看，在平面基本性质的基础上，由易到难顺序研究直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系．我们利用直线与直线的位置关系，研究直线与平面的位置关系，利用直线与平面的位置关系研究平面与平面的位置关系．

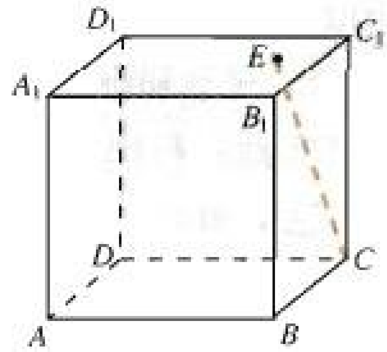
反过来，由平面与平面位置关系可进一步掌握直线与平面的位置关系，由直线与平面、平面与平面的位置关系又可进一步确定直线与直线的位置关系．这种方法，是我们研究与解决空间直线、平面位置关系的重要方法．

4．“平行”和“垂直”是直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系中两种最重要的位置关系．请思考，在空间中如何实现平行关系之间的转化、垂直关系之间的转化以及垂直与平行关系之间的转化？

5．观察和推理是我们认识世界的两种重要途径，两者相辅相成，缺一不可．由观察（实践）归纳出一些事实（如公理），在此基础上，从这些事实出发，运用逻辑推理的方法，推导、证明一些新的事实．

复习参考题

A 组

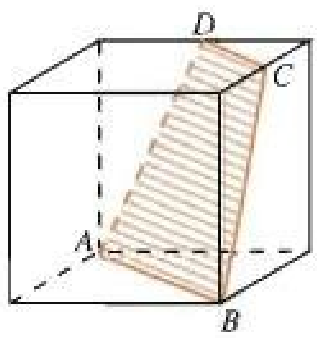


（第 2 题）

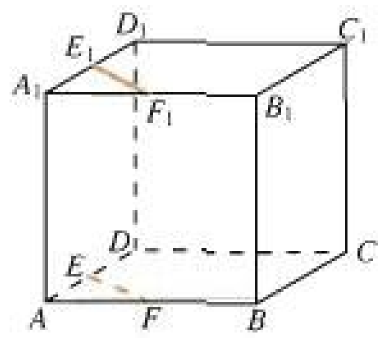
1. 三个平面可将空间分成几部分？你能画出它们的直观图吗？
2. 如图，一块正方体形木料的上底面有一点 E，经过点 E 在上底面上画一条直线与 CE 垂直，怎样画？
3. 证明：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一个平面内.
4. 如图，正方体的棱长是 a，C，D 分别是两条棱的中点.

   （1）证明四边形 $ABCD$（图中阴影部分）是一个梯形；

   （2）求四边形 $ABCD$ 的面积.

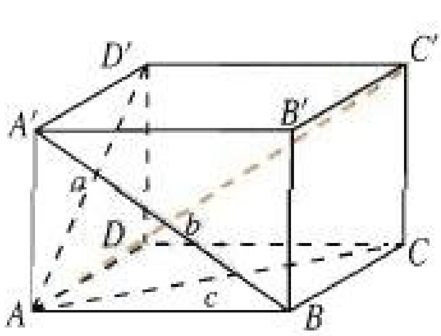


（第 4 题）

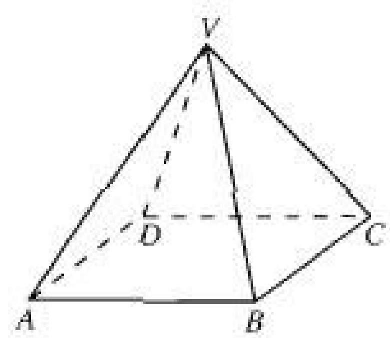


（第 5 题）

5. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AE=A_1E_1$，$AF=A_1F_1$，求证 $EF /\!/ E_1F_1$，且 $EF=E_1F_1$.
6. 如图，长方体的三个面的对角线长分别是 a，b，c，求长方体对角线 AC' 的长.

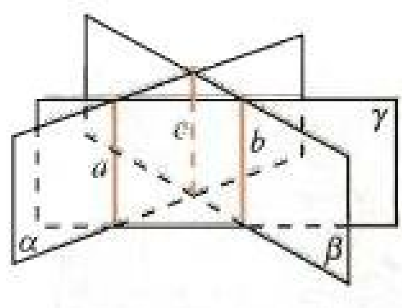


（第 6 题）



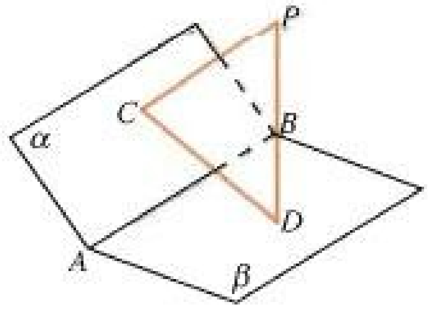
（第 7 题）

7. 如图，四棱锥 $V\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，其他四个侧面都是侧棱长为 $\sqrt{5}$ 的等腰三角形，试画出二面角 $V\text{-}AB\text{-}C$ 的平面角，并求它的度数.
8. 已知 α，β，γ 是三个平面，且 $\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=c$，且 $a\cap b=O$. 求证 a，b，c 三线共点.
9. 如图，平面 α，β，γ 两两相交，a，b，c 为三条交线，且 $a /\!/ b$. 那么，a 与 c，b 与 c 有什么关系？为什么？



（第 9 题）

10. 如图，已知平面 α，β，且 $\alpha\cap\beta=AB$，$PC\perp\alpha$，$PD\perp\beta$，C，D 是垂足，试判断直线 AB 与 CD 的位置关系？并证明你的结论.



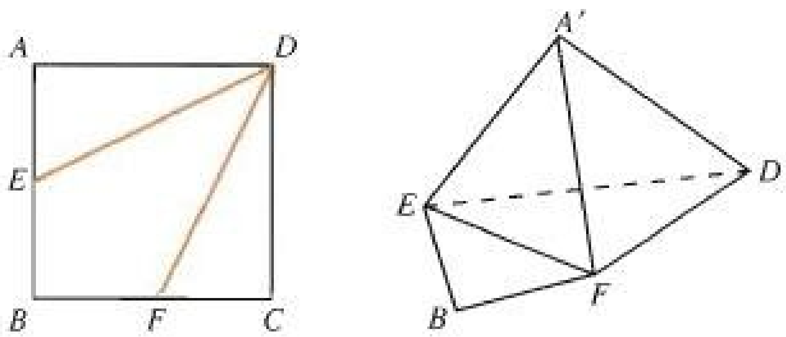
（第 10 题）

B 组

1. 如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，

（1）点 E 是 AB 的中点，点 F 是 BC 的中点，将 $\triangle AED$，$\triangle DCF$ 分别沿 DE，DF 折起，使 A，C 两点重合于点 A'．求证：$A'D\perp EF$.

（2）当 $BE=BF=\frac{1}{4}BC$ 时，求三棱锥 A'-EFD 的体积.

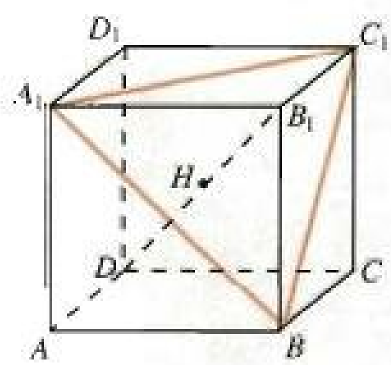


（第 1 题）

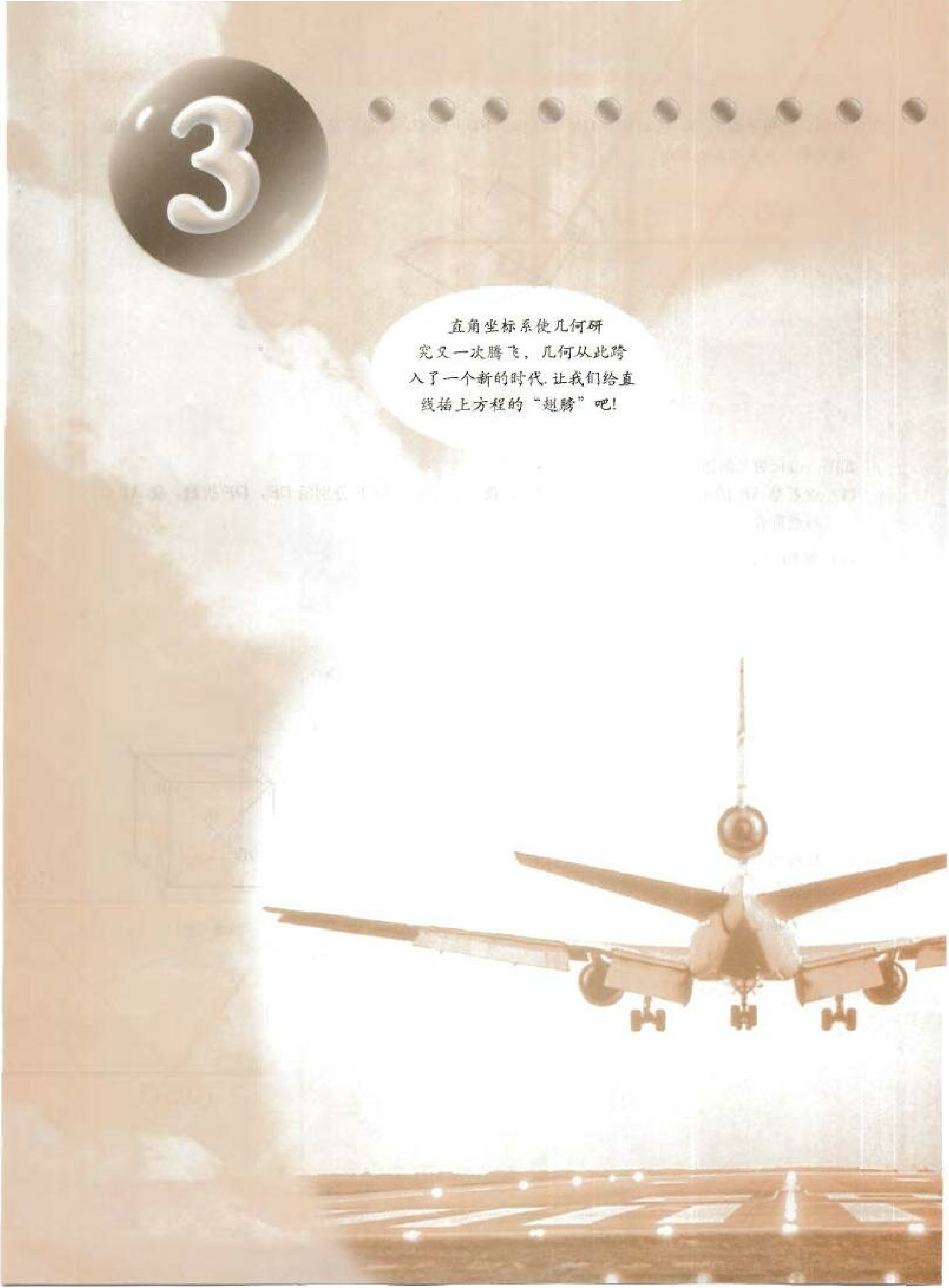
2. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：

（1）$B_1D\perp$ 平面 A_1C_1B；

（2）B_1D 与平面 A_1C_1B 的交点 H 是 $\triangle A_1C_1B$ 的重心（三角形三条中线的交点）.



（第 2 题）


3
直角坐标系使几何研究又一次腾飞，几何从此跨入了一个新的时代.让我们给直线插上方程的“翅膀”吧!

第三章 直线与方程

在几何问题研究中，我们常常直接依据几何图形中点、直线、平面的关系研究几何图形的性质. 现在，我们采用另外一种研究方法：坐标法. 坐标法是以坐标系为桥梁，把几何问题转化成代数问题，通过代数运算研究几何图形性质的方法. 它是解析几何中最基本的研究方法.

本章首先在平面直角坐标系中，建立直线的方程. 然后通过方程，研究直线的有关性质，如平行、垂直、两条直线的交点、点到直线的距离等.

解析几何是17世纪法国数学家笛卡儿和费马创立的. 解析几何的创立是数学发展史上的一个里程碑，数学从此由常量数学进入变量数学时期. 解析几何由此成为近代数学的基础之一.

CHAPTER 3

3.1 直线的倾斜角与斜率

在平面直角坐标系中，点用坐标表示，直线如何表示呢？为了用代数方法研究直线的有关问题，本节首先探索确定直线位置的几何要素，然后在坐标系中用代数方法把这些几何要素表示出来.

3.1.1 倾斜角与斜率

思考？

对于平面直角坐标系内的一条直线 l（图 3.1-1），它的位置由哪些条件确定呢？

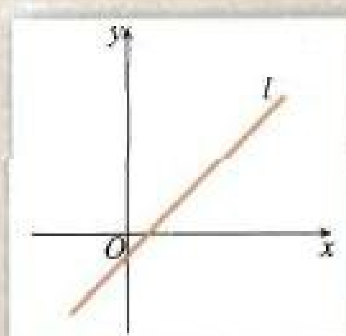


图 3.1-1

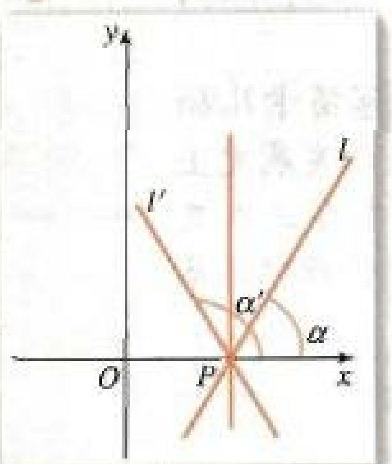


图 3.1-2

我们知道，两点确定一条直线．一点能确定一条直线的位置吗？已知直线 l 经过点 P，直线 l 的位置能够确定吗？

过一点 P 可以作无数条直线 l_1，l_2，l_3……它们都经过点 P（组成一个直线束），这些直线区别在哪里呢？

容易看出，它们的倾斜程度不同．怎样描述直线的倾斜程度呢？

当直线 l 与 x 轴相交时，我们取 x 轴作为基准，x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的**倾斜角**(angle of inclination)．图 3.1-2 中直线 l 的倾斜角 α 为锐角，直线 l' 的倾斜角 α' 为钝角．当直线 l 与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 $0°$．因此，直线的倾斜角 α 的取值范

围为

$$0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ.$$

这样，平面直角坐标系内每一条直线都有一个确定的倾斜角 α，且倾斜程度相同的直线，其倾斜角相等；倾斜程度不同的直线，其倾斜角不相等．因此，我们可用倾斜角 α 表示平面直角坐标系内一条直线的倾斜程度．

如上所述，在平面直角坐标系中，已知直线上的一个点不能确定一条直线的位置．同样，已知直线的倾斜角 α，也不能确定一条直线的位置．但是，直线上的一点和这条直线的倾斜角可以惟一确定一条直线．因此，确定平面直角坐标系中一条直线位置的几何要素是：直线上的一个定点以及它的倾斜角，二者缺一不可．

思考？日常生活中，还有没有表示倾斜程度的量？

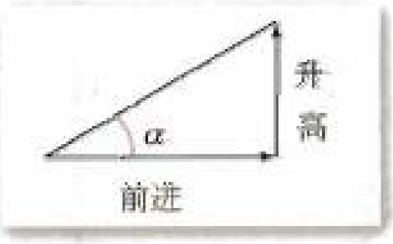


图 3.1-3

如图 3.1-3，日常生活中，我们经常用“升高量与前进量的比”表示倾斜面的“坡度”（倾斜程度），即

$$\text{坡度(比)}=\frac{\text{升高量}}{\text{前进量}}.$$

例如，“进 2 升 3”与“进 2 升 2”比较，前者更陡一些，因为坡度（比）$\frac{3}{2}>\frac{2}{2}$.

如果我们使用“倾斜角”这个概念，那么这里的“坡度（比）”实际就是“倾斜角 α 的正切”．我们把一条直线的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的**斜率**（slope）．斜率常用小写字母 k 表示，即

$$\boxed{k=\tan\alpha.}$$

当 α 是锐角时，$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$.

例如，倾斜角 $\alpha=45^\circ$时，这条直线的斜率

$$k=\tan 45^\circ=1;$$

倾斜角 $\alpha=135^\circ$时，由 $\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ$，得

$$k=\tan 135^\circ=-\tan 45^\circ=-1,$$

即这条直线的斜率为-1.

倾斜角是 90°的直线没有斜率．

倾斜角 α 不是 90° 的直线都有斜率，倾斜角不同，直线的斜率也不同. 因此，我们可以用斜率表示直线的倾斜程度.

下面我们探究如何由直线上两点的坐标计算直线的斜率.

给定两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$x_1 \neq x_2$，我们求直线 P_1P_2 的斜率 k.

如图 3.1-4(1)，(2)，设直线 P_1P_2 的倾斜角为 α（$\alpha \neq 90^\circ$），当直线 P_1P_2 的方向（即从 P_1 指向 P_2 的方向）向上时，过点 P_1 作 x 轴的平行线，过点 P_2 作 y 轴的平行线，两线相交于点 Q，于是点 Q 的坐标为(x_2, y_1).

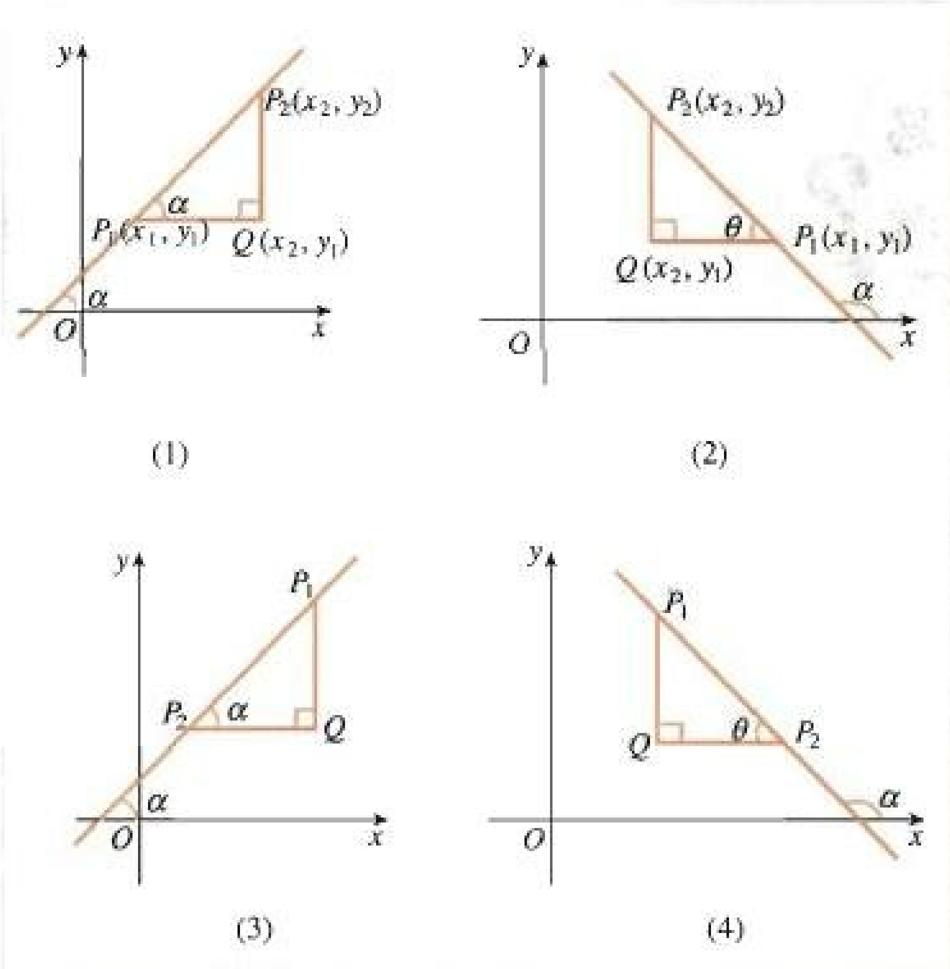


图 3.1-4

如图 3.1-4(1)，当 α 为锐角时，$\alpha = \angle QP_1P_2$，$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$. 在 $\text{Rt}\triangle P_1P_2Q$ 中，

$$\tan \alpha = \tan \angle QP_1P_2 = \frac{|QP_2|}{|P_1Q|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

如图 3.1-4(2)，当 α 为钝角时，$\alpha = 180^\circ - \theta$（设 $\angle QP_1P_2 = \theta$），$x_1 > x_2$，$y_1 < y_2$.

$$\tan \alpha = \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1P_2Q$ 中，

$$\tan\theta=\frac{|QP_2|}{|QP_1|}=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

于是可得

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

即

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

同样，当 P_2P_1 的方向向上时，如图 3.1-4(3)，(4)，也有

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

即

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

思考？

当直线 P_1P_2 与 x 轴平行或重合时，上述式子还成立吗？为什么？

综上所述，我们得到经过两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ 的直线的斜率公式

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

思考？

(1) 已知直线上两点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$，运用上述公式计算直线 AB 的斜率时，与 A，B 两点坐标的顺序有关吗？

(2) 当直线平行于 y 轴，或与 y 轴重合时，上述公式还适用吗？为什么？

例 1 如图 3.1-5，已知 $A(3,\ 2)$，$B(-4,\ 1)$，$C(0,\ -1)$，求直线 AB，BC，CA 的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角还是钝角.

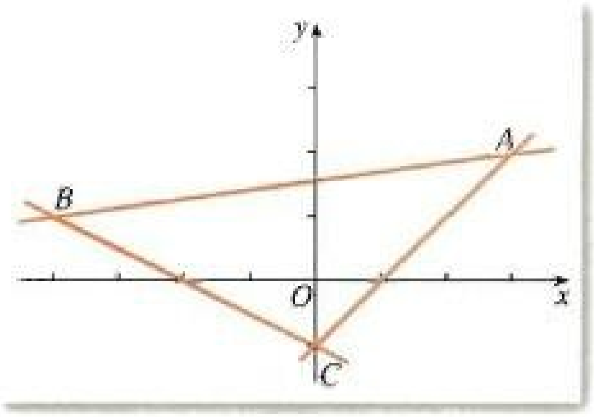


图 3.1-5

解： 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{1-2}{-4-3}=\dfrac{1}{7}$；

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\dfrac{-1-1}{0-(-4)}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$；

直线 CA 的斜率 $k_{CA}=\dfrac{-1-2}{0-3}=\dfrac{-3}{-3}=1$.

由 $k_{AB}>0$ 及 $k_{CA}>0$ 知，直线 AB 与 CA 的倾斜角均为锐角；由 $k_{BC}<0$ 知，直线 BC 的倾斜角为钝角.

例 2 在平面直角坐标系中，画出经过原点且斜率分别为 1，-1，2 及 -3 的直线 l_1，l_2，l_3 及 l_4.

分析： 要画出过原点的直线 l_1，只须再找出位于 l_1 上的某一点 A_1 来，A_1 的坐标可以由 OA_1 的斜率确定.

解： 设 $A_1(x_1, y_1)$ 是直线 l_1 上的一点，根据斜率公式有

$$1=\frac{y_1-0}{x_1-0},$$

即 $x_1=y_1$.

设 $x_1=1$，则 $y_1=1$，于是 A_1 的坐标是 $(1, 1)$. 过原点及 $A_1(1, 1)$ 的直线即为 l_1，如图 3.1-6.

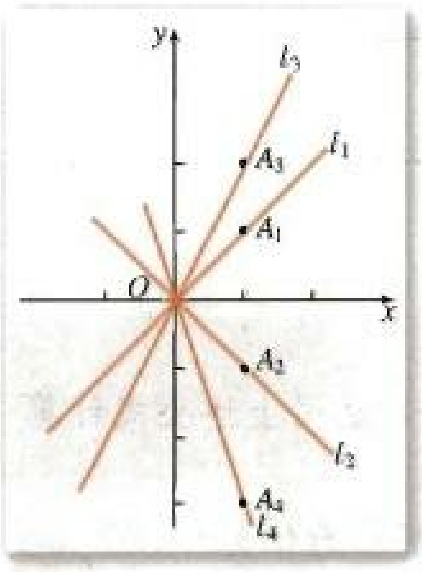


图 3.1-6

同理，由 $-1=\dfrac{y_2-0}{x_2-0}$，得 $y_2=-x_2$. 设 $x_2=1$，则 $y_2=-1$. 于是得直线 l_2 上的一点 A_2 的坐标为 $(1, -1)$. 过原点及 $A_2(1, -1)$ 的直线即为 l_2.

同理可知，l_3 是过原点及 $A_3(1, 2)$ 的直线，l_4 是过原点及 $A_4(1, -3)$ 的直线.

练　习

1. 已知下列直线的倾斜角，求直线的斜率：

(1) $\alpha=30°$；　(2) $\alpha=45°$；　(3) $\alpha=120°$；　(4) $\alpha=135°$.

2. 求经过下列两点直线的斜率，并判断其倾斜角是锐角还是钝角：

(1) $C(18,8)$，$D(4,-4)$；

(2) $P(0,0)$，$Q(-1,\sqrt{3})$.

3. 已知 a，b，c 是两两不等的实数，求经过下列两点直线的倾斜角：

(1) $A(a,c)$，$B(b,c)$；

(2) $C(a,b)$，$D(a,c)$；

(3) $P(b,b+c)$，$Q(a,c+a)$.

4. 画出经过点 $(0,2)$，且斜率分别为 2 与 -2 的直线.

3.1.2　两条直线平行与垂直的判定

我们约定：若没有特别说明，说“两条直线 l_1 和 l_2”时，一般是指两条不重合的直线.

为了在平面直角坐标系内表示直线的倾斜程度，我们引入了直线倾斜角的概念，进而又引入了直线的斜率——表示直线相对于 x 轴的倾斜程度，并导出了计算斜率的公式，即把几何问题转化为代数问题. 那么，我们能否通过直线的斜率，来判断两条直线的位置关系呢？

设两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2.

思考

$l_1 /\!/ l_2$ 时，k_1 与 k_2 满足什么关系？

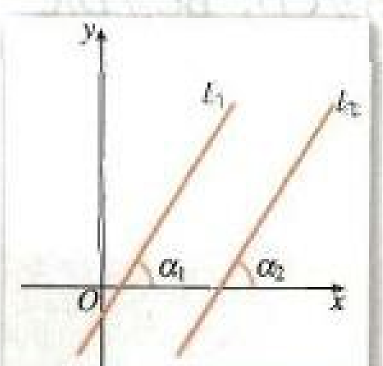


图 3.1-7

若 $l_1 /\!/ l_2$，则 l_1 与 l_2 的倾斜角 α_1 与 α_2 相等，如图 3.1-7. 由 $\alpha_1=\alpha_2$，可得 $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，即 $k_1=k_2$. 因此

$$若\ l_1 /\!/ l_2，则\ k_1=k_2.$$

反之，若 $k_1=k_2$，则 $l_1 /\!/ l_2$.

于是我们得到，对于两条不重合的直线 l_1，l_2，其斜率分别为 k_1，k_2，有

$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.}$$

请注意：若直线 l_1 和 l_2 可能重合时，我们得到

$$k_1=k_2 \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 /\!/ l_2, \\ \text{或 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合.} \end{cases}$$

例如，用斜率证明三个点共线时，就需要用到这个结论.

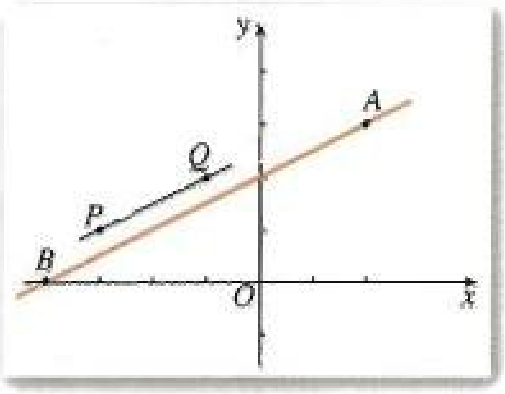


图 3.1-8

例 3 已知 $A(2,3)$，$B(-4,0)$，$P(-3,1)$，$Q(-1,2)$，试判断直线 BA 与 PQ 的位置关系，并证明你的结论.

解： 如图 3.1-8，

直线 BA 的斜率 $k_{BA}=\dfrac{3-0}{2-(-4)}=\dfrac{1}{2}$，

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{2-1}{-1-(-3)}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $k_{BA}=k_{PQ}$，所以直线 $BA /\!/ PQ$.

例 4 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点分别为 $A(0,0)$，$B(2,-1)$，$C(4,2)$，$D(2,3)$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状，并给出证明.

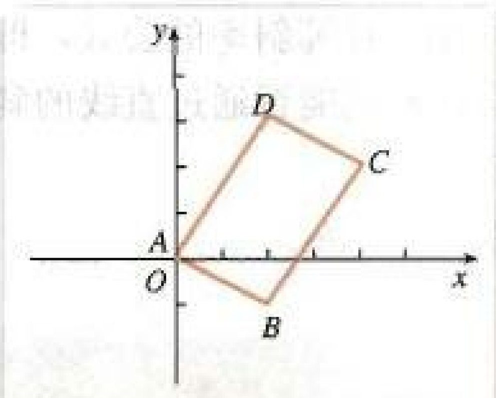


图 3.1-9

解： 如图 3.1-9，

AB 边所在直线的斜率 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，

CD 边所在直线的斜率 $k_{CD}=-\dfrac{1}{2}$，

BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=\dfrac{3}{2}$，

DA 边所在直线的斜率 $k_{DA}=\dfrac{3}{2}$.

因为 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{BC}=k_{DA}$，所以 $AB /\!/ CD$，$BC /\!/ DA$.

因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

思考

$l_1 \perp l_2$ 时，k_1 与 k_2 满足什么关系？

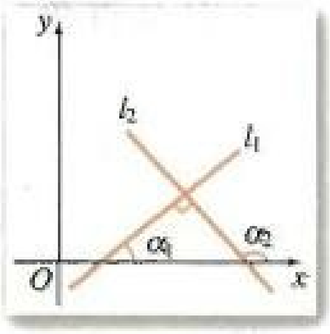


图 3.1-10

设两条直线 l_1 与 l_2 的倾斜角分别为 α_1 与 α_2（α_1，$\alpha_2 \neq 90°$）.

如图3.1-10，如果 $l_1 \perp l_2$，这时 $\alpha_1 \neq \alpha_2$（为什么?）. 由三角形任一外角等于其不相邻两内角之和，即

$$\alpha_2 = 90° + \alpha_1.$$

因为 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $\alpha_2 \neq 90°$（为什么?），由

$$\tan \alpha_2 = \tan(90° + \alpha_1) = -\frac{1}{\tan \alpha_1},$$

得

$$k_1 k_2 = -1.$$

$\tan(90° + \alpha) = -\frac{1}{\tan \alpha}$.

探究

当 $k_1k_2=-1$ 时，l_1 与 l_2 的位置关系如何?

由上我们得到，如果两条直线都有斜率，且它们互相垂直，那么它们的斜率之积等于 -1；反之，如果它们的斜率之积等于 -1，那么它们互相垂直. 即

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.}$$

例 5　已知 $A(-6, 0)$，$B(3, 6)$，$P(0, 3)$，$Q(6, -6)$，试判断直线 AB 与 PQ 的位置关系.

解： 直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{2}{3}$，

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = -\frac{3}{2}$.

由于 $k_{AB} k_{PQ} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$，

所以直线 $AB \perp PQ$.

例 6　已知 $A(5, -1)$，$B(1, 1)$，$C(2, 3)$三点，试判断$\triangle ABC$的形状.

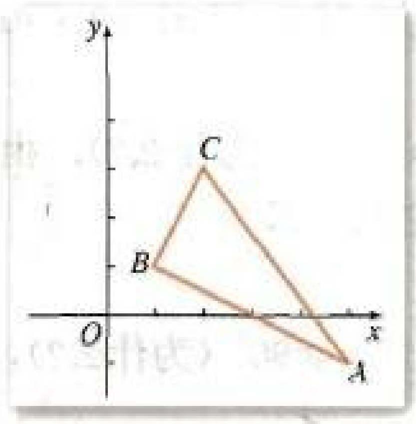


图 3.1-11

分析：如图 3.1-11，猜想 $AB\perp BC$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

解：AB 边所在直线的斜率 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，

BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=2$.

由 $k_{AB}k_{BC}=-1$，得 $AB\perp BC$，即 $\angle ABC=90°$.

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

练 习

1. 判断下列各对直线平行还是垂直：

   (1) 经过两点 $A(2,\ 3)$，$B(-1,\ 0)$ 的直线 l_1，与经过点 $P(1,\ 0)$ 且斜率为 1 的直线 l_2；

   (2) 经过两点 $C(3,\ 1)$，$D(-2,\ 0)$ 的直线 l_3，与经过点 $M(1,\ -4)$ 且斜率为 -5 的直线 l_4.

2. 试确定 m 的值，使过点 $A(m,\ 1)$，$B(-1,\ m)$ 的直线与过点 $P(1,\ 2)$，$Q(-5,\ 0)$ 的直线

   (1) 平行；　　(2) 垂直.

习题3.1

A 组

1. 已知直线斜率的绝对值等于 1，求直线的倾斜角.
2. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2,\ 3)$，$B(1,\ -1)$，$C(-1,\ -2)$，$D(-2,\ 2)$，求四边形 $ABCD$ 的四条边所在直线的斜率.
3. 已知直线的斜率 $k=2$，$A(3,\ 5)$，$B(x,\ 7)$，$C(-1,\ y)$ 是这条直线上的三个点，求 x 和 y 的值.
4. (1) m 为何值时，经过两点 $A(-m,\ 6)$，$B(1,\ 3m)$ 的直线的斜率是 12?

   (2) m 为何值时，经过两点 $A(m,\ 2)$，$B(-m,\ -2m-1)$ 的直线的倾斜角是 $60°$?
5. 已知 $A(1,\ 2)$，$B(-1,\ 0)$，$C(3,\ 4)$ 三点，这三点是否在同一条直线上，为什么?
6. 判断下列各小题中的不同直线 l_1 与 l_2 是否平行：

   (1) l_1 的斜率为 2，l_2 经过点 $A(1,\ 2)$，$B(4,\ 8)$；

   (2) l_1 经过点 $P(3,\ 3)$，$Q(-5,\ 3)$，l_2 平行于 x 轴，但不经过 P，Q 两点；

   (3) l_1 经过点 $M(-1,\ 0)$，$N(-5,\ -2)$，l_2 经过点 $R(-4,\ 3)$，$S(0,\ 5)$.

7. 判断下列各小题中的每对直线是否垂直：

(1) l_1 的斜率为$-\frac{2}{3}$，l_2 经过点 $A(1, 1)$，$B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$；

(2) l_1 的倾斜角为 45°，l_2 经过点 $P(-2, -1)$，$Q(3, -6)$；

(3) l_1 经过点 $M(1, 0)$，$N(4, -5)$，l_2 经过点 $R(-6, 0)$，$S(-1, 3)$.

8. 已知 $A(1, -1)$，$B(2, 2)$，$C(3, 0)$三点，求点 D 的坐标，使直线$CD\perp AB$，且 $CB/\!/AD$.

B 组

1. 已知点 $M(2, 2)$和 $N(5, -2)$，点 P 在 x 轴上，且$\angle MPN$ 为直角，求点 P 的坐标.
2. l_1 经过点 $A(m, 1)$，$B(-3, 4)$，l_2 经过点 $C(1, m)$，$D(-1, m+1)$，当直线 l_1 与 l_2：(1) 平行；(2) 垂直时，分别求 m 的值.
3. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点为 $A(2, 2+2\sqrt{2})$，$B(-2, 2)$，$C(0, 2-2\sqrt{2})$，$D(4, 2)$，求证：四边形 $ABCD$ 为矩形.
4. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点为 $A(m, n)$，$B(6, 1)$，$C(3, 3)$，$D(2, 5)$，求 m 和 n 的值，使四边形 $ABCD$ 为直角梯形.
5. 过两点 $A(m^2+2, m^2-3)$，$B(3-m-m^2, 2m)$的直线 l 的倾斜角为 45°，求 m 的值.
6. 经过点 $P(0, -1)$作直线 l，若直线 l 与连接 $A(1, -2)$，$B(2, 1)$的线段总有公共点，找出直线 l 的倾斜角 α 与斜率 k 的取值范围，并说明理由.

魔术师的地毯

一天，著名魔术大师秋先生拿了一块长和宽都是 1.3 米的地毯去找地毯匠敬师傅（图 1），要求把这块正方形的地毯改制成宽 0.8 米、长 2.1 米的矩形. 敬师傅对秋先生说："你这位鼎鼎大名的魔术师，难道连小学算术都没有学过吗？边长为 1.3 米的正方形面积为 1.69 平方米，而宽 0.8 米、长 2.1 米的矩形面积只有 1.68 平方米. 两者并不相等啊！除非裁去 0.01 平方米，不然没法做." 秋先生拿出他事先画好的两张设计图，对敬师傅说："你先照这张图（图2(1)）的尺寸把地毯裁成四块，然后再照另一张图（图 2(2)）的样子把这四块拼在一起缝好就行了. 魔术大师是从来不会出错的，你只管放心做吧！" 敬师傅照着做了，缝好一量，果真是宽 0.8 米、长 2.1 米，魔术师拿着改好的地毯得意洋洋地

走了．而敬师傅还在纳闷儿哩，这是怎么回事呢？那 0.01 平方米的地毯到什么地方去了呢？你能用刚学过的知识帮敬师傅解开这个谜吗？

图 1

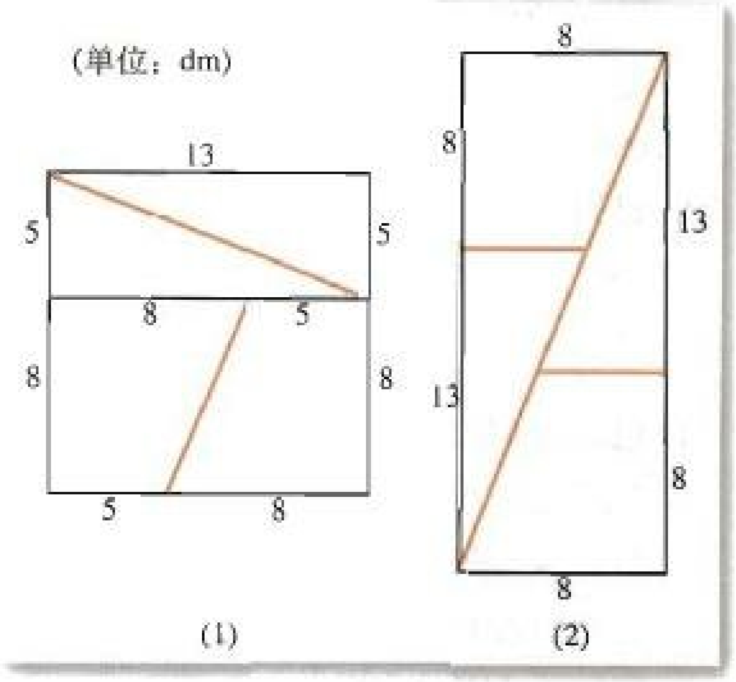


图 2

解决这类问题，物理学家和工程师通常采用做模型的方法——当然要求做得足够精确，而数学家通常采用计算的方法．

3.2 直线的方程

上一节我们分析了在直角坐标系内确定一条直线的几何要素．已知直线上的一点和直线的倾斜角（斜率）可以确定一条直线，已知两点也可以确定一条直线．同时引进了斜率的概念，导出了过两点的直线斜率的计算公式．这样，在直角坐标系中，给定一个点 $P_0(x_0, y_0)$和斜率 k，或给定两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，就能惟一确定一条直线．也就是说，平面直角坐标系中的点在不在这条直线上是完全确定的．那么，我们能否用给定的条件（点 P_0 的坐标和斜率 k，或 P_1，P_2 的坐标），将直线上所有点的坐标 (x, y) 满足的关系表示出来呢？

这就是本节要研究的直线方程．

3.2.1 直线的点斜式方程

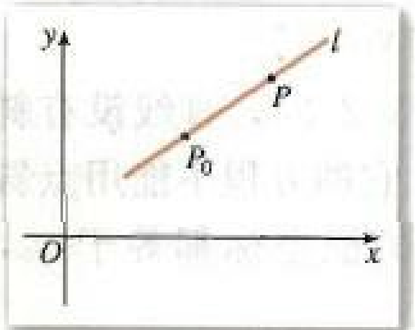


图 3.2-1

如图 3.2-1，直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且斜率为 k，设点$P(x, y)$是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，因为直线 l 的斜率为 k，由斜率公式得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).} \qquad (1)$$

由上述推导过程我们可知：

1°过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上的每一点的坐标都满足方程(1)；

反过来，我们还可以验证

2°坐标满足方程(1)的每一点都在过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上.

事实上，若点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 的坐标 x_1，y_1 满足方程(1)，即

$$y_1-y_0=k(x_1-x_0),$$

若 $x_1=x_0$，则 $y_1=y_0$，说明点 P_1 与 P_0 重合，于是可得点 P_1 在直线 l 上；若 $x_1\neq x_0$，则 $k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，这说明过点 P_1 和 P_0 的直线的斜率为 k，于是可得点 P_1 在过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上.

上述1°、2°两条成立，说明方程(1)恰为过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上的任一点的坐标所满足的关系式，我们称方程（1）为过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，斜率为 k 的直线 l 的方程.

思考？

x 轴所在直线的方程是什么？y 轴所在直线的方程是什么？

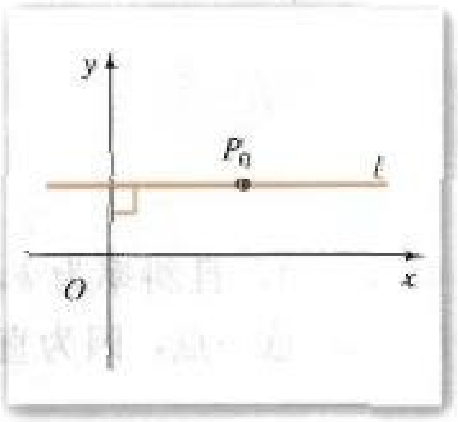


图 3.2-2

方程（1）由直线上一定点及其斜率确定，我们把（1）叫做直线的**点斜式方程**，简称**点斜式**（point slope form）.

当直线 l 的倾斜角为 $0°$ 时（图 3.2-2），$\tan 0°=0$，即 $k=0$，这时直线 l 与 x 轴平行或重合，l 的方程就是

$$y-y_0=0,\ 或\quad y=y_0.$$

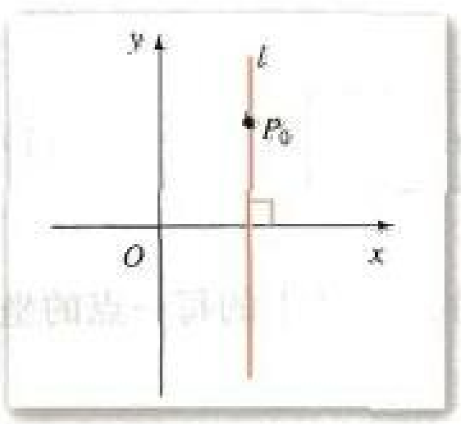


图 3.2-3

当直线 l 的倾斜角为 $90°$ 时（图 3.2-3），直线没有斜率，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示. 因为这时直线 l 上每一点的横坐标都等于 x_0，所以它的方程是

$$x-x_0=0,\ 或\quad x=x_0.$$

例 1 直线 l 经过点 $P_0(-2,\ 3)$，且倾斜角 $\alpha=45°$，求直线 l 的点斜式方程，并画出直线 l.

解： 直线 l 经过点 $P_0(-2,\ 3)$，斜率 $k=\tan 45°=1$，代入点斜式方程得

$$y-3=x+2.$$

画图时，只需再找出直线 l 上的另一点 $P_1(x_1, y_1)$，例如，取 $x_1=-1$，$y_1=4$，得 P_1 的坐标为 $(-1, 4)$，过 P_0，P_1 的直线即为所求，如图 3.2-4.

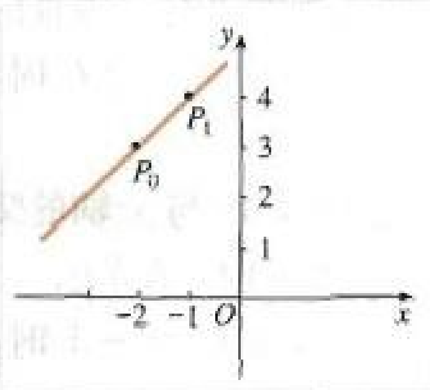


图 3.2-4

如果直线 l 的斜率为 k，且与 y 轴的交点为 $(0, b)$，代入直线的点斜式方程，得

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$\boxed{y=kx+b.} \qquad (2)$$

截距是距离吗？

我们把直线 l 与 y 轴交点 $(0, b)$ 的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的**截距**（intercept）. 方程（2）由直线的斜率 k 与它在 y 轴上的截距 b 确定，所以方程（2）叫做直线的**斜截式方程**，简称**斜截式**（slope intercept form）.

思考？

观察方程 $y=kx+b$，它的形式具有什么特点？

我们发现，左端 y 的系数恒为 1，右端 x 的系数 k 和常数项 b 均有明显的几何意义：k 是直线的斜率，b 是直线在 y 轴上的截距.

思考？

方程 $y=kx+b$ 与我们学过的一次函数的表达式类似. 我们知道，一次函数的图象是一条直线. 你如何从直线方程的角度认识一次函数 $y=kx+b$？一次函数中 k 和 b 的几何意义是什么？你能说出一次函数 $y=2x-1$，$y=3x$ 及 $y=-x+3$ 图象的特点吗？

例 2　已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，试讨论：(1) $l_1 /\!/ l_2$ 的条件是什么？(2) $l_1 \perp l_2$ 的条件是什么？

分析： 回忆 3.1.2 中用斜率判断两条直线平行、垂直的结论. 思考(1) $l_1 /\!/ l_2$ 时，k_1，k_2；b_1，b_2 有何关系？(2) $l_1 \perp l_2$ 时，k_1，k_2；b_1，b_2 有何关系？

解： (1) 若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $k_1=k_2$，此时 l_1，l_2 与 y 轴的交点不同，即 $b_1 \neq b_2$；反之，$k_1=k_2$，且 $b_1 \neq b_2$ 时，$l_1 /\!/ l_2$.

(2) 若 $l_1 \perp l_2$，则 $k_1k_2=-1$；反之，$k_1k_2=-1$ 时，$l_1 \perp l_2$.

于是我们得到，对于直线

$$l_1:\ y=k_1x+b_1,\quad l_2:\ y=k_2x+b_2,$$

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2，且\ b_1 \neq b_2;$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

练　习

1. 写出下列直线的点斜式方程：

(1) 经过点 $A(3,\ -1)$，斜率是 $\sqrt{2}$；　　(2) 经过点 $B(-\sqrt{2},\ 2)$，倾斜角是 30°；

(3) 经过点 $C(0,\ 3)$，倾斜角是 0°；　　(4) 经过点 $D(-4,\ -2)$，倾斜角是 120°.

2. 填空题.

(1) 已知直线的点斜式方程是 $y-2=x-1$，那么此直线的斜率是______，倾斜角是______；

(2) 已知直线的点斜式方程是 $y+2=\sqrt{3}(x+1)$，那么此直线的斜率是______，倾斜角是______.

3. 写出下列直线的斜截式方程：

(1) 斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，在 y 轴上的截距是 -2；　　(2) 斜率是 -2，在 y 轴上的截距是 4.

4. 判断下列各对直线是否平行或垂直：

(1) l_1：$y=\frac{1}{2}x+3$，l_2：$y=\frac{1}{2}x-2$；　　(2) l_1：$y=\frac{5}{3}x$，l_2：$y=-\frac{3}{5}x$.

3.2.2 直线的两点式方程

思考?

已知两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（其中 $x_1 \neq x_2$，$y_1 \neq y_2$），如何求出通过这两个点的直线方程呢？

经过一点，且已知斜率的直线，我们可以求出它的点斜式方程. 现在考虑能不能把思考中的问题转化为已经解决的问题呢？

当 $x_1 \neq x_2$ 时，所求直线的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 任取 P_1，P_2 中的一点，例如，取 $P_1(x_1, y_1)$，由点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

当 $y_2 \neq y_1$ 时，可写为

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.} \qquad (3)$$

这就是经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（其中 $x_1 \neq x_2$，$y_1 \neq y_2$）的直线方程，我们把它叫做直线的**两点式方程**，简称**两点式**（two-point form）.

若点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 中有 $x_1=x_2$，或 $y_1=y_2$，此时过这两点的直线方程是什么？

若 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 中有 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$ 时，直线 P_1P_2 没有两点式方程. 当 $x_1=x_2$ 时，直线 P_1P_2 平行于 y 轴，直线方程为 $x-x_1=0$，或 $x=x_1$；当 $y_1=y_2$ 时，直线 P_1P_2 平行于 x 轴，直线方程为 $y-y_1=0$，或 $y=y_1$.

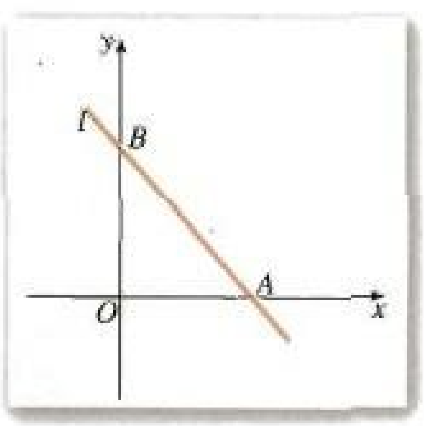


图 3.2-5

例 3 如图 3.2-5，已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a, 0)$，与 y 轴的交点为 $B(0, b)$，其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$，求直线 l 的方程.

解： 将两点 $A(a, 0)$，$B(0, b)$ 的坐标代入两点式，得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (4)$$

我们把直线与 x 轴交点$(a, 0)$的横坐标 a 叫做直线在 x 轴上的**截距**，此时直线在 y 轴上的截距是b．方程（4）由直线 l 在两个坐标轴上的截距 a 与 b 确定，所以叫做直线的截距式方程．

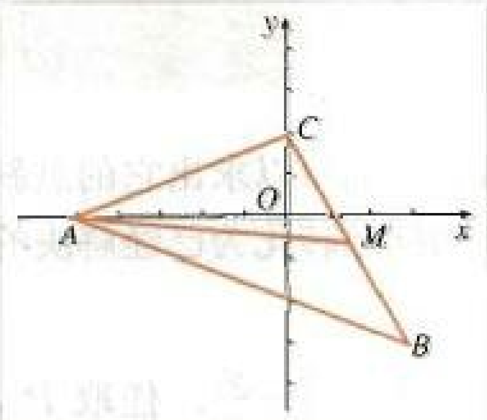


图 3.2-6

若点 P_1，P_2 的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，且线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标为(x, y)，则$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$此公式为线段 P_1P_2 的中点坐标公式．

例 4 已知三角形的三个顶点 $A(-5, 0)$，$B(3, -3)$，$C(0, 2)$，求 BC 边所在直线的方程，以及该边上中线所在直线的方程．

解： 如图 3.2-6，过 $B(3, -3)$，$C(0, 2)$的两点式方程为

$$\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-0}{3-0},$$

整理得

$$5x+3y-6=0.$$

这就是 BC 边所在直线的方程．

BC 边上的中线是顶点 A 与 BC 边中点 M 所连线段，由中点坐标公式可得点 M 的坐标为

$$\left(\frac{3+0}{2}, \frac{-3+2}{2}\right),$$

即$\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$．

过 $A(-5, 0)$，$M\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$的直线的方程为

$$\frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0}=\frac{x+5}{\frac{3}{2}+5},$$

整理得

$$\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}y+\frac{5}{2}=0,$$

即

$$x+13y+5=0.$$

这就是 BC 边上中线所在直线的方程．

练　习

1. 求过下列两点的直线的两点式方程：

　(1) $P_1(2, 1)$，$P_2(0, -3)$；　　(2) $A(0, 5)$，$B(5, 0)$.

2. 根据下列条件求直线的方程，并画出图形：

　(1) 在 x 轴上的截距是 2，在 y 轴上的截距是 3；

　(2) 在 x 轴上的截距是 -5，在 y 轴上的截距是 6.

3. 根据下列条件，求直线的方程：

　(1) 过点 $(0, 5)$，且在两坐标轴上的截距之和为 2；

　(2) 过点 $(5, 0)$，且在两坐标轴上的截距之差为 2.

3.2.3　直线的一般式方程

直线的点斜式、斜截式、两点式方程都是关于 x，y 的二元一次方程．现在我们考察直线与二元一次方程的关系，探讨以下两个问题：

思考？

(1) 平面直角坐标系中的每一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示吗？

(2) 每一个关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线吗？

先看问题 (1)．任意一条直线 l，在其上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$，当直线 l 的斜率为 k 时（此时直线的倾斜角 $\alpha \neq 90°$），其方程为

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad ①$$

这是关于 x，y 的二元一次方程．

> 分类讨论时，常按 $\alpha \neq 90°$ 和 $\alpha = 90°$ 分类，这样可以做到不重不漏．

当直线 l 的斜率不存在，即直线 l 的倾斜角 $\alpha = 90°$ 时，直线的方程为

$$x - x_0 = 0, \quad ②$$

方程②可以认为是关于 x，y 的二元一次方程，此时方程中 y 的系数为 0.

方程①和②都是二元一次方程，因此平面上任意一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示.

现在探讨问题（2）. 对于任意一个二元一次方程

$$Ax+By+C=0 \quad (A,\ B \text{ 不同时为 } 0), \qquad ③$$

判断它是否表示一条直线，就看能否把它化成直线方程的某一种形式.

当 $B\neq 0$ 时，方程③可变形为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示过点 $\left(0,\ -\frac{C}{B}\right)$，斜率为 $-\frac{A}{B}$ 的直线.

思考 当 $B=0$ 时，情况又怎样呢？

由上可知，关于 x，y 的二元一次方程，它都表示一条直线.

我们把关于 x，y 的二元一次方程

$$\boxed{Ax+By+C=0} \qquad (5)$$

（其中 A，B 不同时为 0）叫做**直线的一般式方程**，简称**一般式**（general form）.

探究

在方程 $Ax+By+C=0$ 中，A，B，C 为何值时，方程表示的直线

①平行于 x 轴；　②平行于 y 轴；

③与 x 轴重合；　④与 y 轴重合.

例 5 已知直线经过点 $A(6,\ -4)$，斜率为 $-\frac{4}{3}$，求直线的点斜式和一般式方程.

解： 经过点 $A(6,\ -4)$，斜率等于 $-\frac{4}{3}$ 的直线的点斜式方程是

$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6).$$

化成一般式，得

$$4x+3y-12=0.$$

例 6　把直线 l 的一般式方程 $x-2y+6=0$ 化成斜截式，求出直线 l 的斜率以及它在 x 轴与 y 轴上的截距，并画出图形.

分析：求直线 l 在 x 轴上的截距，即求直线 l 与 x 轴交点的横坐标. 设 l 与 x 轴的交点为 $A(a, 0)$，则 $(a, 0)$ 适合 l 的方程. 在 l 的方程中令 $y=0$，解出 x 值，即为 a.

解：将直线 l 的一般式方程化成斜截式

$$y=\frac{1}{2}x+3.$$

因此，直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2}$，它在 y 轴上的截距是 3.

在直线 l 的方程 $x-2y+6=0$ 中，令 $y=0$，得

$$x=-6,$$

即直线 l 在 x 轴上的截距是 -6.

由上面可得直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为

$$A(-6, 0), B(0, 3),$$

过点 A，B 作直线，就得直线 l 的图形（图 3.2-7）.

在直角坐标系中画直线时，通常找出直线与两个坐标轴的交点.

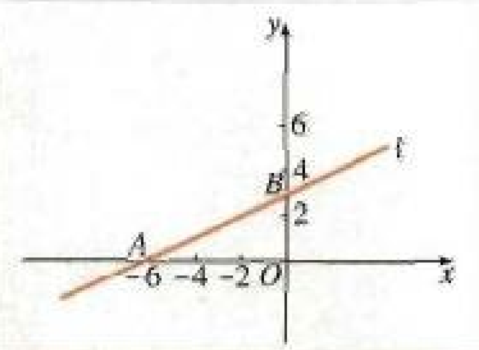


图 3.2-7

由此，我们可以从几何的角度看一个二元一次方程，即一个二元一次方程表示一条直线.

在代数中我们研究方程，着重研究方程的解. 建立平面直角坐标系后，二元一次方程的每一组解都可以看成平面直角坐标系中一个点的坐标，这个方程的全体解组成的集合，就是坐标满足二元一次方程的全体点的集合，这些点的集合就组成了一条直线.

直角坐标系是把方程和直线联系起来的桥梁，这是笛卡儿的伟大贡献. 戴上笛卡儿为我们特制的“眼镜”（即用解析几何的眼光）观看，一个二元一次方程就是直角坐标平面上的一条确定的直线.

笛卡儿，法国数学家，解析几何创始人之一.

练 习

1. 根据下列条件，写出直线的方程，并把它化成一般式：

   (1) 经过点 $A(8, -2)$，斜率是 $-\frac{1}{2}$；

   (2) 经过点 $B(4, 2)$，平行于 x 轴；

   (3) 经过点 $P_1(3, -2)$，$P_2(5, -4)$；

   (4) 在 x 轴，y 轴上的截距分别是 $\frac{3}{2}$，-3.

2. 求下列直线的斜率以及在 y 轴上的截距，并画出图形：

   (1) $3x+y-5=0$；　　(2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$；

   (3) $x+2y=0$；　　(4) $7x-6y+4=0$.

3. 已知直线 l 的方程是 $Ax+By+C=0$，

   (1) 当 $B\neq0$ 时，直线 l 的斜率是多少？当 $B=0$ 时呢？

   (2) 系数 A，B，C 取什么值时，方程 $Ax+By+C=0$ 表示通过原点的直线？

习题3.2

A 组

1. 写出满足下列条件的直线的方程：

   (1) 斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，经过点 $A(8, -2)$；

   (2) 经过点 $B(-2, 0)$，且与 x 轴垂直；

   (3) 斜率为 -4，在 y 轴上的截距为 7；

   (4) 经过点 $A(-1, 8)$，$B(4, -2)$；

   (5) 在 y 轴上的截距是 2，且与 x 轴平行；

   (6) 在 x 轴，y 轴上的截距分别是 4，-3.

2. 判断 $A(1, 3)$，$B(5, 7)$，$C(10, 12)$ 三点是否共线，并说明理由.

3. 已知点 $A(7, -4)$，$B(-5, 6)$，求线段 AB 的垂直平分线的方程.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(8, 5)$，$B(4, -2)$，$C(-6, 3)$，求经过两边 AB 和 AC 中点的直线的方程.

5. 一条直线经过点 $A(2, -3)$，并且它的斜率等于直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的斜率的2倍，求这条直线的方程.
6. 一根弹簧，挂4 N的物体时，长20 cm. 在弹性限度内，所挂物体的重量每增加1 N，弹簧就伸长1.5 cm. 试写出弹簧的长度 l (cm) 与所挂物体重量 G (N) 之间关系的方程.
7. 一根铁棒在40 ℃时长12.506 m，在80 ℃时长12.512 m. 已知长度 l (m)与温度 t (℃) 的关系可以用直线方程来表示，试用两点式表示这个方程；并根据方程，求铁棒在100 ℃时的长度.
8. 菱形的两条对角线分别位于 x 轴和 y 轴上，其长度分别为8和6，求菱形各边所在直线的方程.
9. 求过点 $P(2, 3)$，并且在两轴上的截距相等的直线方程.
10. 求满足下列条件的直线的方程：
   (1) 经过点 $A(3, 2)$，且与直线 $4x+y-2=0$ 平行；
   (2) 经过点 $C(2, -3)$，且平行于过点 $M(1, 2)$ 和 $N(-1, -5)$ 的直线；
   (3) 经过点 $B(3, 0)$，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直.
11. 一条光线从点 $P(6, 4)$ 射出，与 x 轴相交于点 $Q(2, 0)$，经 x 轴反射，求入射光线和反射光线所在直线的方程.

B 组

1. 三角形的三个顶点是 $A(4, 0)$、$B(6, 7)$、$C(0, 3)$.
   (1) 求 BC 边上的高所在直线的方程；
   (2) 求 BC 边上的中线所在直线的方程；
   (3) 求 BC 边的垂直平分线的方程.
2. 直线 $Ax+By+C=0$ (A, B 不同时为0) 的系数 A, B, C 满足什么关系时，这条直线有以下性质：
   (1) 与两条坐标轴都相交；　(2) 只与 x 轴相交；
   (3) 只与 y 轴相交；　(4) 是 x 轴所在直线；
   (5) 是 y 轴所在直线.
3. 设点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，求证这条直线的方程可以写成
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$
4. 已知直线 l_1，l_2 的方程分别是
   l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ (A_1, B_1 不同时为0)，　l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ (A_2, B_2 不同时为0)，
   且 $A_1A_2+B_1B_2=0$，求证 $l_1 \perp l_2$.
5. 若直线 l 沿 x 轴向左平移3个单位，再沿 y 轴向上平移1个单位后，回到原来的位置，试求直线 l 的斜率.
6. 用信息技术工具画出直线 l：$2x-y+3=0$，并在平面上取若干点，度量它们的坐标，将这些点的坐标代入 $2x-y+3$，求它的值，观察有什么规律.

CHAPTER 3

3.3 直线的交点坐标与距离公式

在平面几何中，我们只能对直线作定性的研究. 引入平面直角坐标系后，我们用方程表示直线，直线的方程就是直线上每一点的坐标满足的一个关系式，即一个二元一次方程. 这样，我们可以通过方程把握直线上的点，用代数方法研究直线上的点，对直线进行定量研究.

上一节，我们在平面直角坐标系中建立了直线的方程. 这一节，我们将通过直线方程，用代数方法解决直线的有关问题，包括求两条直线的交点，判断两条直线的位置关系，求两点间的距离、点到直线的距离以及两条平行直线间的距离等.

3.3.1 两条直线的交点坐标

思考？

已知两条直线

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

相交，如何求这两条直线交点的坐标？

看下表，并填空：

几何元素及关系	代数表示
点 A	$A(a, b)$
直线 l	l：$Ax+By+C=0$
点 A 在直线 l 上	
直线 l_1 与 l_2 的交点是 A	

用代数方法求两条直线的交点坐标，只需写出这两条直线的方程，然后联立求解.

一般地，将两条直线的方程联立，得方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

若方程组有惟一解，则两条直线相交，此解就是交点的坐标；若方程组无解，则两条直线无公共点，此时两条直线平行.

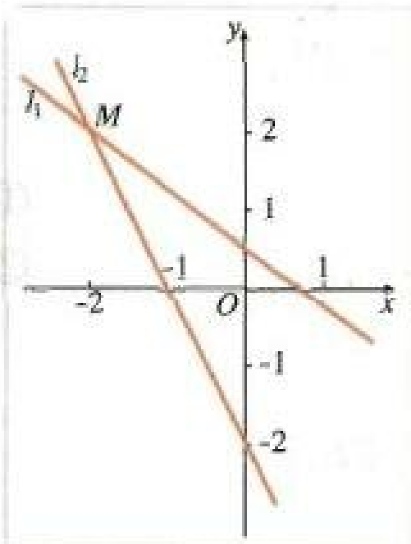


图 3.3-1

例 1 求下列两条直线的交点坐标：

$$l_1：3x+4y-2=0,$$
$$l_2：2x+y+2=0.$$

解：解方程组

$$\begin{cases}3x+4y-2=0,\\2x+y+2=0,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=-2,\\y=2.\end{cases}$$

所以，l_1 与 l_2 的交点是 $M(-2, 2)$（图 3.3-1）.

探究

当 λ 变化时，方程

$$3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$$

表示什么图形？图形有何特点？

例 2 判断下列各对直线的位置关系．如果相交，求出交点的坐标：

(1) l_1：$x-y=0$，　l_2：$3x+3y-10=0$；

(2) l_1：$3x-y+4=0$，l_2：$6x-2y-1=0$；

(3) l_1：$3x+4y-5=0$，l_2：$6x+8y-10=0$．

解： (1) 解方程组

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 3x+3y-10=0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{3}, \\ y=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

所以，l_1 与 l_2 相交，交点是 $M\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$．

(2) 解方程组

$$\begin{cases} 3x-y+4=0, & ① \\ 6x-2y-1=0, & ② \end{cases}$$

①×2－②得

$$9=0，矛盾，$$

方程组无解，所以两直线无公共点，$l_1 // l_2$．

(3) 解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y-5=0, & ① \\ 6x+8y-10=0, & ② \end{cases}$$

①×2 得 $6x+8y-10=0$．

因此，①和②可以化成同一个方程，即①和②表示同一条直线，l_1 与 l_2 重合．

练　习

1. 求下列各对直线的交点坐标，并画出图形：

(1) l_1：$2x+3y=12$，　l_2：$x-2y=4$；

(2) l_1：$x=2$，　l_2：$3x+2y-12=0$．

2. 判断下列各对直线的位置关系．如果相交，求出交点的坐标：

(1) l_1：$2x-3y=7$，　l_2：$4x+2y=1$；

(2) l_1：$2x-6y+4=0$，　l_2：$y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}$；

(3) l_1：$(\sqrt{2}-1)x+y=3$，　l_2：$x+(\sqrt{2}+1)y=2$．

3.3.2 两点间的距离

思考？

已知平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，如何求 P_1，P_2 的距离 $|P_1P_2|$？

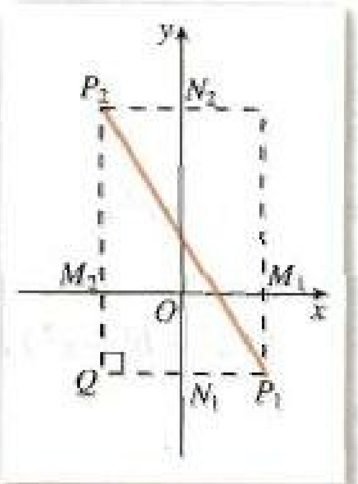


图 3.3-2

如图 3.3-2，从点 P_1，P_2 分别向 y 轴和 x 轴作垂线 P_1N_1 和 P_2M_2，垂足分别为 $N_1(0, y_1)$和 $M_2(x_2, 0)$．直线 P_1N_1 与 P_2M_2 相交于点 Q.

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1QP_2$ 中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

为了计算 $|P_1Q|$ 和 $|QP_2|$，过点 P_1 向 x 轴作垂线，垂足为 $M_1(x_1, 0)$；过点 P_2 向 y 轴作垂线，垂足为 $N_2(0, y_2)$．于是有

$$|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|.$$

所以，$|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$.

由此得到两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$间的距离公式

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

特别地，原点 $O(0, 0)$与任一点 $P(x, y)$的距离

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 3　已知点 $A(-1, 2)$，$B(2, \sqrt{7})$，在 x 轴上求一点 P，使 $|PA|=|PB|$，并求 $|PA|$ 的值.

解：设所求点为 $P(x, 0)$，于是有

$$|PA|=\sqrt{(x+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{x^2+2x+5},$$

$$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(0-\sqrt{7})^2}=\sqrt{x^2-4x+11},$$

由 $|PA|=|PB|$ 得

$$x^2+2x+5=x^2-4x+11,$$

解得 $x=1$.

所以，所求点为 $P(1, 0)$，且

$$|PA|=\sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}.$$

例 4 证明平行四边形四条边的平方和等于两条对角线的平方和.

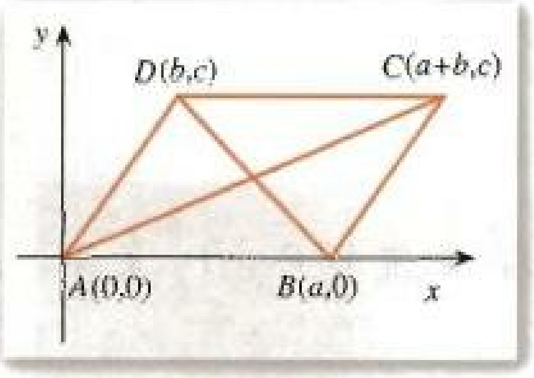


图 3.3-3

如何由平行四边形的性质，得到点 C 的坐标为 $(a+b,\ c)$?

分析：首先要建立适当的坐标系，用坐标表示有关量，然后进行代数运算，最后把代数运算的结果“翻译”成几何关系.

证明：如图 3.3-3，以顶点 A 为坐标原点，AB 边所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，有 $A(0,\ 0)$.

设 $B(a,\ 0)$，$D(b,\ c)$，由平行四边形的性质得点 C 的坐标为 $(a+b,\ c)$. 因为

$$|AB|^2=a^2,\ |CD|^2=a^2,$$
$$|AD|^2=b^2+c^2,\ |BC|^2=b^2+c^2,$$
$$|AC|^2=(a+b)^2+c^2,\ |BD|^2=(b-a)^2+c^2,$$

所以

$$|AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$|AC|^2+|BD|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$

所以

$$|AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=|AC|^2+|BD|^2.$$

因此，平行四边形四条边的平方和等于两条对角线的平方和.

上述解决问题的基本步骤可以概括为

第一步：建立坐标系，用坐标表示有关的量.	→ 第二步：进行有关代数运算.	→ 第三步：把代数运算结果“翻译”成几何关系.

思考

在例 4 中，你是否还有其他建立坐标系的方法？与你的同学交流，你能体会适当建立坐标系对证明的重要性吗？

练 习

1. 求下列两点间的距离：

   (1) $A(6,\ 0)$，$B(-2,\ 0)$；　　(2) $C(0,\ -4)$，$D(0,\ -1)$；

   (3) $P(6,\ 0)$，$Q(0,\ -2)$；　　(4) $M(2,\ 1)$，$N(5,\ -1)$.

2. 已知点 $A(a,\ -5)$ 与 $B(0,\ 10)$ 间的距离是 17，求 a 的值.

3.3.3 点到直线的距离

思考？

如图 3.3-4，已知点 $P_0(x_0, y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0$，如何求点 P_0 到直线 l 的距离？

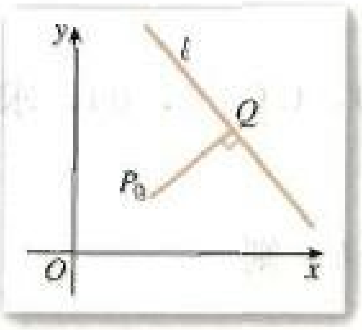


图 3.3-4

试一试，你能求出 $|P_0Q|$ 吗？

点 P_0 到直线 l 的距离，是指从点 P_0 到直线 l 的垂线段 P_0Q 的长度，其中 Q 是垂足（图 3.3-4）.

由 $P_0Q\perp l$，以及直线 l 的斜率为 $-\dfrac{A}{B}$，可得 l 的垂线 P_0Q 的斜率为 $\dfrac{B}{A}$，因此，垂线 P_0Q 的方程可以求出．直线 P_0Q 与直线 l 的交点，即垂足 Q 点的坐标也可以求出．于是 P_0 与 Q 间的距离 $|P_0Q|$ 可以求出，P_0Q 的长即为点 P_0 到直线 l 的距离.

上述方法虽然思路十分自然，但具体运算较繁，下面我们采用另一种方法.

如图 3.3-5，设 $A\neq 0$，$B\neq 0$，则直线 l 与 x 轴和 y 轴都相交，过点 P_0 分别作 x 轴和 y 轴的平行线，交直线 l 于 R 和 S，则直线 P_0R 的方程为 $y=y_0$，R 的坐标为 $\left(-\dfrac{By_0+C}{A}, y_0\right)$；直线 P_0S 的方程为 $x=x_0$，S 的坐标为 $\left(x_0, -\dfrac{Ax_0+C}{B}\right)$.

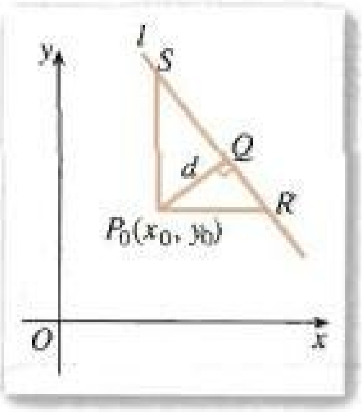


图 3.3-5

于是有

$$|P_0R|=\left|-\frac{By_0+C}{A}-x_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|A|},$$

$$|P_0S|=\left|-\frac{Ax_0+C}{B}-y_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|},$$

$$|RS|=\sqrt{|P_0R|^2+|P_0S|^2}=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|A|\,|B|}|Ax_0+By_0+C|.$$

设 $|P_0Q|=d$，由三角形面积公式可得

$$d\cdot|RS|=|P_0R|\cdot|P_0S|,$$

于是得

$$d=\frac{|P_0R|\cdot|P_0S|}{|RS|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

当 $A=0$，或 $B=0$ 时，上述公式是否成立？

因此，点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

可以验证，当 $A=0$，或 $B=0$ 时，上述公式也成立.

例 5 求点 $P_0(-1, 2)$ 到直线 l：$3x=2$ 的距离.

解：

$$d=\frac{|3\times(-1)-2|}{\sqrt{3^2+0^2}}=\frac{5}{3}.$$

例 5 还有其他解法吗？

例 6 已知点 $A(1, 3)$，$B(3, 1)$，$C(-1, 0)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解： 如图 3.3-6，设 AB 边上的高为 h，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h.$$

$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$，

AB 边上的高 h 就是点 C 到 AB 的距离.

AB 边所在直线的方程为

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{3-1},$$

即 $x+y-4=0$.

点 $C(-1, 0)$ 到 $x+y-4=0$ 的距离

$$h=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

因此，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=5.$

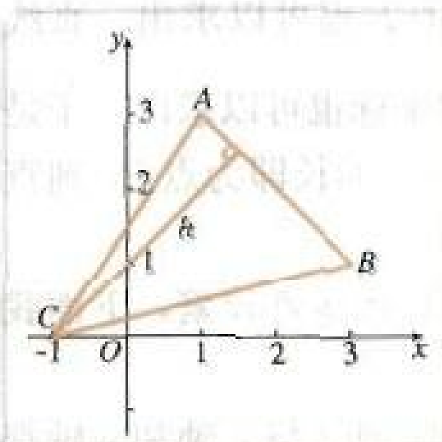


图 3.3-6

例 6 还有其他解法吗？

练 习

1. 求原点到下列直线的距离：

(1) $3x+2y-26=0$； (2) $x=y$.

2. 求下列点到直线的距离：

(1) $A(-2, 3)$， l：$3x+4y+3=0$；

(2) $B(1, 0)$， l：$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$；

(3) $C(1, -2)$， l：$4x+3y=0$.

3.3.4 两条平行直线间的距离

两条平行直线间的距离是指夹在两条平行直线间公垂线段的长.

探究

设直线 $l_1 // l_2$，如何求 l_1 与 l_2 间的距离？

(1) 能否将平行直线间的距离转化为点到直线的距离？

(2) 如何取点，可使计算简单？

例 7 已知直线 l_1：$2x-7y-8=0$，l_2：$6x-21y-1=0$，l_1 与 l_2 是否平行？若平行，求 l_1 与 l_2 间的距离.

解： l_1 的斜率 $k_1=\frac{2}{7}$，l_2 的斜率 $k_2=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$.

因为 $k_1=k_2$，所以 $l_1 // l_2$.

先求 l_1 与 x 轴的交点 A 的坐标，容易知道 A 点坐标为 $(4, 0)$.

点 A 到直线 l_2 的距离

$$d=\frac{|6\times 4-21\times 0-1|}{\sqrt{6^2+21^2}}=\frac{23}{3\sqrt{53}}=\frac{23}{159}\sqrt{53}.$$

所以 l_1 与 l_2 间的距离为 $\frac{23}{159}\sqrt{53}$.

由例 7 可知，两条平行直线间的距离可以转化为点到直线的距离.

练 习

求下列两条平行线间的距离：

(1) $2x+3y-8=0$，　$2x+3y+18=0$；

(2) $3x+4y=10$，　$3x+4y=0$.

习题3.3

A 组

1. 判断下列各对直线的位置关系．如果相交，求出交点的坐标：

(1) $2x-y+7=0$，　　$x+y=1$；

(2) $x-3y-10=0$，　　$y=\dfrac{x+5}{3}$；

(3) $3x-5y+10=0$，　　$9x-15y+30=0$．

2. A 和 C 取什么值时，直线 $Ax-2y-1=0$ 与直线 $6x-4y+C=0$：

(1) 平行；　　(2) 相交；　　(3) 垂直．

3. 已知两条直线

$$l_1:(3+m)x+4y=5-3m,$$
$$l_2:2x+(5+m)y=8,$$

m 为何值时，l_1 与 l_2：

(1) 相交；　　(2) 平行；　　(3) 垂直．

4. 已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交，证明方程

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0\ (\lambda\in\mathbf{R})$$

表示过 l_1 与 l_2 交点的直线．

5. 求满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$；

(2) 经过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$．

6. 已知点 $A(1,2)$，$B(2,0)$，$P(0,3)$，$Q(-1,1)$，$M(1,0)$，$N(-4,0)$六点，线段 AB，PQ，MN 能围成一个三角形吗？为什么？

7. 已知点 $P(a,2)$，$Q(-2,-3)$，$M(1,1)$，且 $|PQ|=|PM|$，求 a 的值．

8. (1) 求在 x 轴上与点 $A(5,12)$的距离为 13 的点的坐标；

(2) 已知点 P 的横坐标是 7，点 P 与点 $N(-1,5)$间的距离等于 10，求点 P 的纵坐标．

9. 求点 $P(-5,7)$到直线 $12x+5y-3=0$ 的距离．

10. 求两条平行直线 $3x-2y-1=0$ 与 $3x-2y+1=0$ 间的距离．

B 组

1. 三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 与 $2x-y=10$ 相交于一点，求 a 的值．

2. 已知点 $A(a,6)$到直线 $3x-4y=2$ 的距离 d 为下列各值，求 a 的值：

(1) $d=4$；　　(2) $d>4$．

3. 求证：两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离为

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4. 已知点 $A(-3,\ -4)$，$B(6,\ 3)$到直线 l：$ax+y+1=0$ 的距离相等，求 a 的值.

5. 在 x 轴上求一点 P，使以点 $A(1,\ 2)$，$B(3,\ 4)$和 P 为顶点的三角形的面积为 10.

6. 证明直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

7. 已知 AO 是△ABC 边 BC 的中线，求证：

$$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

8. 已知 $0<x<1$，$0<y<1$，求证：

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant 2\sqrt{2},$$

并求使等式成立的条件.

9. 已知△ABC 的顶点 $A(5,\ 1)$，AB 边上的中线 CM 所在直线方程为 $2x-y-5=0$，AC 边上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$. 求：

(1) 顶点 C 的坐标；

(2) 直线 BC 的方程.

笛卡儿与解析几何

笛卡儿

法国数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650）是解析几何的创始人之一，他的中心思想是使代数和几何结合起来. 他说："我决心放弃那个仅仅是抽象的几何，这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题. 我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何." 解析几何的创立适应了 17 世纪科学技术发展的迫切需要.

笛卡儿对当时的几何方法和代数方法进行比较、分析了它们各自的优缺点. 他认为，没有任何东西比几何图形更容易印入人脑，用图形表达事物非常有益. 但他对欧几里得几何中许多定理的证明需要某种奇巧的想法深感不安，他还批评希腊人的几何过多地依赖图形. 他看到了代数的力量，认为代数在提供广泛的方法论方面高于欧几里得的几何学. 他认为，代数具有一般性，例如用字母代替数时，可以代表各种数：正数、负数和 0；代数中的公式可以使解题过程机械化；代数具有作为一门普遍的

科学方法的潜力.

他曾计划写一本书《思想的指导法则》，在书中他大胆地提出了一个解决一切问题的方案：把一切问题归结为数学问题，把一切数学问题归结为代数问题，把一切代数问题归结为方程，最后得到关于一个未知数的方程. 可能不久他自己就发现这个设想过于大胆，根本无法实现，这本书没有写完就搁下了（在他去世后人们将它出版）. 他的这个方案虽然失败了，但确有很多问题可以用列方程的方法来解. 笛卡儿把方程用于几何，创立了解析几何.

1637 年笛卡儿发表了《更好地指导推理和寻找科学真理的方法论》，这是一本哲学的经典著作，包含了三个附录，《几何学》就是其中之一. 《几何学》是笛卡儿所写的惟一一本数学书. 笛卡儿在《几何学》中引入了坐标方法和用方程表示曲线的思想. 于是后人就把这本《几何学》的发表作为解析几何创立的标志.

笛卡儿最初所使用的坐标系中，两个坐标轴的夹角不要求一定是直角，而且 y 轴并没有明显地出现. 至于“坐标”“坐标系”“横坐标”“纵坐标”等名词，也都是后来人们逐渐使用的. 虽然笛卡儿当初的坐标系还不够完善，但是笛卡儿当初迈出的第一步具有决定意义，所以人们仍然把后来的直角坐标系，叫做笛卡儿直角坐标系.

差不多与笛卡儿同时，另一位法国数学家费马（Fermat，1601—1665）在自己的研究中也独立地得到了用方程表示曲线的思想. 因此，费马和笛卡儿同为解析几何的创始人.

解析几何的创立在数学发展史上具有划时代的意义，是数学发展史上的一个里程碑. 它促进了微积分的创立，从此数学进入了变量数学的新时期. 正如恩格斯在《自然辩证法》一书中所指出的：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了.”

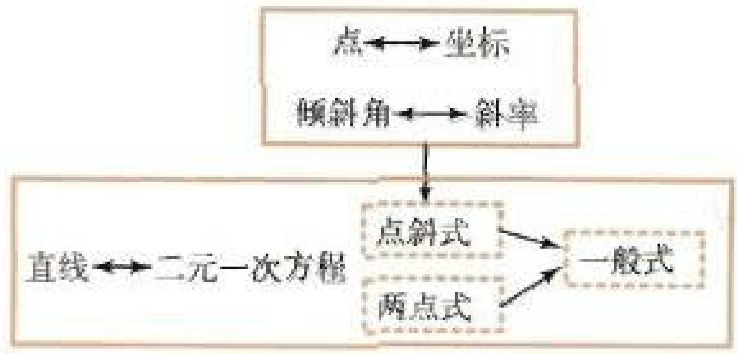
解析几何的创立提供了研究几何问题的一种新方法，借助于坐标系，把几何问题转化为代数问题来研究. 这种方法具有一般性，它沟通了数学内部数与形、代数与几何两大学科之间的联系. 从此代数和几何互相吸取新鲜的活力，得到迅速的发展.

思考：你如何理解解析几何的重要性在于它的方法?

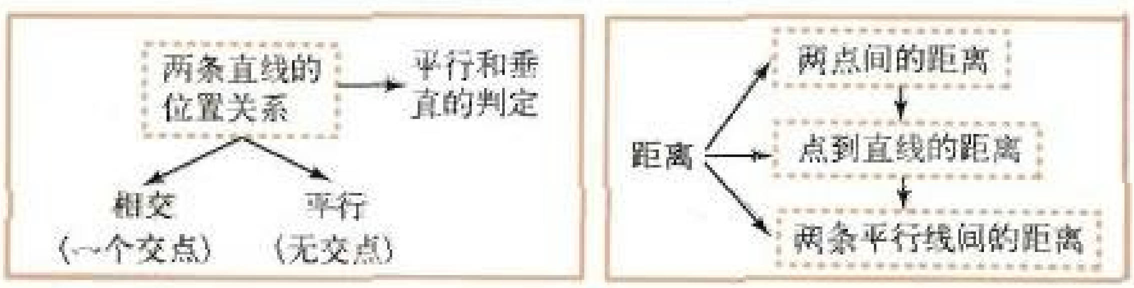
小　结

一、本章知识结构

从几何直观到代数表示
（建立直线的方程）



从代数表示到几何直观
（通过方程研究几何性质和度量）



二、回顾与思考

1. 回顾本章是如何用代数方法研究直线的. 首先探求确定直线位置的几何要素和它们在平面直角坐标系中的表示，建立直线的方程；然后通过方程，用代数方法研究有关的几何问题：包括判定两条直线的位置关系、求两条直线的交点坐标、计算点到直线的距离等. 体会用代数方法研究直线问题的基本思路是在平面直角坐标系中建立直线的方程，通过方程，用代数方法解决几何问题.

2. 我们是如何建立直线的点斜式方程的？你能总结建立这个方程的一般步骤吗？

3. 写出直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程，并指出这些方程中系数的几何意义.

4. 结合直线方程一般式的讨论，体会分类讨论的思想；选择合适的分类标准，使讨论不重不漏.

5. 解析几何方法是通过坐标系，将几何问题转化为代数问题来解决；反过来，某些代数问题放在适当的坐标系中，若具有某种几何意义，则也可转化为几何问题来解决. 这是解析几何方法应用的两个方面. 你能举例说明吗？

复习参考题

A 组

1. 已知 $O(0,0)$，$A(8,0)$，$B(0,5)$为矩形的三个顶点，求矩形的两条对角线所在直线的方程.
2. 判断 $A(-2,12)$，$B(1,3)$，$C(4,-6)$三点的位置关系，并说明理由.
3. 求直线 $2x-5y-10=0$ 与坐标轴围成的三角形的面积.
4. 已知直线$(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$与$(5a-2)x+(a+4)y-7=0$垂直，求 a 的值.
5. 若下列各组中的两个方程表示的直线平行，a 应取什么值？

   (1) $ax-5y=9$，　　$2x-3y=15$；

   (2) $x+2ay-1=0$，　　$(3a-1)x-ay-1=0$；

   (3) $2x+3y=a$，　　$4x+6y-3=0$.
6. 若下列各组中两个方程表示的直线垂直，a 应取什么值？

   (1) $4ax+y=1$，　　$(1-a)x+y=-1$；

   (2) $2x+ay=2$，　　$ax+2y=1$.
7. 已知两条直线

   $$l_1: x+(1+m)y=2-m,\ l_2: 2mx+4y=-16.$$

   m 为何值时，l_1 与 l_2：

   (1) 相交；　　(2) 平行.
8. 判断以 $A(4,1)$，$B(1,5)$，$C(-3,2)$，$D(0,-2)$为顶点的四边形的形状，并说明理由.
9. 求两条垂直的直线 $2x+y+2=0$ 与 $ax+4y-2=0$ 的交点坐标.
10. 求两条平行直线 $3x+4y-12=0$ 与 $ax+8y+11=0$ 间的距离.
11. 求平行于直线 $x-y-2=0$，且与它的距离为 $2\sqrt{2}$的直线的方程.
12. 已知平行四边形的两条边所在直线的方程分别是

    $$x+y-1=0,\qquad 3x-y+4=0,$$

    且它的对角线的交点是 $M(3,3)$，求这个平行四边形其他两边所在直线的方程.

B 组

1. 与直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线的方程为（　）

   (A) $3x+4y-5=0$　　(B) $3x+4y+5=0$

   (C) $3x-4y+5=0$　　(D) $3x-4y-5=0$
2. 如果四边形一组对边的平方和等于另一组对边的平方和，那么它的对角线具有什么关系？为什么？
3. 已知直线 l: $Ax+By+C=0$ ($A\neq0$, $B\neq0$)，点 $M_0(x_0, y_0)$. 求证：

   (1) 经过点 M_0，且平行于直线 l 的直线方程是

   $$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0;$$

(2) 经过点 M_0，且垂直于直线 l 的直线的方程是

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}.$$

4. 已知两条平行直线 $3x+2y-6=0$ 与 $6x+4y-3=0$，求与它们等距离的平行线的方程.

5. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 之间的一段图象可以近似地看作直线，且 $a\leqslant c\leqslant b$，求证：

$$f(c)\approx f(a)+\frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)].$$

6. 在一个平面上，机器人到与点 $C(5,\ -3)$ 距离为 9 的地方绕 C 点顺时针而行，在行进过程中保持与点 C 的距离不变. 它在行进过程中到经过点 $A(-10,\ 0)$ 与 $B(0,\ 12)$ 的直线的最近距离和最远距离分别是多少？

7. 设 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，求证：对于任意 p，$q\in\mathbf{R}$，

$$\sqrt{(a-p)^2+(b-q)^2}+\sqrt{(c-p)^2+(d-q)^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

8. 过点 $P(3,\ 0)$ 有一条直线 l，它夹在两条直线 l_1：$2x-y-2=0$ 与 l_2：$x+y+3=0$ 之间的线段恰被点 P 平分，求直线 l 的方程.

9. 证明三角形两边中点所连线段平行于第三边且等于第三边的一半.

10. 已知正方形的中心为点 $M(-1,\ 0)$，一条边所在的直线的方程是 $x+3y-5=0$，求正方形其他三边所在直线的方程.

第四章 圆与方程

上一章，我们学习了直线与方程．知道在直角坐标系中，直线可以用方程表示，通过方程，可以研究直线间的位置关系，直线与直线的交点等问题．

本章在上一章的基础上，在直角坐标系中建立圆的方程．通过圆的方程，研究直线与圆、圆与圆的位置关系．另外，我们还要学习空间直角坐标系的有关知识，它是用解析方法研究空间几何对象的基础．

在直角坐标系中，建立几何对象的方程，并通过方程研究几何对象，这是研究几何问题的重要方法．通过坐标系，把点与坐标、曲线与方程联系起来，实现空间形式与数量关系的结合．

CHAPTER 4

4.1 圆的方程

4.1.1 圆的标准方程

我们知道，在平面直角坐标系中，两点确定一条直线，一点和倾斜角也能确定一条直线.

思考？

在平面直角坐标系中，如何确定一个圆呢？

显然，当圆心位置与半径大小确定后，圆就唯一确定了. 因此，确定一个圆最基本要素是圆心和半径. 如图 4.1-1，在直角坐标系中，圆心（点）A 的位置用坐标(a, b)表示，半径 r 的大小等于圆上任意点 $M(x, y)$ 与圆心 $A(a, b)$的距离，圆心为 A 的圆就是集合

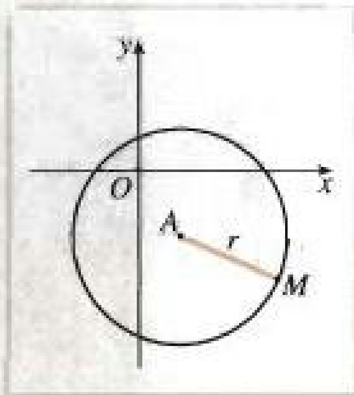


图 4.1-1

$$P=\{M \mid |MA|=r\}.$$

由两点间的距离公式，点 M 的坐标适合的条件可以表示为

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r, \quad ①$$

①式两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.} \quad (1)$$

若点 $M(x, y)$在圆上，由上述讨论可知，点 M 的坐标适合方程（1）；反之，若点 $M(x, y)$的坐标适合方程（1），这就说明点 M 与圆心 A 的距离为 r，即点 M 在圆心为 A 的圆上. 我们把方程（1）称为圆心为 $A(a, b)$，半径长为 r

的圆的方程，把它叫做**圆的标准方程**（standard equation of circle）.

圆心在坐标原点，半径长为 r 的圆的方程是什么？

例 1 写出圆心为 $A(2,-3)$，半径长等于 5 的圆的方程，并判断点 $M_1(5,-7)$，$M_2(-\sqrt{5},-1)$是否在这个圆上.

解：圆心是 $A(2,-3)$，半径长等于 5 的圆的标准方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

把 $M_1(5,-7)$的坐标代入方程$(x-2)^2+(y+3)^2=25$，左右两边相等，点 M_1 的坐标适合圆的方程，所以点 M_1 在这个圆上；把点 $M_2(-\sqrt{5},-1)$的坐标代入方程$(x-2)^2+(y+3)^2=25$，左右两边不相等，点 M_2 的坐标不适合圆的方程，所以点 M_2 不在这个圆上（图 4.1-2）.

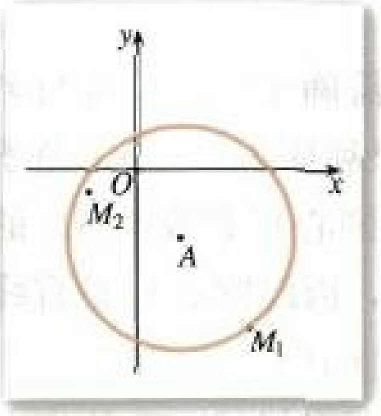


图 4.1-2

探究

点 $M_0(x_0,y_0)$在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内的条件是什么？在圆 $x^2+y^2=r^2$ 外呢？

例 2 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别是 $A(5,1)$，$B(7,-3)$，$C(2,-8)$，求它的外接圆的方程.

分析：不在同一条直线上的三个点可以确定一个圆，三角形有唯一的外接圆.

$\triangle ABC$ 外接圆的圆心是$\triangle ABC$的外心，即$\triangle ABC$三边垂直平分线的交点.

解：设所求圆的方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. ①

因为 $A(5,1)$，$B(7,-3)$，$C(2,-8)$都在圆上，所以它们的坐标都满足方程①. 于是

$$\begin{cases}(5-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\(7-a)^2+(-3-b)^2=r^2,\\(2-a)^2+(-8-b)^2=r^2.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases}a=2,\\b=-3,\\r^2=25.\end{cases}$$

所以，$\triangle ABC$ 的外接圆的方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

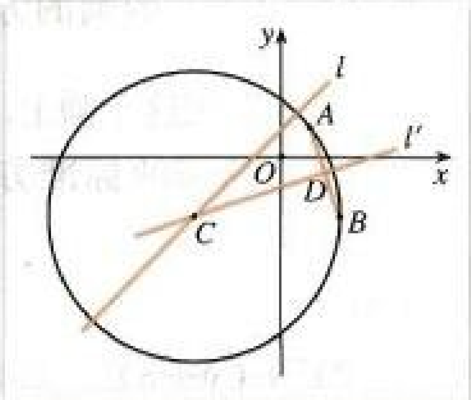


图 4.1-3

例 3 已知圆心为 C 的圆经过点 $A(1,1)$ 和 $B(2,-2)$，且圆心 C 在直线 l：$x-y+1=0$ 上，求圆心为 C 的圆的标准方程.

分析： 如图 4.1-3，确定一个圆只需确定圆心位置与半径大小．圆心为 C 的圆经过点 $A(1,1)$ 和 $B(2,-2)$，由于圆心 C 与 A，B 两点的距离相等，所以圆心 C 在线段 AB 的垂直平分线 l' 上．又圆心 C 在直线 l 上，因此圆心 C 是直线 l 与直线 l' 的交点，半径长等于 $|CA|$ 或 $|CB|$.

解： 因为 $A(1,1)$，$B(2,-2)$，所以线段 AB 的中点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，直线 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{-2-1}{2-1}=-3,$$

因此线段 AB 的垂直平分线 l' 的方程是

$$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right),$$

即

$$x-3y-3=0.$$

圆心 C 的坐标是方程组

$$\begin{cases}x-3y-3=0,\\x-y+1=0\end{cases}$$

的解.

解此方程组，得

$$\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$$

所以圆心 C 的坐标是 $(-3,-2)$.

圆心为 C 的圆的半径长

$$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5.$$

所以，圆心为 C 的圆的标准方程是

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

比较例 2 和例 3，你能归纳求任意 $\triangle ABC$ 外接圆的方程的两种方法吗？

练　习

1. 写出下列圆的标准方程：

(1) 圆心在 $C(-3, 4)$，半径长是$\sqrt{5}$；

(2) 圆心在 $C(8, -3)$，且经过点 $M(5, 1)$.

2. 已知圆的方程是$(x-3)^2+(y+2)^2=16$，利用计算器，判断下列各点在圆上、在圆外、还是在圆内？

(1) $M_1(4.30, -5.72)$；　(2) $M_2(5.70, 1.08)$；　(3) $M_3(3, -6)$.

3. 已知两点 $P_1(4, 9)$，$P_2(6, 3)$，求以线段 P_1P_2 为直径的圆的方程，并判断点 $M(6, 9)$，$N(3, 3)$，$Q(5, 3)$在圆上、在圆内、还是在圆外（可利用计算器）？

4. 已知△AOB 的顶点坐标分别是 $A(4, 0)$，$B(0, 3)$，$O(0, 0)$，求△AOB 外接圆的方程.

4.1.2 圆的一般方程

思考？

方程 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 表示什么图形？方程 $x^2+y^2-2x-4y+6=0$ 表示什么图形？

对方程 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 配方，可得

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4,$$

此方程表示以$(1, -2)$为圆心，2 为半径长的圆.

同样，对方程 $x^2+y^2-2x-4y+6=0$ 配方，得$(x-1)^2+(y-2)^2=-1$．由于不存在点的坐标 (x, y) 满足这个方程，所以这个方程不表示任何图形.

探究

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 在什么条件下表示圆？

我们来研究方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \tag{2}$$

将方程（2）的左边配方，并把常数项移到右边，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad ①$$

（Ⅰ）当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，比较方程①和圆的标准方程，可以看出方程（2）表示以 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径长的圆；

（Ⅱ）当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程（2）只有实数解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，它表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$；

（Ⅲ）当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程（2）没有实数解，它不表示任何图形.

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程（2）表示一个圆. 方程（2）叫做**圆的一般方程**（general equation of circle）.

思考？ 圆的标准方程与圆的一般方程各有什么特点？

例 4　求过三点 $O(0,\ 0)$，$M_1(1,\ 1)$，$M_2(4,\ 2)$ 的圆的方程，并求这个圆的半径长和圆心坐标.

分析： 由于 $O(0,\ 0)$，$M_1(1,\ 1)$，$M_2(4,\ 2)$ 不在同一条直线上，因此经过 O，M_1，M_2 三点有唯一的圆.

解： 设圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \qquad ①$$

因为 O，M_1，M_2 三点都在圆上，所以它们的坐标都是方程①的解. 把它们的坐标依次代入方程①，得到关于 D，E，F 的一个三元一次方程组

$$\begin{cases} F=0, \\ D+E+F+2=0, \\ 4D+2E+F+20=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$D=-8,\ E=6,\ F=0.$$

所以，所求圆的方程是

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

与例 2 的方法比较，你有什么体会？

由前面的讨论可知，所求圆的圆心坐标是(4，−3)，半径长 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=5$.

求圆的方程常用“待定系数法”．用“待定系数法”求圆的方程的大致步骤是：

① 根据题意，选择标准方程或一般方程；

② 根据条件列出关于 a，b，r 或 D，E，F 的方程组；

③ 解出 a，b，r 或 D，E，F，代入标准方程或一般方程.

点 M 的轨迹方程是指点 M 的坐标 $(x，y)$ 满足的关系式.

例 5 已知线段 AB 的端点 B 的坐标是(4，3)，端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程.

分析：如图 4.1-4，点 A 运动引起点 M 运动，而点 A 在已知圆上运动，点 A 的坐标满足方程 $(x+1)^2+y^2=4$．建立点 M 与点 A 坐标之间的关系，就可以建立点 M 的坐标满足的条件，求出点 M 的轨迹方程.

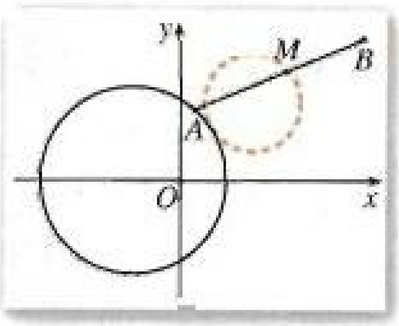


图 4.1-4

解：设点 M 的坐标是 $(x，y)$，点 A 的坐标是 $(x_0，y_0)$．由于点 B 的坐标是(4，3)，且 M 是线段 AB 的中点，所以

$$x=\frac{x_0+4}{2},\quad y=\frac{y_0+3}{2},$$

于是有

$$x_0=2x-4,\ y_0=2y-3. \quad ①$$

因为点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，所以点 A 的坐标满足方程

$$(x+1)^2+y^2=4,$$

即

$$(x_0+1)^2+y_0^2=4. \quad ②$$

把①代入②，得

$$(2x-4+1)^2+(2y-3)^2=4,$$

整理，得

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1.$$

所以，点 M 的轨迹是以 $\left(\frac{3}{2}，\frac{3}{2}\right)$ 为圆心，半径长是 1 的圆.

练 习

1. 求下列各方程表示的圆的圆心坐标和半径长：

(1) $x^2+y^2-6x=0$； (2) $x^2+y^2+2by=0$；

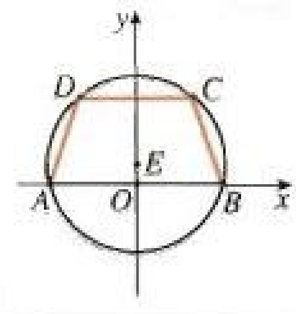
(3) $x^2+y^2-2ax-2\sqrt{3}ay+3a^2=0$.

2. 判断下列方程分别表示什么图形：

(1) $x^2+y^2=0$； (2) $x^2+y^2-2x+4y-6=0$；

(3) $x^2+y^2+2ax-b^2=0$.

3. 如图，等腰梯形 $ABCD$ 的底边长分别为 6 和 4，高为 3，求这个等腰梯形的外接圆的方程，并求这个圆的圆心坐标和半径长.



（第 3 题）

习题4.1

A 组

1. 求下列各圆的圆心坐标和半径长，并画出它们的图形：

(1) $x^2+y^2-2x-5=0$； (2) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$；

(3) $x^2+y^2+2ax=0$； (4) $x^2+y^2+2by-2b^2=0$.

2. 求下列各圆的方程，并画出图形：

(1) 圆心为点 $C(8,-3)$，且过点 $A(5,1)$；

(2) 过 $A(-1,5)$，$B(5,5)$，$C(6,-2)$ 三点.

3. 已知圆 C 的圆心在直线 l：$x-2y-1=0$ 上，并且经过原点和 $A(2,1)$，求圆 C 的标准方程.

4. 圆 C 的圆心在 x 轴上，并且过点 $A(-1,1)$ 和 $B(1,3)$，求圆 C 的方程.

5. 已知圆的一条直径的端点分别是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求证此圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

6. 平面直角坐标系中有 $A(0,1)$，$B(2,1)$，$C(3,4)$，$D(-1,2)$ 四点，这四点能否在同一个圆上？为什么？

B 组

1. 等腰三角形的顶点 A 的坐标是(4，2)，底边一个端点 B 的坐标是(3，5)，求另一个端点 C 的轨迹方程，并说明它是什么图形.
2. 长为 $2a$ 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，求线段 AB 的中点的轨迹方程.
3. 已知点 M 与两个定点 $O(0,\ 0)$，$A(3,\ 0)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$，求点 M 的轨迹方程.

坐标法与机器证明

笛卡儿创立坐标系，使几何问题的求解或求证通过坐标转化为代数方程求解. 代数方程的求解是一个计算问题，有了坐标，使计算机进入到几何定理的证明中来成为可能.

明确提出机器可以成为推理工具的思想，要追溯到 17 世纪德国数学家莱布尼兹(Leibniz，1646—1716，微积分创始人之一). 他受笛卡儿思想的启发，认为笛卡儿创立的解析几何，目的是将几何推理转化为计算. 遗憾的是，由于当时的条件限制，计算仅仅是手工操作（手摇计算机），无法进行大量复杂的计算，所以用机器实现几何定理证明的想法无法实现.

20 世纪以后，计算机迅速发展. 计算机的发明使一些数学家又开始探讨几何定理证明机械化的可能性. 1950 年，波兰数学家塔斯基得到一个引人注目的结论：一切初等几何范畴中的命题都可以用机械方法判定. 由于他的判定方法太复杂，在实践中没有太大的进展. 1959 年，美籍华裔数学家王浩（1921—1999）在这方面做出了鼓舞人心的工作，他在计算机上只用了 9 分钟就证明了《数学原理》（罗素和怀特海著）中的 350 多个命题，并第一次明确提出了“走向数学的机械化”的口号.

20 世纪 70 年代以后，我国著名数学家吴文俊[1]在几何定理机器证明上作出了重大贡献，并创立了“吴方法”.

吴文俊机器证明的思想，主要是从笛卡儿的坐标法和中国古代解方程的计算方法而来

[1] 中科院院士. 在拓扑学、自动推理、机器证明、代数几何、中国数学史、对策论等研究领域均有杰出的贡献. 2001 年获首届国家最高科学技术奖.

的. 他认为，欧氏几何体系的特点是纯粹在空间形式间推理，或说在图形之间，或者是把数量关系归之于空间形式，或者干脆排除掉数量关系. 另一个体系刚好与之相反，是把空间形式转化成数量关系来处理. 这种考虑方式就是中国的传统，早在11世纪左右就已产生，当时引进的概念叫天元、地元等，用现在的符号就相当于引进了 x，y 等. 用天元、地元表示某一个几何事实，那么几何对象之间的相互关系就表示成天元、地元之间的一种方程（即 x，y 之间的一种方程），即17世纪解析几何的坐标法.

吴文俊（1919— ）

吴文俊认为，欧氏几何体系是非机械化的，把空间形式数量化是机械化的. 吴文俊说："对于几何，对于研究空间形式，你要真正腾飞，不通过数量关系，我想不出有什么好办法."“我从事几何定理证明时，首先取适当的坐标，于是几何定理的假设与终结通常都成为多项式方程，称之为假设方程与终结方程. 满足定理假设的几何图象，就相当于假设方程组的一个解答或零点. 要证明定理成立，就是要证明假设方程的零点也使终结多项式为零."由于计算机的发展与众多数学家（特别是以吴文俊为首的一批中国数学家）的努力，大约在1976与1977年之交，几何定理机器证明的梦想终于实现了.

4.2 直线、圆的位置关系

问题 一艘轮船在沿直线返回港口的途中，接到气象台的台风预报：台风中心位于轮船正西 70 km 处，受影响的范围是半径长为 30 km 的圆形区域．已知港口位于台风中心正北 40 km 处，如果这艘轮船不改变航线，那么它是否会受到台风的影响？

> 如果不建立直角坐标系，你能解决这个问题吗？

为解决这个问题，我们以台风中心为原点 O，东西方向为 x 轴，建立图 4.2-1 所示的直角坐标系，其中，取10 km为单位长度．

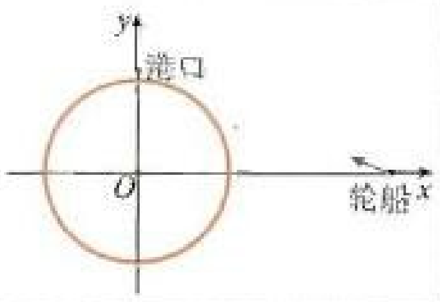


图 4.2-1

这样，受台风影响的圆形区域所对应的圆心为 O 的圆的方程为

$$x^2+y^2=9;$$

轮船航线所在直线 l 的方程为

$$4x+7y-28=0;$$

问题归结为圆心为 O 的圆与直线 l 有无公共点．

4.2.1 直线与圆的位置关系

由平面几何知，直线与圆有三种位置关系：

(1) 直线与圆相交，有两个公共点；

(2) 直线与圆相切，只有一个公共点；

(3) 直线与圆相离，没有公共点．

思考？ 在初中，我们怎样判断直线与圆的位置关系？现在，如何用直线的方程和圆的方程判断它们之间的位置关系？

下面我们先看几个例子.

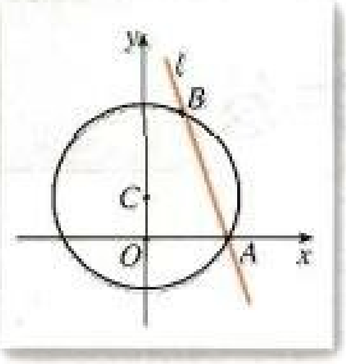


图 4.2-2

例 1 如图 4.2-2，已知直线 l：$3x+y-6=0$ 和圆心为 C 的圆 $x^2+y^2-2y-4=0$，判断直线 l 与圆的位置关系；如果相交，求它们交点的坐标.

分析：方法一，判断直线 l 与圆的位置关系，就是看由它们的方程组成的方程组有无实数解；方法二，可以依据圆心到直线的距离与半径长的关系，判断直线与圆的位置关系.

解法一：由直线 l 与圆的方程，得

$$\begin{cases}3x+y-6=0, & ①\\ x^2+y^2-2y-4=0. & ②\end{cases}$$

消去 y，得

$$x^2-3x+2=0,$$

因为

$$\begin{aligned}\Delta &=(-3)^2-4\times1\times2\\ &=1>0,\end{aligned}$$

所以，直线 l 与圆相交，有两个公共点.

解法二：圆 $x^2+y^2-2y-4=0$ 可化为 $x^2+(y-1)^2=5$，其圆心 C 的坐标为 $(0,1)$，半径长为 $\sqrt{5}$，点 $C(0,1)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}<\sqrt{5}.$$

所以，直线 l 与圆相交，有两个公共点.

由 $x^2-3x+2=0$，解得

$$x_1=2,\ x_2=1.$$

把 $x_1=2$ 代入方程①，得 $y_1=0$；

把 $x_2=1$ 代入方程①，得 $y_2=3$.

所以，直线 l 与圆有两个交点，它们的坐标分别是

$$A(2,0),\ B(1,3).$$

例 2 已知过点 $M(-3,-3)$ 的直线 l 被圆 $x^2+y^2+4y-21=0$ 所截得的弦长为 $4\sqrt{5}$，求直线 l 的方程.

解：将圆的方程写成标准形式，得

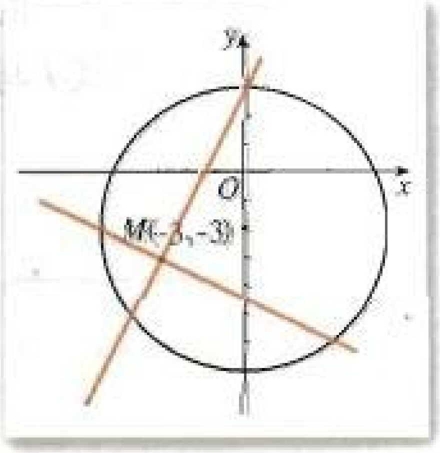


图 4.2-3

适当地利用图形的几何性质，有助于简化计算.

$$x^2+(y+2)^2=25,$$

所以，圆心的坐标是(0，−2)，半径长 $r=5$.

如图 4.2-3，因为直线 l 被圆所截得的弦长是 $4\sqrt{5}$，所以弦心距为

$$\sqrt{5^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{5},$$

即圆心到所求直线 l 的距离为$\sqrt{5}$.

因为直线 l 过点 $M(-3,-3)$，所以可设所求直线 l 的方程为

$$y+3=k(x+3),$$

即

$$kx-y+3k-3=0.$$

根据点到直线的距离公式，得到圆心到直线 l 的距离

$$d=\frac{|2+3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

因此，

$$\frac{|2+3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5},$$

即

$$|3k-1|=\sqrt{5+5k^2},$$

两边平方，并整理得到

$$2k^2-3k-2=0,$$

解得

$$k=-\frac{1}{2}，\text{或 } k=2.$$

所以，所求直线 l 有两条，它们的方程分别为

$$y+3=-\frac{1}{2}(x+3),$$

或

$$y+3=2(x+3).$$

即

$$x+2y+9=0，\text{或 } 2x-y+3=0.$$

通过上述例子我们可以发现：判断直线 l 与圆 C 的位置关系有两种方法．一种方法是，判断直线 l 与圆 C 的方程组成的方程组是否有解．如果有解，直线 l 与圆 C 有公共点．有两组实数解时，直线 l 与圆 C 相交；有一组实数解时，直线 l 与圆 C 相切；无实数解时，直线 l 与圆 C 相离．另一种

方法是，判断圆 C 的圆心到直线 l 的距离 d 与圆的半径 r 的关系．如果 $d<r$，直线 l 与圆 C 相交；如果 $d=r$，直线 l 与圆 C 相切；如果 $d>r$，直线 l 与圆 C 相离．

练 习

1．试解本节引言中的问题．

2．已知直线 $4x+3y-35=0$ 与圆心在原点的圆 C 相切，求圆 C 的方程．

3．判断直线 $3x+4y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的位置关系．

4．已知直线 l：$y=x+6$，圆 C：$x^2+y^2-2y-4=0$．试判断直线 l 与圆 C 有无公共点，有几个公共点．

4.2.2 圆与圆的位置关系

前面我们运用直线与圆的方程，研究了直线与圆的位置关系．现在我们运用圆的方程，研究圆与圆的位置关系．

思考？ 圆与圆的位置关系有哪几种？如何根据圆的方程，判断它们之间的位置关系？

例 3 已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+8y-8=0$，圆 C_2：$x^2+y^2-4x-4y-2=0$，试判断圆 C_1 与圆 C_2 的关系．

分析： 方法一，圆 C_1 与圆 C_2 有几个公共点，由它们的方程组成的方程组有几组实数解确定；方法二，可以依据连心线的长与两半径长的和 r_1+r_2 或两半径长的差的绝对值 $|r_1-r_2|$ 的大小关系，判断两圆的位置关系．

解法一： 圆 C_1 与圆 C_2 的方程联立，得到方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+8y-8=0, & ① \\ x^2+y^2-4x-4y-2=0. & ② \end{cases}$$

画出圆 C_1 与圆 C_2 以及方程③表示的直线，你发现了什么？你能说明为什么吗？

①－②，得

$$x+2y-1=0, \quad ③$$

由③，得

$$y=\frac{1-x}{2},$$

把上式代入①，并整理，得

$$x^2-2x-3=0. \quad ④$$

方程④根的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=(-2)^2-4\times1\times(-3)\\&=16>0,\end{aligned}$$

所以，方程④有两个不相等的实数根 x_1，x_2，把 x_1，x_2 分别代入方程③，得到 y_1，y_2.

因此圆 C_1 与圆 C_2 有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

本题只要判断圆 C_1 与圆 C_2 是否有公共点，并不需求出公共点的坐标，因此不必解方程①，具体求出两个实数根.

解法二：把圆 C_1 的方程化成标准方程，得

$$(x+1)^2+(y+4)^2=25.$$

圆 C_1 的圆心是点 $(-1,-4)$，半径长 $r_1=5$.

把圆 C_2 的方程化成标准方程，得

$$(x-2)^2+(y-2)^2=10,$$

圆 C_2 的圆心是点 $(2,2)$，半径长 $r_2=\sqrt{10}$.

圆 C_1 与圆 C_2 的连心线的长为

$$\sqrt{(-1-2)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{5},$$

圆 C_1 与圆 C_2 的两半径长之和是

$$r_1+r_2=5+\sqrt{10},$$

两半径长之差

$$r_1-r_2=5-\sqrt{10}.$$

而 $5-\sqrt{10}<3\sqrt{5}<5+\sqrt{10}$，即 $r_1-r_2<3\sqrt{5}<r_1+r_2$，所以圆 C_1 与圆 C_2 相交（图 4.2-4），它们有两个公共点 A，B.

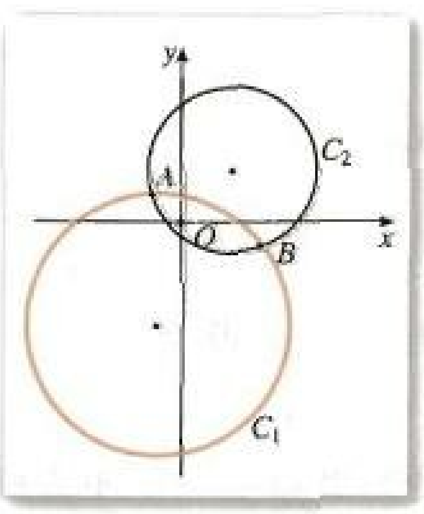


图 4.2-4

练　习

已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+3y+1=0$，圆 C_2：$x^2+y^2+4x+3y+2=0$，判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系.

4.2.3 直线与圆的方程的应用

直线与圆的方程在生产、生活实践以及数学中有着广泛的应用，本节通过几个例子说明直线与圆的方程在实际生活以及平面几何中的应用.

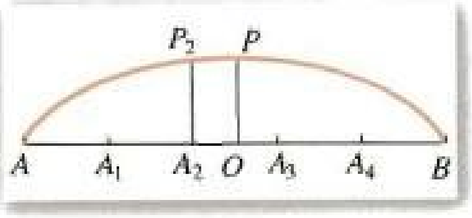


图 4.2-5

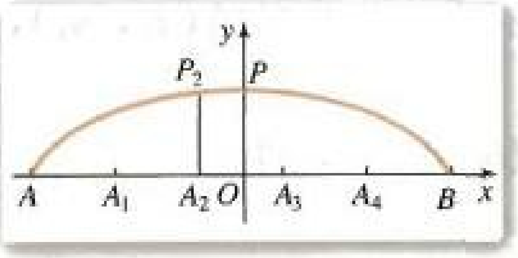


图 4.2-6

例 4 图 4.2-5 是某圆拱形桥一孔圆拱的示意图. 这个圆的圆拱跨度 $AB=20$ m，拱高 $OP=4$ m，建造时每间隔 4 m 需要用一根支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的高度（精确到 0.01 m).

分析：建立图 4.2-6 所示直角坐标系，只需求出 P_2 的纵坐标，就可得出支柱 A_2P_2 的高度.

解：建立图 4.2-6 所示的直角坐标系，使圆心在 y 轴上. 设圆心的坐标是$(0, b)$，圆的半径是 r，那么圆的方程是

$$x^2+(y-b)^2=r^2.$$

下面确定 b 和 r 的值.

因为 P，B 都在圆上，所以它们的坐标$(0, 4)$，$(10, 0)$都满足方程 $x^2+(y-b)^2=r^2$. 于是，得到方程组

$$\begin{cases}0^2+(4-b)^2=r^2,\\10^2+(0-b)^2=r^2.\end{cases}$$

解得

$$b=-10.5,\ r^2=14.5^2.$$

所以，圆的方程是

$$x^2+(y+10.5)^2=14.5^2.$$

把点 P_2 的横坐标 $x=-2$ 代入圆的方程，得

$$(-2)^2+(y+10.5)^2=14.5^2,$$

即 $y+10.5=\sqrt{14.5^2-(-2)^2}$（$P_2$ 的纵坐标 $y>0$，平方根取正值). 所以

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{14.5^2-(-2)^2}-10.5\\&\approx14.36-10.5\\&=3.86\ (\text{m}).\end{aligned}$$

答：支柱 A_2P_2 的高度约为 3.86 m.

如果不建立坐标系，你能解决这个问题吗？

例 5　已知内接于圆的四边形的对角线互相垂直，求证圆心到一边的距离等于这条边所对边长的一半.

分析：如图 4.2-7，选择互相垂直的两条对角线所在的直线为坐标轴. 本题关键是求出圆心 O' 的坐标. 过 O' 作 AC 的垂线，垂足为 M，M 是 AC 的中点，垂足 M 的横坐标与 O' 的横坐标一致. 同法可求出 O' 的纵坐标.

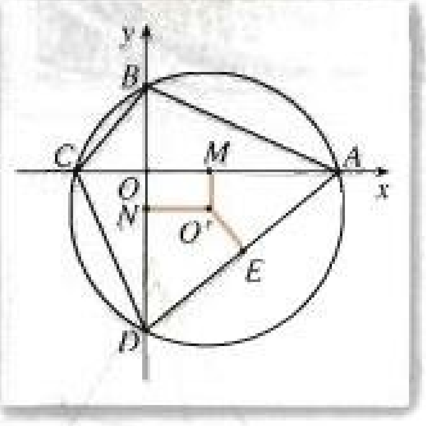


图 4.2-7

$x_{O'}$，$y_{O'}$ 分别表示点 O' 的横坐标和纵坐标.

证明：如图 4.2-7，以四边形 $ABCD$ 互相垂直的对角线 CA，DB 所在直线分别为 x 轴，y 轴，建立直角坐标系. 设 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$C(c,0)$，$D(0,d)$.

过四边形 $ABCD$ 外接圆的圆心 O' 分别作 AC，BD，AD 的垂线，垂足分别为 M，N，E，则 M，N，E 分别是线段 AC，BD，AD 的中点. 由线段的中点坐标公式，得

$$x_{O'}=x_M=\frac{a+c}{2},\ y_{O'}=y_N=\frac{b+d}{2},\ x_E=\frac{a}{2},\ y_E=\frac{d}{2}.$$

所以，

$$|O'E|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}.$$

又

$$|BC|=\sqrt{b^2+c^2},$$

所以，

$$|O'E|=\frac{1}{2}|BC|.$$

用坐标方法解决几何问题时，先用坐标和方程表示相应的几何元素：点、直线、圆，将几何问题转化为代数问题；然后通过代数运算解决代数问题；最后解释代数运算结果的几何含义，得到几何问题的结论. 这就是用坐标方法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

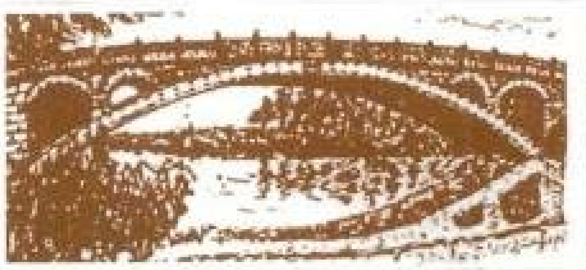
第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果“翻译”成几何结论.

练 习

1. 求直线 l：$2x-y-2=0$ 被圆 C：$(x-3)^2+y^2=9$ 所截得的弦长.

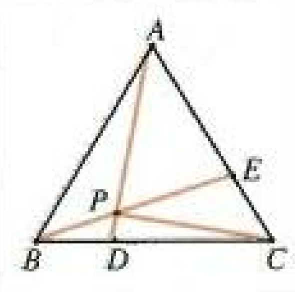
2. 赵州桥的跨度是 37.4 m，圆拱高约为 7.2 m. 求这座圆拱桥的拱圆的方程.



（第 2 题）

3. 某圆拱桥的水面跨度 20 m，拱高 4 m. 现有一船，宽 10 m，水面以上高 3 m，这条船能否从桥下通过？

4. 等边△ABC 中，点 D，E 分别在边 BC，AC 上，且 $|BD|=\frac{1}{3}|BC|$，$|CE|=\frac{1}{3}|CA|$，AD，BE 相交于点 P. 求证 $AP\perp CP$.



（第 4 题）

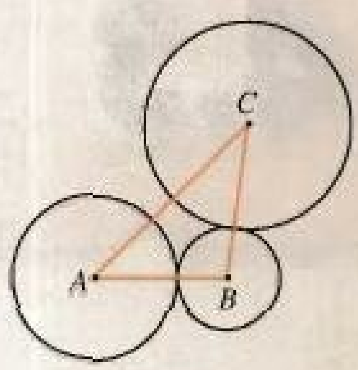
习题 4.2

A 组

1. 判断直线 $4x-3y=50$ 与圆 $x^2+y^2=100$ 的位置关系. 如果相交，求出交点坐标.
2. 求下列条件确定的圆的方程，并画出它们的图形：
   (1) 圆心为 $M(3,\ -5)$，且与直线 $x-7y+2=0$ 相切；
   (2) 圆心在 y 轴上，半径长是 5，且与直线 $y=6$ 相切.
3. 求以 $N(1,\ 3)$ 为圆心，并且与直线 $3x-4y-7=0$ 相切的圆的方程.
4. 求圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，并且经过圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 与圆 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点的圆的方程.
5. 求直线 l：$3x-y-6=0$ 被圆 C：$x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦 AB 的长.
6. 求圆心在直线 $3x-y=0$ 上，与 x 轴相切，且被直线 $x-y=0$ 截得的弦长为$2\sqrt{7}$的圆的方程.
7. 求与圆 C：$x^2+y^2-x+2y=0$ 关于直线 l：$x-y+1=0$ 对称的圆的方程.
8. Rt△ABC 中，斜边 BC 为 m，以 BC 的中点 O 为圆心，作半径为 $n\left(n<\frac{m}{2}\right)$ 的圆，分别交 BC 于 P，Q 两点，求证 $|AP|^2+|AQ|^2+|PQ|^2$ 为定值.
9. 求圆 $x^2+y^2-4=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 的公共弦的长.
10. 求经过点 $M(2,\ -2)$ 以及圆 $x^2+y^2-6x=0$ 与 $x^2+y^2=4$ 交点的圆的方程.
11. 求经过点 $M(3,\ -1)$，且与圆 C：$x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $N(1,\ 2)$ 的圆的方程.

B 组

1. 如图，某台机器的三个齿轮，A 与 B 啮合，C 与 B 也啮合. 若 A 轮的直径为 200 cm，B 轮的直径为 120 cm，C 轮的直径为250 cm，且$\angle A=45°$. 试建立适当的坐标系，用坐标法求出 A，C 两齿轮的中心距离（精确到 1 cm）.

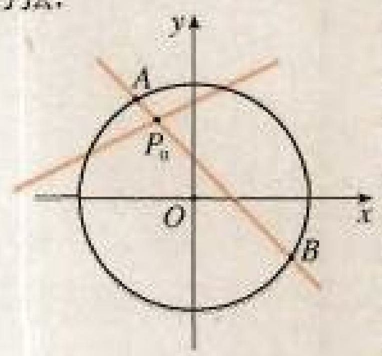


（第 1 题）

2. 已知点 $A(-2,\ -2)$，$B(-2,\ 6)$，$C(4,\ -2)$，点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 的最大值和最小值.
3. 已知圆 $x^2+y^2=4$，直线 l：$y=x+b$. 当 b 为何值时，圆 $x^2+y^2=4$ 上恰有 3 个点到直线 l 的距离都等于 1.
4. 如图，圆 $x^2+y^2=8$ 内有一点 $P_0(-1,\ 2)$，AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦.

   (1) 当 $\alpha=135°$时，求 AB 的长；

   (2) 当弦 AB 被点 P_0 平分时，写出直线 AB 的方程.



（第 4 题）

5. 已知点 $P(-2,-3)$和以 Q 为圆心的圆$(x-4)^2+(y-2)^2=9$.

   (1) 画出以 PQ 为直径，Q'为圆心的圆，再求出它的方程；

   (2) 作出以 Q 为圆心的圆和以 Q' 为圆心的圆的两个交点 A，B. 直线 PA，PB 是以 Q 为圆心的圆的切线吗？为什么？

   (3) 求直线 AB 的方程.

4.3 空间直角坐标系

我们知道，数轴 Ox 上的点 M，可用与它对应的实数 x 表示；直角坐标平面上的点 M 可以用一对有序实数 (x, y) 表示.

当建立空间直角坐标系后，空间中的点可用有序实数组 (x, y, z) 表示.

4.3.1 空间直角坐标系

如图 4.3-1，$OABC\text{-}D'A'B'C'$ 是单位正方体. 以 O 为原点，分别以射线 OA，OC，OD' 的方向为正方向，以线段 OA，OC，OD' 的长为单位长，建立三条数轴：x 轴、y 轴、z 轴. 这时我们说建立了一个**空间直角坐标系** $Oxyz$，其中点 O 叫做**坐标原点**，x 轴、y 轴、z 轴叫做**坐标轴**. 通过每两个坐标轴的平面叫做**坐标平面**，分别称为 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面.

在平面上画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般使 $\angle xOy=135°$，$\angle yOz=90°$.

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，如果中指指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为**右手直角坐标系**. 如无特别说明，本书建立的坐标系都是右手直角坐标系.

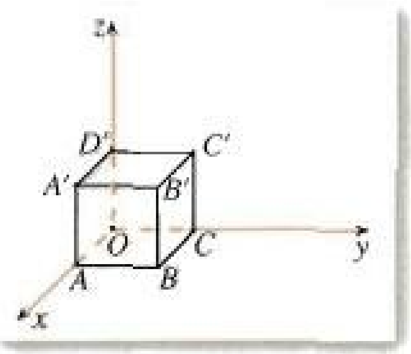


图 4.3-1

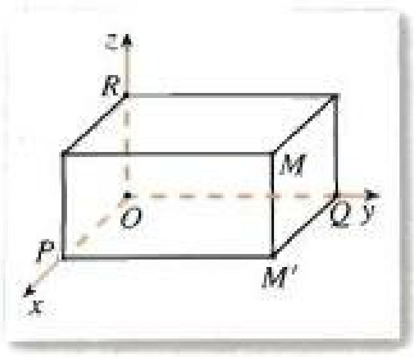


图 4.3-2

如图 4.3-2，设点 M 为空间的一个定点，过点 M 分别

作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，依次交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P，Q 和 R. 设点 P，Q 和 R 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z，那么点 M 就对应唯一确定的有序实数组 (x, y, z).

反过来，给定有序实数组 (x, y, z)，我们可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上依次取坐标为 x，y 和 z 的点 P，Q 和 R，分别过 P，Q 和 R 各作一个平面，分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，这三个平面的唯一的交点就是有序实数组 (x, y, z) 确定的点 M.

这样，空间一点 M 的坐标可以用有序实数组 (x, y, z) 来表示，有序实数组 (x, y, z) 叫做点 M 在此**空间直角坐标系中的坐标**，记作 $M(x, y, z)$. 其中 x 叫做点 M 的**横坐标**，y 叫做点 M 的**纵坐标**，z 叫做点 M 的**竖坐标**.

> 请标出图 4.3-1 中，位于 yOz 平面上点 C'，D' 的坐标；以及 zOx 平面上点 A' 的坐标.

在图 4.3-1 中，点 O，A，B，C 的坐标分别是 $(0, 0, 0)$，$(1, 0, 0)$，$(1, 1, 0)$，$(0, 1, 0)$，这四点在 xOy 平面上，它们的竖坐标都是零. 点 B' 的坐标是 $(1, 1, 1)$.

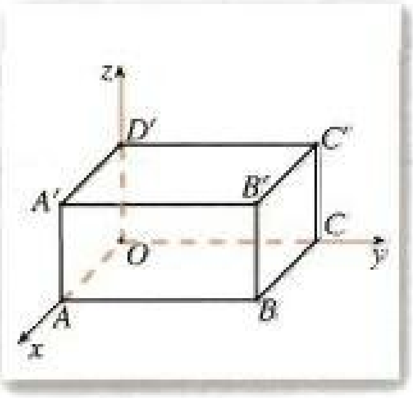


图 4.3-3

例 1 如图 4.3-3，在长方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中，$|OA|=3$，$|OC|=4$，$|OD'|=2$. 写出 D'，C，A'，B' 四点的坐标.

解：D' 在 z 轴上，且 $OD'=2$，它的竖坐标是 2；它的横坐标 x 与纵坐标 y 都是零，所以点 D' 的坐标是 $(0, 0, 2)$.

点 C 在 y 轴上，且 $OC'=4$，它的纵坐标是 4；它的横坐标 x 与竖坐标 z 都是零，所以点 C 的坐标是 $(0, 4, 0)$.

同理，点 A' 的坐标是 $(3, 0, 2)$.

点 B' 在 xOy 平面上的射影是 B，因此它的横坐标 x 与纵坐标 y 同点 B 的横坐标 x 与纵坐标 y 相同. 在 xOy 平面上，点 B 横坐标 $x=3$，纵坐标 $y=4$；点 B' 在 z 轴上的射影是 D'，它的竖坐标与点 D' 的竖坐标相同，点 D' 的竖坐标 $z=2$.

所以点 B' 的坐标是 $(3, 4, 2)$.

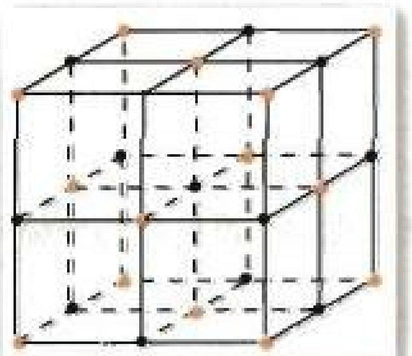


图 4.3-4

例 2 结晶体的基本单位称为晶胞，图 4.3-4 是食盐晶胞的示意图（可看成是八个棱长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方体堆积成的正方体），其中色点代表钠原子，黑点代表氯原子. 如

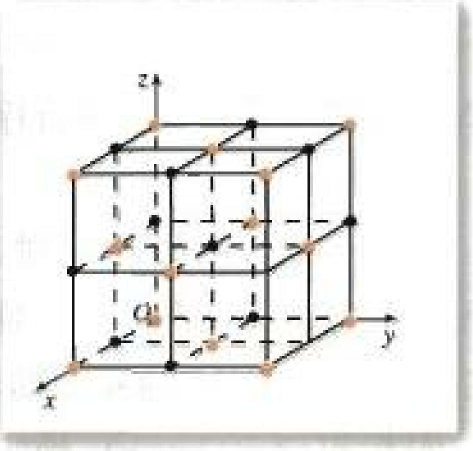


图 4.3-5

图 4.3-5，建立空间直角坐标系 $Oxyz$ 后，试写出全部钠原子所在位置的坐标.

解：把图中的钠原子分成下、中、上三层来写它们所在位置的坐标.

下层的原子全部在 xOy 平面上，它们所在位置的竖坐标全是 0，所以这五个钠原子所在位置的坐标分别是

$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$；

中层的原子所在的平面平行于 xOy 平面，与 z 轴交点的竖坐标为$\frac{1}{2}$，所以，这四个钠原子所在位置的坐标分别是

$\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$；

上层的原子所在的平面平行于 xOy 平面，与 z 轴交点的竖坐标为 1，所以，这五个钠原子所在位置的坐标分别是

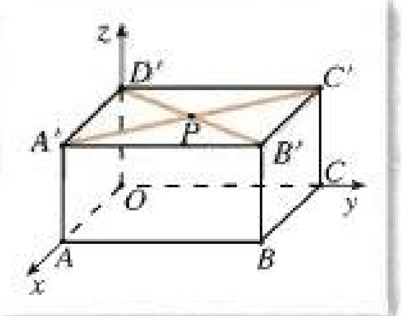
$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

练 习

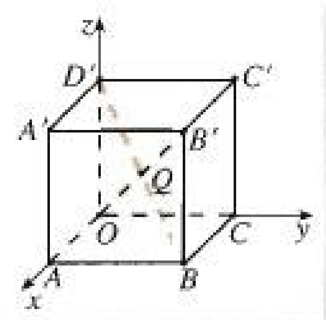
1. 在空间直角坐标系中标出下列各点：

   $A(0,\ 2,\ 4)$，$B(1,\ 0,\ 5)$，$C(0,\ 2,\ 0)$，$D(1,\ 3,\ 4)$.

2. 如图，长方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中，$|OA|=3$，$|OC|=4$，$|OD'|=3$，$A'C'$ 与 $B'D'$ 相交于点 P. 分别写出点 C，B'，P 的坐标.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，棱长为 a 的正方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中，对角线 OB' 于 BD' 相交于点 Q. 顶点 O 为坐标原点，OA，OC 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上. 试写出点 Q 的坐标.

4.3.2 空间两点间的距离公式

距离是几何中的基本度量，几何问题和一些实际问题经常涉及距离，如建筑设计中常常需要计算空间两点间的距离．你能用两点的坐标表示这两点间的距离吗？

思考？

类比平面两点间距离公式的推导，你能猜想一下空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离公式吗？

现在，我们研究空间两点间的距离．

先看简单的情形．

设在空间直角坐标系中点 P 的坐标是 (x, y, z)，求点 P 到坐标原点 O 的距离．

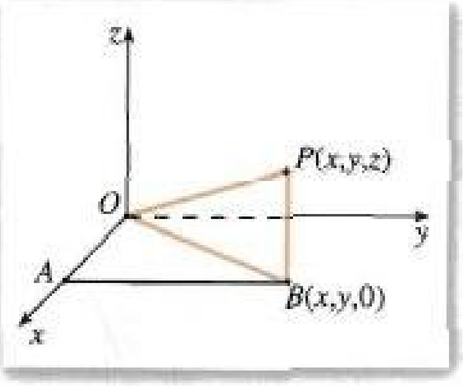


图 4.3-6

如图 4.3-6，设点 P 在 xOy 平面上的射影是 B，则点 B 的坐标是 $(x, y, 0)$．

在 xOy 平面上，有 $|OB|=\sqrt{x^2+y^2}$．

在 Rt$\triangle OBP$ 中，根据勾股定理，

$$|OP|=\sqrt{|OB|^2+|BP|^2},$$

因为 $|BP|=|z|$，所以 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．

这说明，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，任意一点 $P(x, y, z)$ 与原点间的距离

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

探究

如果 $|OP|$ 是定长 r，那么 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 表示什么图形？

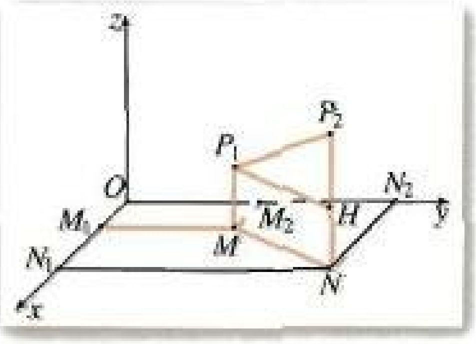


图 4.3-7

如图 4.3-7，设点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点，且点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 在 xOy 平面上的射影分别为 M，N，那么 M，N 的坐标为 $M(x_1, y_1, 0)$，$N(x_2, y_2, 0)$．

在 xOy 平面上，$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$．

过点 P_1 作 P_2N 的垂线，垂足为 H，则

$|MP_1|=|z_1|$，$|NP_2|=|z_2|$，

所以 $|HP_2|=|z_2-z_1|$.

在 Rt$\triangle P_1HP_2$ 中，

$$|P_1H|=|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

根据勾股定理，得

$$|P_1P_2|=\sqrt{|P_1H|^2+|HP_2|^2}$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

因此，空间中点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

练　习

1. 先在空间直角坐标系中标出 A，B 两点，再求它们之间的距离：

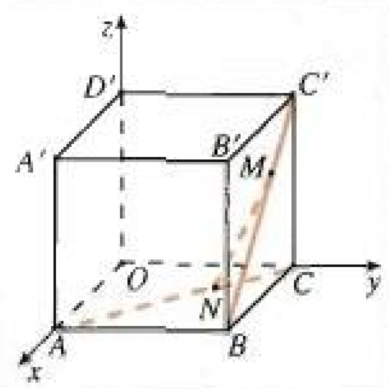
   (1) $A(2, 3, 5)$，$B(3, 1, 4)$；

   (2) $A(6, 0, 1)$，$B(3, 5, 7)$.

2. 在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1, 0, 2)$ 与点 $B(1, -3, 1)$ 的距离相等.

3. 求证：以 $A(10, -1, 6)$，$B(4, 1, 9)$，$C(2, 4, 3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

4. 如图，正方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 的棱长为 a，$|AN|=2|CN|$，$|BM|=2|MC'|$. 求 MN 的长.



（第 4 题）

习题4.3

A 组

1. 点 $M(x, y, z)$ 是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点，写出满足下列条件的点的坐标：

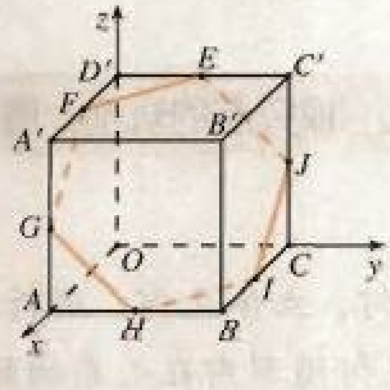
 (1) 与点 M 关于 x 轴对称的点；

 (2) 与点 M 关于 y 轴对称的点；

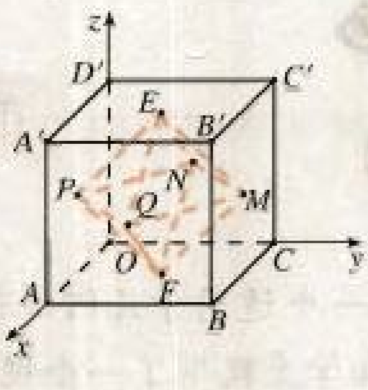
 (3) 与点 M 关于 z 轴对称的点；

 (4) 与点 M 关于原点对称的点.

2. 如图，正方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 的棱长为 a，E，F，G，H，I，J 分别是棱 $C'D'$，$D'A'$，$A'A$，AB，BC，CC' 的中点，写出正六边形 $EFGHIJ$ 各顶点的坐标.



（第 2 题）



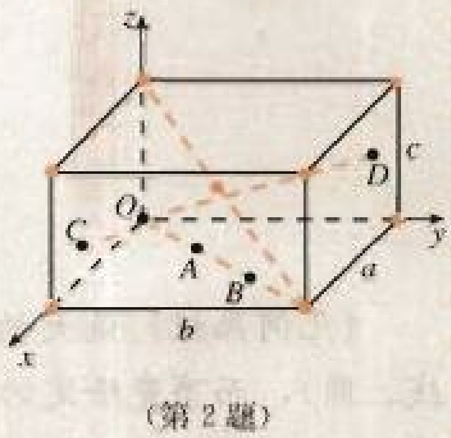
（第 3 题）

3. 如图，正方体的棱长为 a，且正方体各面的中心是一个几何体的顶点，求这个几何体的棱长.

B 组

1. 求证：以 $A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

2. 金红石（TiO_2）的晶胞如图所示. 图中色点代表钛原子，黑点代表氧原子. 长方体的 8 个顶点和中心是钛原子，4 个氧原子的位置是 $A(0.31a, 0.31b, 0)$、$B(0.69a, 0.69b, 0)$、$C(0.81a, 0, 0.5c)$ 和 $D(0.19a, 0.81b, 0.5c)$. 中心处钛原子与 A 处氧原子间的距离叫做键长. 当 $a=b$ 时，试求键长.



（第 2 题）