义务教育教科书

（五·四学制）

数学

八年级

下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群

副 主 编：田载今　薛　彬　李海东

本册主编：李龙才

主要编写人员：俞求是　张劲松　田载今　章建跃　吴增生

责任编辑：张唯一

美术编辑：王俊宏

封面设计：吕　旻　王俊宏

插　　图：王俊宏　文鲁工作室（封面）

义务教育教科书（五·四学制）　数学　八年级　下册

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　　版　人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

网　　址　http://www.pep.com.cn

重　　印　××× 出版社

发　　行　××× 新华书店

印　　刷　××× 印刷厂

版　　次　2014 年 10 月第 1 版

印　　次　　　年　月第　次印刷

开　　本　787 毫米 ×1092 毫米　1/16

印　　张　7.75

字　　数　126 千字

印　　数　　　册

书　　号　ISBN 978-7-107-29003-9

定　　价　　　元

本册导引

亲爱的同学，新学期开始了。

摆在你面前的这本书，是我们根据《义务教育数学课程标准（2011 年版）》编写的教科书的八年级下册。现在我们一起来看看这本书的内容。

三角形中还有许多奥秘等着你去探究。你知道直角三角形的三条边有什么关系吗？请你到 **“勾股定理”** 中去探索。在探索的过程中，你会由衷地感叹数学的美妙与和谐。

在我们生活的世界随处可见平行四边形的身影，各种各样的平行四边形装点着我们的生活，给我们带来美的感受。一般的平行四边形与特殊的平行四边形——矩形、菱形、正方形之间有什么联系和区别？它们有怎样的性质？通过 **“平行四边形”** 一章的学习，你会对这些问题有更深的认识。

我们生活在变化的世界中，时间的推移、人口的增长、水位的升降……变化的例子举不胜举，函数将给你提供描述这些变化的一种数学工具。通过分析实际问题中的变量关系，得到相应的函数，你就能利用它解决非常广泛的问题。学习了 **“一次函数”**，你会对这些有所体会。

你已经掌握了用一元一次方程解决实际问题的方法。在解决某些实际问题时还会遇到一种新方程——一元二次方程。怎样解这种方程，并运用这种方程解决一些实际问题呢？学了 **“一元二次方程”** 一章，你就会获得答案。

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，继续畅游神奇、美妙的数学世界吧！

目　　录

第二十四章　勾股定理

第二十五章　平行四边形

第二十六章　一次函数

第二十七章　一元二次方程

第二十四章　勾股定理

章前图中左侧的图案是 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽，它与数学中著名的勾股定理有着密切关系.

在我国古代，人们将直角三角形中短的直角边叫做勾，长的直角边叫做股，斜边叫做弦. 根据我国古代数学书《周髀算经》记载，在约公元前 11 世纪，人们就已经知道，如果勾是三、股是四，那么弦是五. 后来人们进一步发现并证明了关于直角三角形三边之间的关系——两条直角边的平方和等于斜边的平方，这就是勾股定理.

本章我们将探索并证明勾股定理及其逆定理，并运用这两个定理去解决有关问题. 由此可以加深对直角三角形的认识.

24.1 勾股定理

相传 2 500 多年前，毕达哥拉斯有一次在朋友家作客时，发现朋友家用砖铺成的地面图案反映了直角三角形三边的某种数量关系．我们也来观察一下地面的图案（图 24.1-1），看看能从中发现什么数量关系．

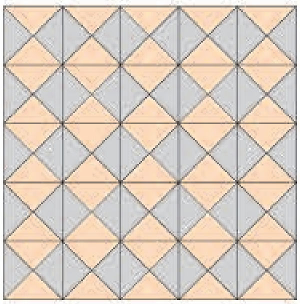
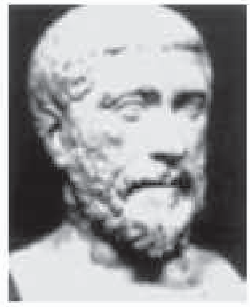


图 24.1-1



毕达哥拉斯（Pythagoras，约前580—约前 500），古希腊著名的哲学家、数学家、天文学家．

思考

图 24.1-2 中三个正方形的面积有什么关系？等腰直角三角形的三边之间有什么关系？

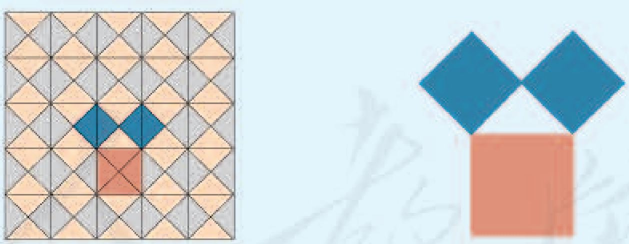


图 24.1-2

可以发现，以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和，等于以斜边为边长的大正方形的面积．即等腰直角三角形的三边之间有一种特殊的关系：斜边的平方等于两直角边的平方和．

看似平淡无奇的现象有时却蕴含着深刻的道理．

探究

等腰直角三角形有上述性质，其他的直角三角形也有这个性质吗？图 24.1-3 中，每个小方格的面积均为 1，请分别算出图中正方形 A，B，C，A′，B′，C′的面积，看看能得出什么结论.（提示：以斜边为边长的正方形的面积，等于某个正方形的面积减去 4 个直角三角形的面积.）

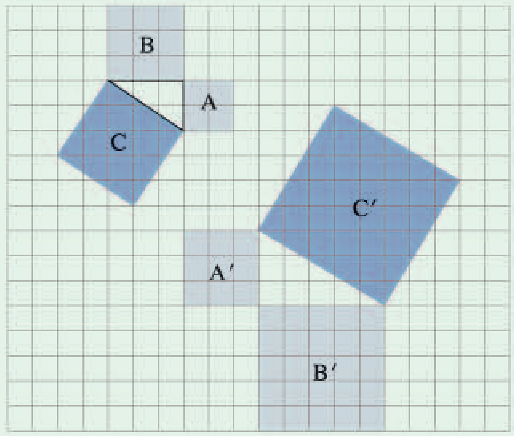


图 24.1-3

由上面的几个例子，我们猜想（图 24.1-4）：

命题 1　如果直角三角形的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

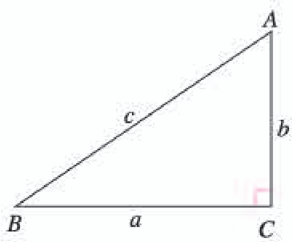


图 24.1-4

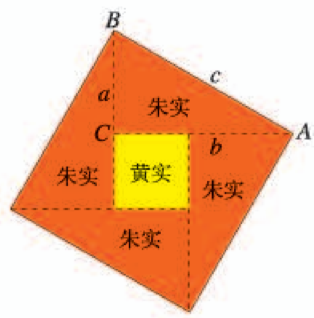


图 24.1-5

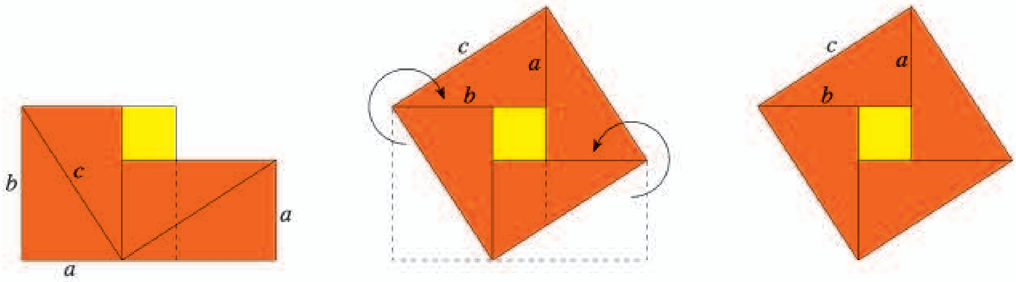
证明命题 1 的方法有很多，下面介绍我国古人赵爽的证法.

如图 24.1-5，这个图案是 3 世纪我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”. 赵爽根据此图指出：四个全等的直角三角形（红色）可以如图围成一个大正方形，中空的部分是一个小正方形（黄色）.

赵爽利用弦图证明命题 1 的基本思路如下：如图 24.1-6(1)，把边长为 a，b 的两个正方形

> 赵爽指出：按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四. 以勾股之差自相乘为中黄实. 加差实，亦成弦实.

连在一起，它的面积是 a^2+b^2；另一方面，这个图形可分割成四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）. 把图 24.1-6(1)中左、右两个三角形移到图 24.1-6(2)中所示的位置，就会形成一个以 c 为边长的正方形（图 24.1-6(3)）. 因为图 24.1-6(1)与图 24.1-6(3)都由四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）组成，所以它们的面积相等. 因此，$a^2+b^2=c^2$.



(1)　　(2)　　(3)

图 24.1-6

这样我们就证实了命题 1 的正确性，命题 1 与直角三角形的边有关，我国把它称为**勾股定理**(Pythagoras theorem).

“赵爽弦图”通过对图形的切割、拼接，巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，它表现了我国古人对数学的钻研精神和聪明才智，是我国古代数学的骄傲. 因此，这个图案（图 24.1-5）被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽.

> 赵爽所用的这种方法是我国古代数学家常用的“出入相补法”. 在西方，人们称勾股定理为毕达哥拉斯定理.

练习

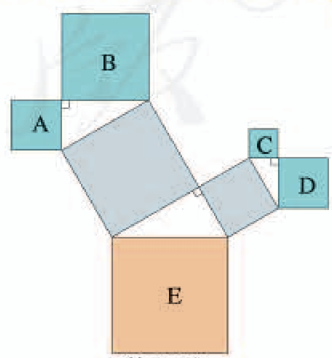
1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c.

   (1) 已知 $a=6$，$c=10$，求 b；

   (2) 已知 $a=5$，$b=12$，求 c；

   (3) 已知 $c=25$，$b=15$，求 a.

2. 如图，图中所有的三角形都是直角三角形，四边形都是正方形. 已知正方形 A，B，C，D 的边长分别是 12，16，9，12，求最大正方形 E 的面积.



（第 2 题）

勾股定理有广泛应用，下面我们用它解决几个问题.

例 1 一个门框的尺寸如图 24.1-7 所示，一块长 3 m，宽 2.2 m 的长方形薄木板能否从门框内通过？为什么？

分析： 可以看出，木板横着或竖着都不能从门框内通过，只能试试斜着能否通过. 门框对角线 AC 的长度是斜着能通过的最大长度. 求出 AC，再与木板的宽比较，就能知道木板能否通过.

图 24.1-7

解： 在 Rt$\triangle ABC$ 中，根据勾股定理，

$AC^2=AB^2+BC^2=1^2+2^2=5$.

$AC=\sqrt{5}\approx 2.24$.

因为 AC 大于木板的宽 2.2 m，所以木板能从门框内通过.

例 2 如图 24.1-8，一架 2.6 m 长的梯子 AB 斜靠在一竖直的墙 AO 上，这时 AO 为 2.4 m. 如果梯子的顶端 A 沿墙下滑 0.5 m，那么梯子底端 B 也外移 0.5 m 吗？

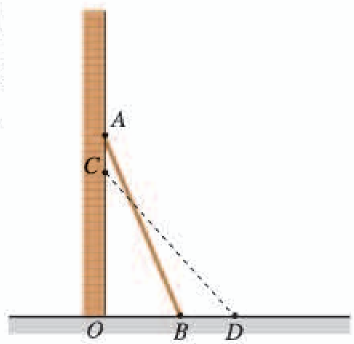


图 24.1-8

解： 可以看出，$BD=OD-OB$.

在 Rt$\triangle AOB$ 中，根据勾股定理，

$OB^2=AB^2-OA^2=2.6^2-2.4^2=1$.

$OB=\sqrt{1}=1$.

在 Rt$\triangle COD$ 中，根据勾股定理，

$OD^2=CD^2-OC^2=2.6^2-(2.4-0.5)^2=3.15$.

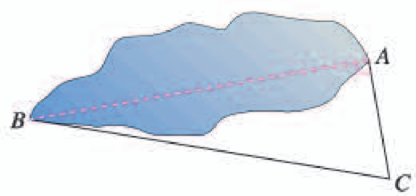
$OD=\sqrt{3.15}\approx 1.77$,

$BD=OD-OB\approx 1.77-1=0.77$.

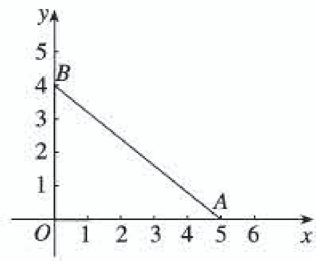
所以梯子的顶端沿墙下滑 0.5 m 时，梯子底端并不是也外移 0.5 m，而是外移约 0.77 m.

练习

1. 如图，池塘边有两点 A，B，点 C 是与 BA 方向成直角的 AC 方向上一点，测得 $BC=60$ m，$AC=20$ m. 求 A，B 两点间的距离（结果取整数）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在平面直角坐标系中有两点 A（5，0）和 B（0，4）. 求这两点之间的距离.

思考

在七年级下册中我们曾经通过画图得到结论：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等. 学习了勾股定理后，你能证明这一结论吗？

先画出图形，再写出已知、求证如下：

已知：如图 24.1-9，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90^\circ$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

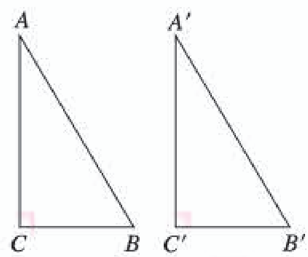


图 24.1-9

证明： 在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90^\circ$，根据勾股定理，得

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$，$B'C'=\sqrt{A'B'^2-A'C'^2}$.

又 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

$\therefore$ $BC=B'C'$.

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（SSS）.

探究

我们知道数轴上的点有的表示有理数，有的表示无理数，你能在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点吗？

如果能画出长为$\sqrt{13}$的线段，就能在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点. 容易知道，长为$\sqrt{2}$ 的线段是两条直角边的长都为 1 的直角三角形的斜边. 长为$\sqrt{13}$ 的线段能是直角边的长为正整数的直角三角形的斜边吗?

利用勾股定理，可以发现，长为$\sqrt{13}$的线段是直角边的长为正整数 2，3 的直角三角形的斜边. 由此，可以依照如下方法在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点.

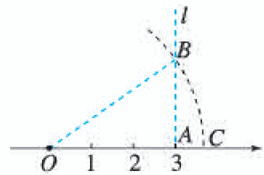


图 24.1-10

如图 24.1-10，在数轴上找出表示 3 的点 A，则 $OA=3$，过点 A 作直线 l 垂直于 OA，在 l 上取点 B，使 $AB=2$，以原点 O 为圆心，以 OB 为半径作弧，弧与数轴的交点 C 即为表示$\sqrt{13}$的点.

类似地，利用勾股定理，可以作出长为$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，…的线段（图 24.1-11）. 按照同样方法，可以在数轴上画出表示$\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，…的点（图 24.1-12）.

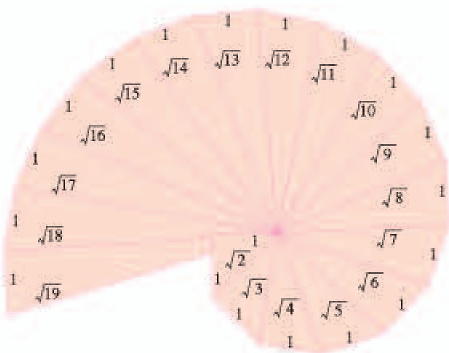


图 24.1-11

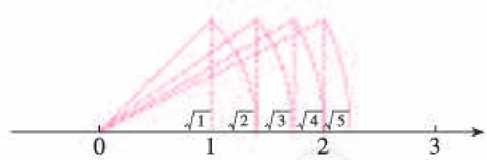


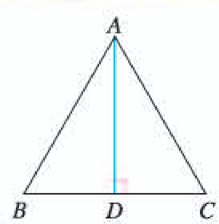
图 24.1-12

练习

1. 在数轴上作出表示$\sqrt{17}$的点.
2. 如图，等边三角形的边长是 6. 求：

   (1) 高 AD 的长；

   (2) 这个三角形的面积.



（第 2 题）

习题 24.1

复习巩固

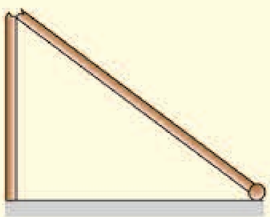
1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c.

   (1) 已知 $a=12$，$b=5$，求 c；

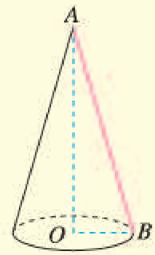
   (2) 已知 $a=3$，$c=4$，求 b；

   (3) 已知 $c=10$，$b=9$，求 a.

2. 一木杆在离地面 3 m 处折断，木杆顶端落在离木杆底端 4 m 处. 木杆折断之前有多高？



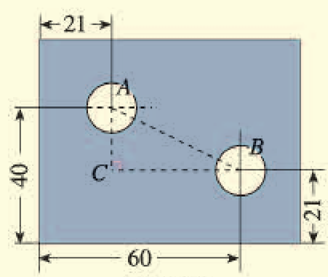
（第 2 题）



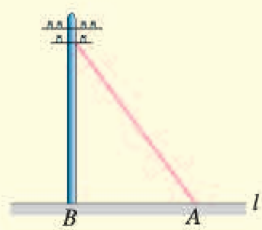
（第 3 题）

3. 如图，一个圆锥的高 $AO=2.4$，底面半径 $OB=0.7$. AB 的长是多少？

4. 已知长方形零件尺寸（单位：mm）如图，求两孔中心的距离（结果保留小数点后一位）.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，要从电线杆离地面 5 m 处向地面拉一条长为 7 m 的钢缆. 求地面钢缆固定点 A 到电线杆底部 B 的距离（结果保留小数点后一位）.

6. 在数轴上作出表示$\sqrt{20}$的点.

综合运用

7. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=c$.

   (1) 如果$\angle A=30°$，求 BC，AC；

   (2) 如果$\angle A=45°$，求 BC，AC.

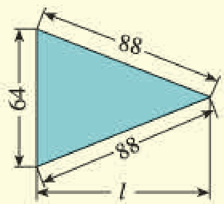
8. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=2.1$，$BC=2.8$. 求：

(1) $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 斜边 AB；

(3) 高 CD.

9. 已知一个三角形工件尺寸（单位：mm）如图，计算高 l 的长（结果取整数）.



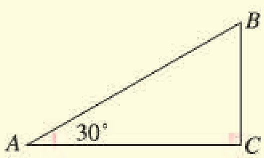
（第 9 题）

（第 10 题）

10. 有一个水池，水面是一个边长为 10 尺的正方形，在水池正中央有一根芦苇，它高出水面 1 尺. 如果把这根芦苇拉向水池一边的中点，它的顶端恰好到达池边的水面. 水的深度与这根芦苇的长度分别是多少？

这是我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题. 原文是：今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何.（丈、尺是长度单位，1 丈＝10 尺，1 尺＝$\frac{1}{3}$ m）

11. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AC=2$. 求斜边 AB 的长.



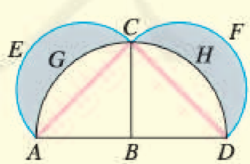
（第 11 题）

（第 12 题）

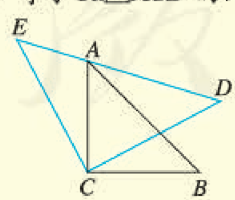
12. 有 5 个边长为 1 的正方形，排列形式如图. 请把它们分割后拼接成一个大正方形.

拓广探索

13. 如图，分别以等腰 Rt$\triangle ACD$ 的边 AD，AC，CD 为直径画半圆. 求证：所得两个月形图案 $AGCE$ 和 $DHCF$ 的面积之和（图中阴影部分）等于 Rt$\triangle ACD$ 的面积.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，$\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，$CA=CB$，$CE=CD$，$\triangle ACB$ 的顶点 A 在 $\triangle ECD$ 的斜边 DE 上. 求证：$AE^2+AD^2=2AC^2$.（提示：连接 BD.）

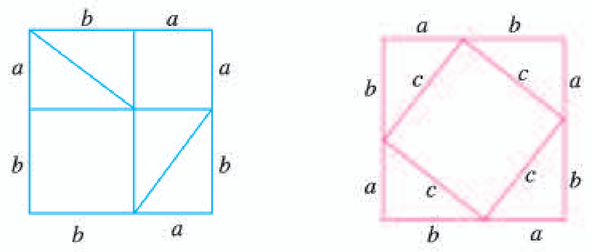
阅读与思考

勾股定理的证明

2 000 多年来，人们对勾股定理的证明颇感兴趣. 不但因为这个定理重要、基本，还因为这个定理贴近人们的生活实际. 以至于古往今来，下至平民百姓，上至帝王总统都愿意探讨、研究它的证明，新的证法不断出现. 下面介绍几种用来证明勾股定理的图形，你能根据这些图形及提示证明勾股定理吗?

1. 传说中毕达哥拉斯的证法（图 1）

提示：（1）中拼成的正方形与（2）中拼成的正方形面积相等.



（1）　　（2）

图 1

2. 弦图的另一种证法（图 2）

提示：以斜边为边长的正方形的面积＋4 个三角形的面积＝外正方形的面积.

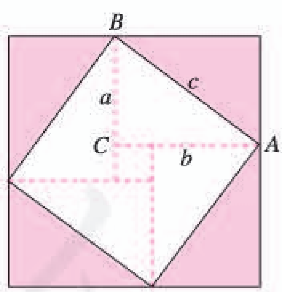


图 2

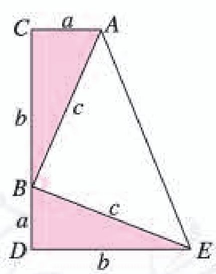


图 3

3. 美国第 20 任总统茄菲尔德的证法（图 3）

提示：3 个三角形的面积之和＝梯形的面积.

24.2 勾股定理的逆定理

据说，古埃及人用图 24.2-1 的方法画直角：把一根长绳打上等距离的 13 个结，然后以 3 个结间距、4 个结间距、5 个结间距的长度为边长，用木桩钉成一个三角形，其中一个角便是直角.

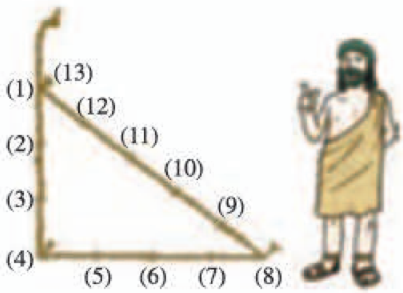


图 24.2-1

相传，我国古代大禹治水测量工程时，也用类似方法确定直角.

这个问题意味着，如果围成的三角形的三边长分别为 3，4，5，它们满足关系“$3^2+4^2=5^2$”，那么围成的三角形是直角三角形.

画画看，如果三角形的三边长分别为 2.5 cm，6 cm，6.5 cm，它们满足关系“$2.5^2+6^2=6.5^2$”，画出的三角形是直角三角形吗？换成三边分别为 4 cm，7.5 cm，8.5 cm，再试一试.

由上面的几个例子，我们猜想：

命题 2　如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

我们看到，命题 2 与上节的命题 1 的题设、结论正好相反. 我们把像这样的两个命题叫做互逆命题. 如果把其中一个叫做**原命题**，那么另一个叫做它的**逆命题**. 例如，如果把命题 1 当成原命题，那么命题 2 是命题 1 的逆命题. 上节已证明命题 1 正确，能证明命题 2 正确吗？

命题 1、命题 2 的题设、结论分别是什么？

在图 24.2-2(1) 中，已知△ABC 的三边长分别为 a，b，c，且满足 $a^2+b^2=c^2$. 要证△ABC 一定是直角三角形，我们可以先画一个两

条直角边长分别为 a，b 的直角三角形，如果$\triangle ABC$ 与这个直角三角形全等，那么$\triangle ABC$ 就是一个直角三角形.

如图 24.2-2(2)，画一个 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$，使 $B'C'=a$，$A'C'=b$，$\angle C'=90^\circ$. 根据勾股定理，$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2$. 因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $A'B'=c$. 在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$BC=a=B'C'$，$AC=b=A'C'$，$AB=c=A'B'$，所以$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 因此$\angle C=\angle C'=90^\circ$，即$\triangle ABC$ 是直角三角形.

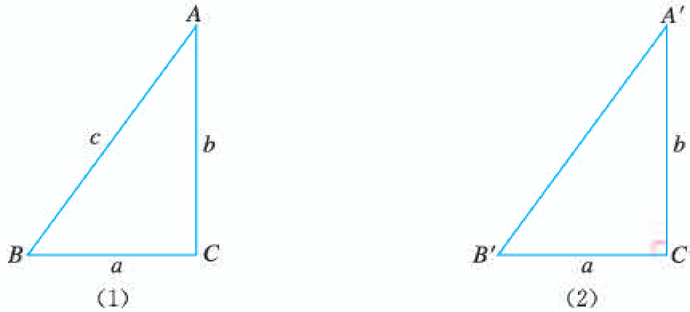


图 24.2-2

这样我们证明了勾股定理的逆命题是正确的，它也是一个定理. 我们把这个定理叫做**勾股定理的逆定理**. 它是判定直角三角形的一个依据.

一般地，原命题成立时，它的逆命题可能成立，也可能不成立. 如本章中的命题 1 成立，它的逆命题命题 2 也成立；命题“对顶角相等”成立，而它的逆命题“如果两个角相等，那么这两个角是对顶角”却不成立.

> 一般地，如果一个定理的逆命题经过证明是正确的，那么它也是一个定理，称这两个定理互为逆定理.

例 1 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形：

(1) $a=15$，$b=8$，$c=17$；

(2) $a=13$，$b=14$，$c=15$.

分析：根据勾股定理及其逆定理，判断一个三角形是不是直角三角形，只要看两条较小边长的平方和是否等于最大边长的平方.

解：(1) 因为 $15^2+8^2=225+64=289$，

$$17^2=289,$$

所以 $15^2+8^2=17^2$，根据勾股定理的逆定理，这个三角形是直角三角形.

> 像 15，8，17 这样，能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，称为勾股数.

（2）因为 $13^2+14^2=169+196=365$，

$15^2=225$，

所以 $13^2+14^2\neq15^2$，根据勾股定理，这个三角形不是直角三角形.

例 2 如图 24.2-3，某港口 P 位于东西方向的海岸线上.“远航”号、“海天”号轮船同时离开港口，各自沿一固定方向航行，“远航”号每小时航行 16 n mile，“海天”号每小时航行 12 n mile. 它们离开港口一个半小时后分别位于点 Q，R 处，且相距 30 n mile. 如果知道“远航”号沿东北方向航行，能知道“海天”号沿哪个方向航行吗？

分析：在图 24.2-3 中可以看到，由于“远航”号的航向已知，如果求出两艘轮船的航向所成的角，就能知道“海天”号的航向了.

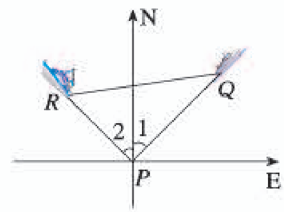


图 24.2-3

解：根据题意，

$PQ=16\times1.5=24$，

$PR=12\times1.5=18$，

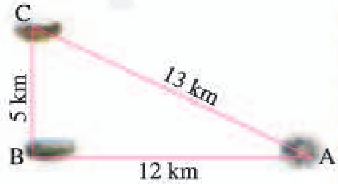
$QR=30$.

因为 $24^2+18^2=30^2$，即 $PQ^2+PR^2=QR^2$，所以 $\angle QPR=90°$.

由“远航”号沿东北方向航行可知，$\angle1=45°$. 因此，$\angle2=45°$，即“海天”号沿西北方向航行.

练习

1. 如果三条线段长 a，b，c 满足 $a^2=c^2-b^2$，这三条线段组成的三角形是不是直角三角形？为什么？
2. 说出下列命题的逆命题. 这些逆命题成立吗？
   （1）两条直线平行，内错角相等；
   （2）如果两个实数相等，那么它们的绝对值相等；
   （3）全等三角形的对应角相等；
   （4）在角的内部，到角的两边距离相等的点在角的平分线上.
3. A，B，C 三地的两两距离如图所示，A 地在 B 地的正东方向，C 地在 B 地的什么方向？



（第 3 题）

习题 24.2

复习巩固

1. 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形：

(1) $a=7$，$b=24$，$c=25$；

(2) $a=\sqrt{41}$，$b=4$，$c=5$；

(3) $a=\frac{5}{4}$，$b=1$，$c=\frac{3}{4}$；

(4) $a=40$，$b=50$，$c=60$.

2. 下列各命题都成立，写出它们的逆命题. 这些逆命题成立吗？

(1) 同旁内角互补，两直线平行；

(2) 如果两个角是直角，那么它们相等；

(3) 全等三角形的对应边相等；

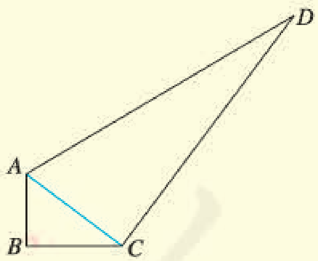
(4) 如果两个实数相等，那么它们的平方相等.

3. 小明向东走 80 m 后，沿另一方向又走了 60 m，再沿第三个方向走 100 m 回到原地. 小明向东走 80 m 后是向哪个方向走的？

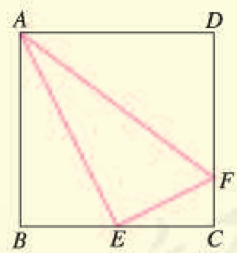
综合运用

4. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=13$，$BC=10$，BC 边上的中线 $AD=12$. 求 AC.

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$CD=12$，$AD=13$，$\angle B=90°$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，F 是 CD 上一点，且 $CF=\frac{1}{4}CD$. 求证$\angle AEF=90°$.

拓广探索

7. 我们知道 3，4，5 是一组勾股数，那么 $3k$，$4k$，$5k$（k 是正整数）也是一组勾股数吗？一般地，如果 a，b，c 是一组勾股数，那么 ak，bk，ck（k 是正整数）也是一组勾股数吗？

阅读与思考

费马大定理

根据勾股定理，任意直角三角形的两条直角边长 a，b 和斜边长 c 都是含三个未知数的方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一组解，而每一组勾股数（例如，3，4，5；5，12，13；等）都是这个方程的正整数解.

费马（P. de Fermat，1601—1665）

高于二次的方程 $x^3+y^3=z^3$，$x^4+y^4=z^4$，$x^5+y^5=z^5$，…是否也有正整数解呢？这个问题引起了法国数学家费马的研究兴趣. 费马在读古希腊数学家丢番图的《算术》一书时，在有方程 $x^2+y^2=z^2$ 的那页页边上，写下了具有历史意义的一段文字："……将一个高于二次的幂分为两个同次的幂，这是不可能的，关于此，我确信已发现了一种美妙的证法，可惜这里空白的地方太小，写不下." 用数学语言来表述，费马的结论就是：当自然数 $n\geqslant 3$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解.

上述命题被称为"费马大定理". 它的证明引起了世界各国数学家的关注，包括欧拉、高斯、勒贝格在内的许多著名数学家都对这个命题作了深入的研究，但一直没能证明它. 对费马大定理的研究给数学界带来了很大的影响，很多数学成果、甚至数学分支在这个过程中诞生，费马大定理也因此被数学界称为是一只"会下金蛋的鹅".

怀尔斯（A. Wiles，1953— ）

费马大定理的证明最终由英国数学家怀尔斯完成. 怀尔斯在童年时代就梦想能证明费马大定理，后来为此作了长期的努力和准备. 1986 年，他发现了定理证明的一种可能的途径，就开始全力以赴地投入到定理的证明中. 1993 年 6 月，怀尔斯在英国剑桥大学的学术讨论会上报告了他的研究成果，立即引起了全世界数学家和数学爱好者的关注. 在这以后，他又用了一年多的时间补证了专家小组发现的证明中的疏漏，并最终于 1995 年彻底完成了证明. 这个有 300 多年历史的数学难题终于得到解决. 1996 年 3 月，怀尔斯因为他的这一杰出数学成就荣获沃尔夫奖，并于 1998 年 8 月荣获菲尔兹特别奖. 费马大定理的证明则被称为"世纪性的成就"，并被列入 1993 年的世界科技十大成就之一.

数学活动

活动1

如图 1，学校需要测量旗杆的高度．同学们发现系在旗杆顶端的绳子垂到了地面，并多出了一段，但这条绳子的长度未知．请你应用勾股定理提出一个解决这个问题的方案，并与同学交流．

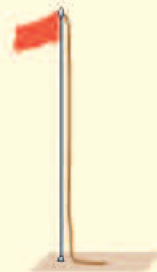


图 1

活动2

用四张全等的直角三角形纸片拼含有正方形的图案，要求拼图时直角三角形纸片不能互相重叠．以下各图是按要求拼出的几个图案，请你再给出几种不同拼法．

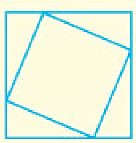


图 2

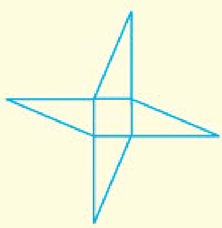


图 3

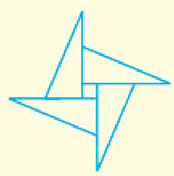


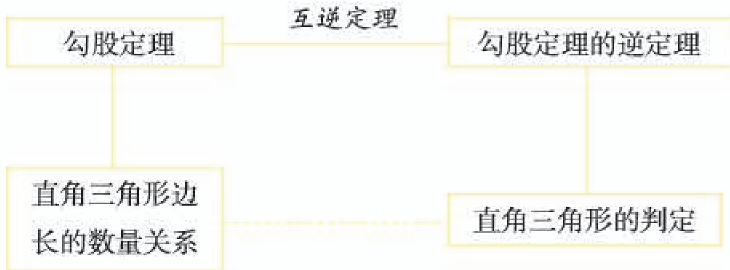
图 4

设直角三角形的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，试用两种不同方法计算图 2 中大正方形（或小正方形）的面积．从中你发现勾股定理的证明方法了吗？在拼出的其他图案中再试一试，看看在哪些图案中能用类似的方法证明勾股定理．

请你从有关书籍或互联网上再找一些证明勾股定理的方法，并与同学交流．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

直角三角形是特殊的三角形，它的三边之间有特殊的数量关系．本章我们通过对面积关系的探究，发现并证明了勾股定理．勾股定理是数学中最重要的定理之一，它反映了直角三角形三边之间的数量关系，不仅在解决与直角三角形相关的问题时很有用，而且在解决其他许多数学问题时也很有用．借助于图形的面积研究相关的数量关系，是我国古代数学研究中经常采用的重要方法，它充分显示了古人的卓越智慧．

得到一个数学结论后，经常要研究其逆命题是否成立．一般地，原命题成立，逆命题未必成立，而勾股定理的逆命题是一个定理．勾股定理的逆定理提供了直角三角形的一种判定方法．勾股定理及其逆定理，从相反的路径对直角三角形进行了刻画．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 直角三角形三边的长有什么特殊的关系？

2. 赵爽证明勾股定理运用了什么思想方法？

3. 已知一个三角形的三边长，怎样判断它是不是直角三角形？你作判断的依据是什么？

4. 证明勾股定理的逆定理运用了什么方法？

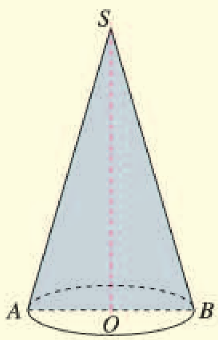
5. 一个命题成立，它的逆命题未必成立．请举例说明．

复习题 24

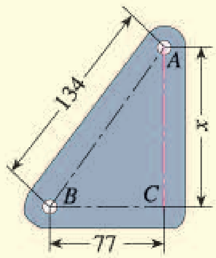
复习巩固

1. 两人从同一地点同时出发，一人以 20 m/min 的速度向北直行，一人以 30 m/min 的速度向东直行. 10 min 后他们相距多远（结果取整数）?

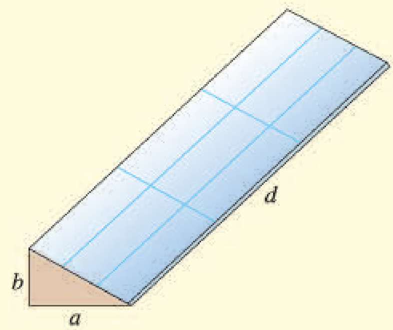
2. 如图，过圆锥的顶点 S 和底面圆的圆心 O 的平面截圆锥得截面$\triangle SAB$，其中 $SA=SB$，AB 是圆锥底面圆 O 的直径. 已知 $SA=7$ cm，$AB=4$ cm，求截面$\triangle SAB$ 的面积.



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，车床齿轮箱壳要钻两个圆孔，两孔中心的距离是 134 mm，两孔中心的水平距离是 77 mm. 计算两孔中心的垂直距离（结果保留小数点后一位).

4. 如图，要修一个育苗棚，棚的横截面是直角三角形，棚宽 $a=3$ m，高 $b=1.5$ m，长 $d=10$ m. 求覆盖在顶上的塑料薄膜需多少平方米（结果保留小数点后一位).

5. 一个三角形三边的比为 $1:\sqrt{3}:2$，这个三角形是直角三角形吗?

6. 下列各命题都成立，写出它们的逆命题. 这些逆命题成立吗?

   (1) 两条直线平行，同位角相等；

   (2) 如果两个实数都是正数，那么它们的积是正数；

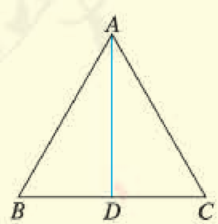
   (3) 等边三角形是锐角三角形；

   (4) 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

7. 已知直角三角形的两条直角边的长分别为 $2\sqrt{3}+1$ 和 $2\sqrt{3}-1$，求斜边 c 的长.

综合运用

8. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=BC$，高 $AD=h$. 求 AB.

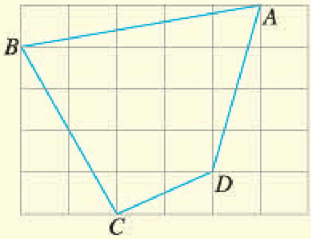


（第 8 题）

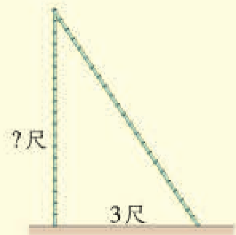
9. 如图，每个小正方形的边长都为 1.

(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积与周长；

(2) $\angle BCD$ 是直角吗？



（第 9 题）



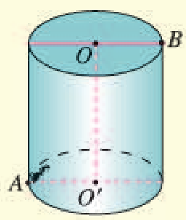
（第 10 题）

10. 一根竹子高 1 丈，折断后竹子顶端落在离竹子底端 3 尺处. 折断处离地面的高度是多少？（这是我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题. 其中的丈、尺是长度单位，1 丈＝10 尺.）

11. 古希腊的哲学家柏拉图曾指出，如果 m 表示大于 1 的整数，$a=2m$，$b=m^2-1$，$c=m^2+1$，那么 a，b，c 为勾股数. 你认为对吗？如果对，你能利用这个结论得出一些勾股数吗？

拓广探索

12. 如图，圆柱的底面半径为 6 cm，高为 10 cm. 蚂蚁在圆柱侧面爬行，从点 A 爬到点 B 的最短路程是多少厘米（结果保留小数点后一位）？



（第 12 题）

13. 一根 70 cm 的木棒，要放在长、宽、高分别是 50 cm，40 cm，30 cm的长方体木箱中，能放进去吗？（提示：长方体的高垂直于底面的任何一条直线.）

14. 设直角三角形的两条直角边长及斜边上的高分别为 a，b 及 h. 求证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

第二十五章　平行四边形

与三角形一样，平行四边形也是一种基本的几何图形. 宏伟的建筑物、开关自如的栅栏门、别具一格的窗棂……现实世界中很多物体都有平行四边形的形象. 为什么平行四边形形状的物体到处可见呢？这与平行四边形的性质有关.

前面我们学习了许多图形与几何的知识，掌握了一些探索和证明图形几何性质的方法. 本章我们将进一步学习平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，并在理解它们之间关系的基础上，利用已有的几何知识和方法，探索并证明它们的性质定理和判定定理；进一步体会研究图形几何性质的思路和方法，即通过观察、类比、特殊化等途径和方法发现图形的几何性质，再通过逻辑推理证明它们.

25.1 平行四边形

平行四边形是常见的图形. 小区的伸缩门、庭院的竹篱笆、载重汽车的防护栏等（图 25.1-1），都有平行四边形的形象. 你还能举出一些例子吗？

图 25.1-1

我们知道，两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**（parallelogram）. 平行四边形用“▱”表示，如图 25.1-2，平行四边形 $ABCD$ 记作“▱$ABCD$”.

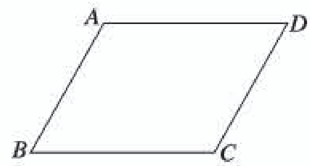


图 25.1-2

25.1.1 平行四边形的性质

由平行四边形的定义，我们知道平行四边形的两组对边分别平行. 除此之外，平行四边形还有什么性质呢？

探究

根据定义画一个平行四边形，观察它，除了“两组对边分别平行”外，它的边之间还有什么关系？它的角之间有什么关系？度量一下，和你的猜想一致吗？

通过观察和度量，我们猜想：平行四边形的对边相等；平行四边形的对角相等. 下面我们对它进行证明.

上述猜想涉及线段相等、角相等. 我们知道，利用三角形全等得出全等三角形的对应边、对应角都相等，是证明线段相等、角相等的一种重要的方法. 为此，我们通过添加辅助线，构造两个三角形，通过三角形全等进行证明.

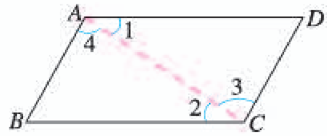


图 25.1-3

证明： 如图 25.1-3，连接 AC.

∵ $AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$，

∴ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

又 AC 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的公共边，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

∴ $AD = CB$，$AB = CD$，

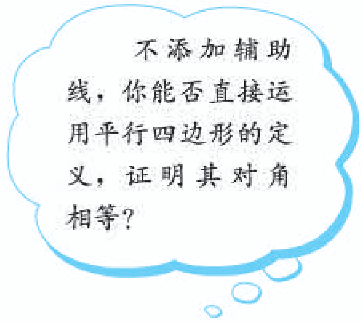
$\angle B = \angle D$.

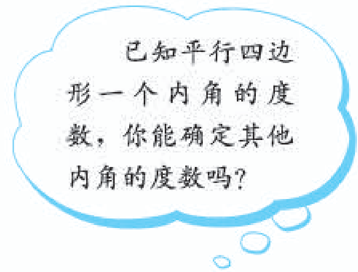
请同学们自己证明 $\angle BAD = \angle DCB$.

这样我们证明了平行四边形具有以下性质：

平行四边形的对边相等；

平行四边形的对角相等.





例 1 如图 25.1-4，在▱$ABCD$ 中，$DE \perp AB$，$BF \perp CD$，垂足分别为 E，F. 求证 $AE = CF$.

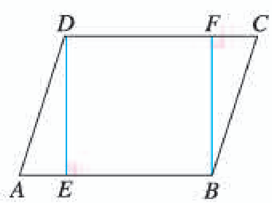


图 25.1-4

证明： ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle A = \angle C$，$AD = CB$.

又 $\angle AED = \angle CFB = 90°$，

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CBF$.

∴ $AE = CF$.

距离是几何中的重要度量之一. 前面我们已经学习了点与点之间的距离、点到直线的距离. 在此基础上，我们结合平行四边形的概念和性质，介绍两条平行线之间的距离.

如图 25.1-5，$a \parallel b$，$c \parallel d$，c，d 与 a，b 分别相交于 A，B，C，D 四点. 由平行四边形的概念和性质可知，四边形 $ABDC$ 是平行四边形，$AB = CD$. 也就是说，两条平行线之间的任何两条平行线段都相等.

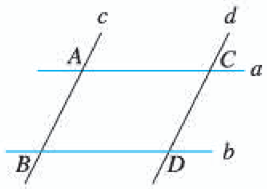


图 25.1-5

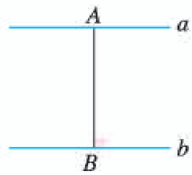


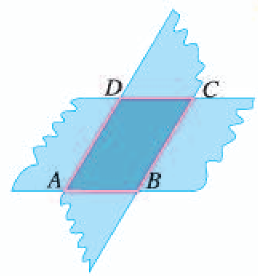
图 25.1-6

两条平行线之间的距离与点和点之间的距离、点到直线的距离有何联系与区别？

从上面的结论可以知道，如果两条直线平行，那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等．两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这**两条平行线之间的距离**．如图 25.1-6，$a /\!/ b$，A 是 a 上的任意一点，$AB \perp b$，B 是垂足，线段 AB 的长就是 a，b 之间的距离．

练习

1. 在▱$ABCD$ 中，
   (1) 已知 $AB=5$，$BC=3$，求它的周长；
   (2) 已知 $\angle A=38°$，求其余各内角的度数．
2. 如图，剪两张对边平行的纸条，随意交叉叠放在一起，重合的部分构成了一个四边形．转动其中一张纸条，线段 AD 和 BC 的长度有什么关系？为什么？



（第 2 题）

上面我们研究了平行四边形的边、角这两个基本要素的性质，下面我们研究平行四边形对角线的性质．

探究

如图 25.1-7，在▱$ABCD$ 中，连接 AC，BD，并设它们相交于点 O，OA 与 OC，OB 与 OD 有什么关系？你能证明发现的结论吗？

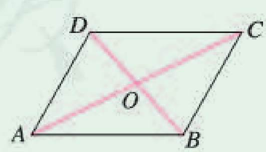


图 25.1-7

我们猜想，在▱$ABCD$ 中，$OA=OC$，$OB=OD$．

与证明平行四边形的对边相等、对角相等的方法类似，我们也可以通过三

角形全等证明这个猜想．请你结合图 25.1-8 完成证明．

由此我们又得到平行四边形的一个性质：

平行四边形的对角线互相平分．

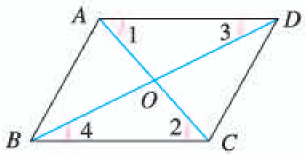


图 25.1-8

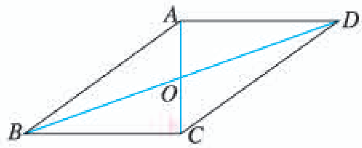


图 25.1-9

例 2　如图 25.1-9，在▱$ABCD$ 中，$AB=10$，$AD=8$，$AC\perp BC$．求 BC，CD，AC，OA 的长，以及▱$ABCD$ 的面积．

解：∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$BC=AD=8$，$CD=AB=10$．

∵　$AC\perp BC$，

∴　$\triangle ABC$ 是直角三角形．

根据勾股定理，

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6.$$

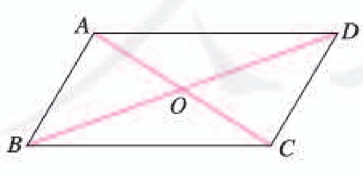
又　$OA=OC$，

∴　$OA=\frac{1}{2}AC=3$，

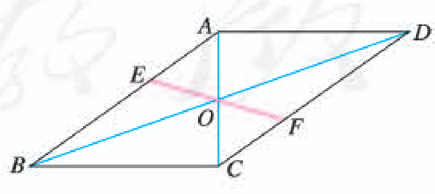
$$S_{\square ABCD}=BC\cdot AC=8\times 6=48.$$

练习

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$BC=10$，$AC=8$，$BD=14$．$\triangle AOD$ 的周长是多少？$\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的周长哪个长？长多少？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AB，CD 分别相交于点 E，F．求证 $OE=OF$．

25.1.2 平行四边形的判定

思考

通过前面的学习，我们知道，平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分. 反过来，对边相等，或对角相等，或对角线互相平分的四边形是平行四边形吗？也就是说，平行四边形的性质定理的逆命题成立吗？

可以证明，这些逆命题都成立. 这样我们得到平行四边形的判定定理：

两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

你能根据平行四边形的定义证明它们吗？

下面我们以“对角线互相平分的四边形是平行四边形”为例，通过三角形全等进行证明.

如图 25.1-10，在四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，且 $OA=OC$，$OB=OD$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

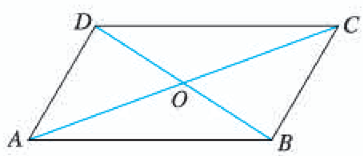


图 25.1-10

证明： $\because$ $OA=OC$，$OD=OB$，

$\angle AOD=\angle COB$，

$\therefore$ $\triangle AOD\cong\triangle COB$.

$\therefore$ $\angle OAD=\angle OCB$.

$\therefore$ $AD/\!/BC$.

同理 $AB/\!/DC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

由上我们知道，平行四边形的判定定理与相应的性质定理互为逆定理. 也就是说，当定理的条件与结论互换以后，所得命题仍然成立.

例 3 如图 25.1-11，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是 AC 上的两点，并且 $AE=CF$. 求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

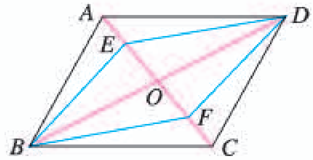


图 25.1-11

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AO=CO$，$BO=DO$.

$\because$ $AE=CF$，

$\therefore$ $AO-AE=CO-CF$，即 $EO=FO$.

又 $BO=DO$，

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

你还有其他证明方法吗？

思考

我们知道，两组对边分别平行或相等的四边形是平行四边形. 如果只考虑四边形的一组对边，它们满足什么条件时这个四边形能成为平行四边形呢？

我们知道，如果一个四边形是平行四边形，那么它的任意一组对边平行且相等. 反过来，一组对边平行且相等的四边形是平行四边形吗？

我们猜想这个结论正确，下面进行证明.

如图 25.1-12，在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB=CD$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

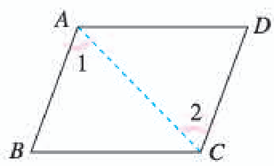


图 25.1-12

证明： 连接 AC.

$\because$ $AB/\!/CD$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

又 $AB=CD$，$AC=CA$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $BC=DA$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的两组对边分别相等，它是平行四边形.

于是我们又得到平行四边形的一个判定定理：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

现在你有多少种判定一个四边形是平行四边形的方法？

例 4　如图 25.1-13，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，CD 的中点. 求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

证明：$\because$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$　$AB=CD$，$EB \parallel FD$.

又　$EB=\frac{1}{2}AB$，$FD=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore$　$EB=FD$.

$\therefore$　四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

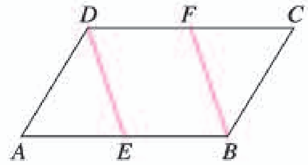
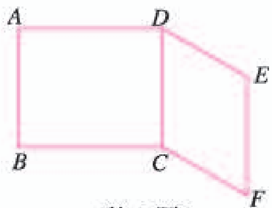


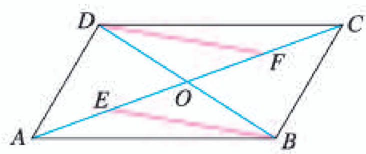
图 25.1-13

练习

1. 如图，$AB=DC=EF$，$AD=BC$，$DE=CF$. 图中有哪些互相平行的线段？



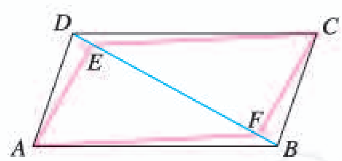
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 分别是 OA，OC 的中点. 求证 $BE=DF$.
3. 为了保证铁路的两条直铺的铁轨互相平行，只要使互相平行的夹在铁轨之间的枕木长相等就可以了. 你能说出其中的道理吗？

（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，BD 是它的一条对角线，过 A，C 两点分别作 $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，E，F 为垂足. 求证：四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

前面我们研究平行四边形时，常常把它分成几个三角形，利用三角形全等的性质研究平行四边形的有关问题. 下面我们利用平行四边形研究三角形的有关问题.

如图 25.1-14，在△ABC 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点，连接 DE. 像 DE 这样，连接三角形两边中点的线段叫做三角形的**中位线**.

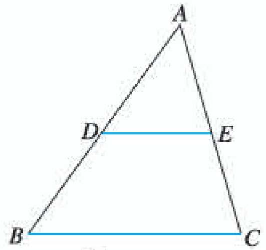


图 25.1-14

一个三角形有几条中位线？三角形的中位线和中线一样吗？

探究

观察图 25.1-14，你能发现△ABC 的中位线 DE 与边 BC 的位置关系吗？度量一下，DE 与 BC 之间有什么数量关系？

我们猜想，$DE/\!/BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$. 下面我们对它进行证明.

如图 25.1-14，D，E 分别是△ABC 的边 AB，AC 的中点. 求证：$DE/\!/BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

分析： 本题既要证明两条线段所在的直线平行，又要证明其中一条线段的长等于另一条线段长的一半. 将 DE 延长一倍后，可以将证明 $DE=\frac{1}{2}BC$ 转化为证明延长后的线段与 BC 相等. 又由于 E 是 AC 的中点，根据对角线互相平分的四边形是平行四边形构造一个平行四边形，利用平行四边形的性质进行证明.

证明： 如图 25.1-15，延长 DE 到点 F，使 $EF=DE$，连接 FC，DC，AF.

∵ $AE=EC$，$DE=EF$，

∴ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

$CF \underline{/\!/} DA$.

∴ $CF \underline{/\!/} BD$.

∴ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形，

$DF \underline{/\!/} BC$.

又 $DE=\frac{1}{2}DF$，

∴ $DE/\!/BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

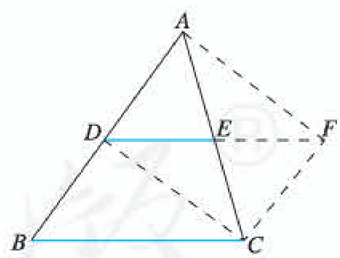


图 25.1-15

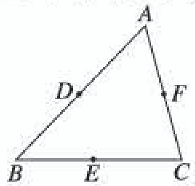
“$\underline{/\!/}$”表示平行且相等.

通过上述证明，我们得到三角形的中位线定理：

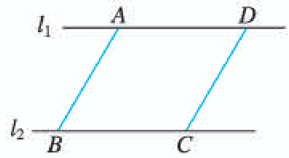
三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

练习

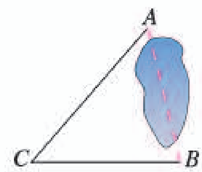
1. 如图，在$\triangle ABC$中，D，E，F分别是AB，BC，CA的中点. 以这些点为顶点，在图中，你能画出多少个平行四边形？为什么？



（第1题）



（第2题）



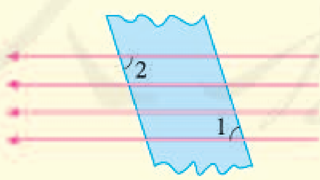
（第3题）

2. 如图，直线$l_1 /\!/ l_2$，在l_1，l_2上分别截取AD，BC，使$AD=BC$，连接AB，CD. AB和CD有什么关系？为什么？
3. 如图，A，B两点被池塘隔开，在AB外选一点C，连接AC和BC. 怎样测出A，B两点间的距离？根据是什么？

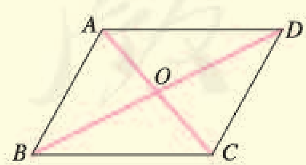
习题 25.1

复习巩固

1. 如果四边形$ABCD$是平行四边形，$AB=6$，且AB的长是$\square ABCD$周长的$\frac{3}{16}$，那么BC的长是多少？
2. 如图，在一束平行光线中插入一张对边平行的纸板. 如果光线与纸板右下方所成的$\angle 1$是$72°15'$，那么光线与纸板左上方所成的$\angle 2$是多少度？为什么？



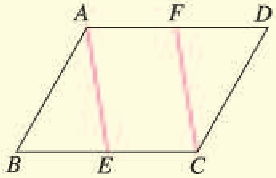
（第2题）



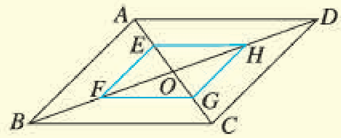
（第3题）

3. 如图，$\square ABCD$的对角线AC，BD相交于点O，且$AC+BD=36$，$AB=11$. 求$\triangle OCD$的周长.

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，AD 上，且 $AF=CE$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.



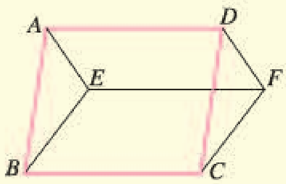
（第 4 题）



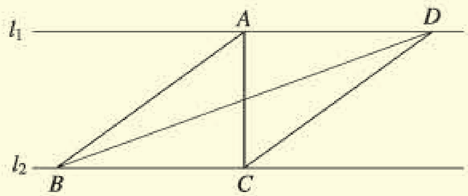
（第 5 题）

5. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 E，F，G，H 分别是 AO，BO，CO，DO 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

6. 如图，四边形 $AEFD$ 和 $EBCF$ 都是平行四边形. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



（第 6 题）

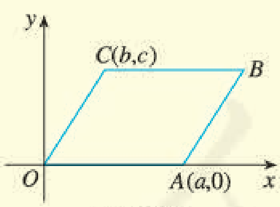


（第 7 题）

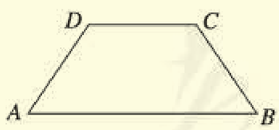
7. 如图，直线 $l_1 /\!/ l_2$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的面积相等吗？为什么？你还能画出一些与 $\triangle ABC$ 面积相等的三角形吗？

综合运用

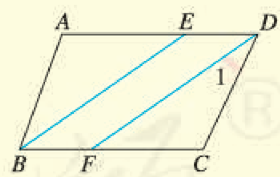
8. 如图，▱$OABC$ 的顶点 O，A，C 的坐标分别是 $(0，0)$，$(a，0)$，$(b，c)$. 求顶点 B 的坐标.



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

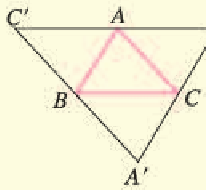
9. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ DC$.

（1）已知 $\angle A=\angle B$，求证 $AD=BC$；

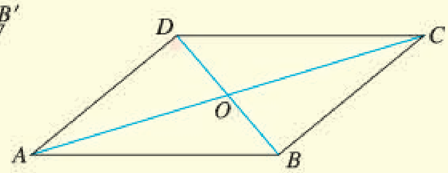
（2）已知 $AD=BC$，求证 $\angle A=\angle B$.

10. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=70°$，BE 平分 $\angle ABC$ 且交 AD 于点 E，$DF /\!/ BE$ 且交 BC 于点 F. 求 $\angle 1$ 的大小.

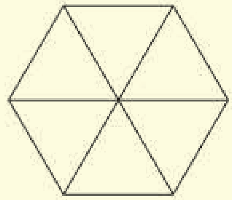
11. 如图，$A'B' /\!/ BA$，$B'C' /\!/ CB$，$C'A' /\!/ AC$，$\angle ABC$ 与$\angle B'$有什么关系？线段 AB'与线段 AC'呢？为什么？



（第 11 题）



（第 12 题）



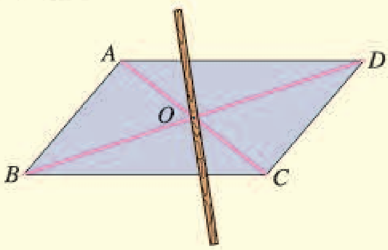
（第 13 题）

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=12$，$DO=OB=5$，$AC=26$，$\angle ADB=90°$. 求 BC 的长和四边形 $ABCD$ 的面积.

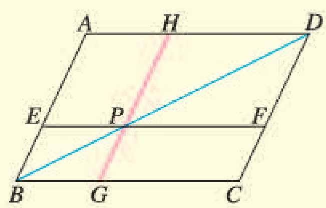
13. 如图，由六个全等的正三角形拼成的图中，有多少个平行四边形？为什么？

拓广探索

14. 如图，用硬纸板剪一个平行四边形，作出它的对角线的交点 O，用大头针把一根平放在平行四边形上的直细木条固定在点 O 处，并使细木条可以绕点 O 转动. 拨动细木条，使它随意停留在任意位置. 观察几次拨动的结果，你发现了什么？证明你的发现.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，在▱$ABCD$ 中，过对角线 BD 上一点 P 作 $EF /\!/ BC$，$GH /\!/ AB$. 图中哪两个平行四边形面积相等？为什么？

25.2 特殊的平行四边形

上节我们研究了平行四边形，下面我们通过平行四边形角、边的特殊化，研究特殊的平行四边形——矩形、菱形和正方形.

25.2.1 矩形

我们先从角开始，如图 25.2-1，当平行四边形的一个角为直角时，这时的平行四边形是一个特殊的平行四边形. 有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**（rectangle），也就是长方形.

图 25.2-1

矩形也是常见的图形. 门窗框、书桌面、教科书封面、地砖等（图 25.2-2）都有矩形的形象. 你还能举出一些例子吗？

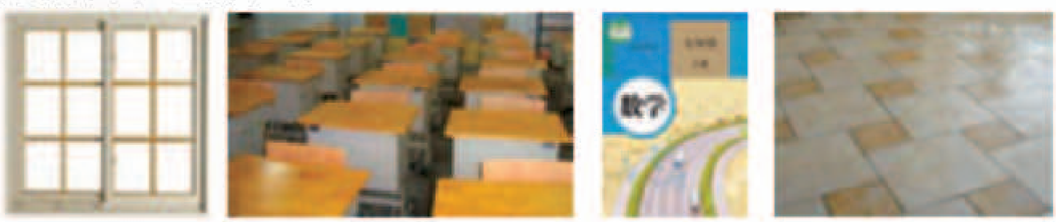


图 25.2-2

思考

因为矩形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质. 由于它有一个角为直角，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢？

对于矩形，我们仍然从它的边、角和对角线等方面进行研究. 可以发现并证明（请你自己完成证明），矩形还有以下性质：

矩形的四个角都是直角；

矩形的对角线相等.

上节我们运用平行四边形的判定和性质研究了三角形的中位线，下面我们用矩形的性质研究直角三角形的一个性质.

思考

如图 25.2-3，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O. 我们观察 Rt$\triangle ABC$，在 Rt$\triangle ABC$ 中，BO 是斜边 AC 上的中线，BO 与 AC 有什么关系？

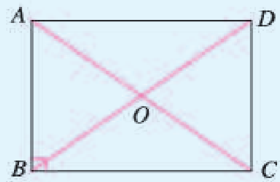


图 25.2-3

根据矩形的性质，我们知道，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$. 由此，我们得到直角三角形的一个性质：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例 1 如图 25.2-4，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle AOB=60°$，$AB=4$. 求矩形对角线的长.

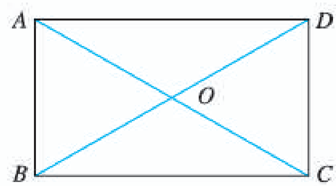


图 25.2-4

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ AC 与 BD 相等且互相平分.

∴ $OA=OB$.

又 $\angle AOB=60°$，

∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形.

∴ $OA=AB=4$.

∴ $AC=BD=2OA=8$.

练习

1. 求证：矩形的对角线相等.
2. 一个矩形的一条对角线长为 8，两条对角线的一个交角为 120°. 求这个矩形的边长（结果保留小数点后两位）.
3. 矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？

上面我们研究了矩形的性质，下面我们研究如何判定一个平行四边形或四边形是矩形.

由矩形的定义可知，有一个角是直角的平行四边形是矩形. 除此之外，还有没有其他判定方法呢？

与研究平行四边形的判定方法类似，我们研究矩形的性质定理的逆命题，看看它们是否成立.

思考

我们知道，矩形的对角线相等. 反过来，对角线相等的平行四边形是矩形吗？

可以发现并证明矩形的一个判定定理：

对角线相等的平行四边形是矩形.

工人师傅在做门窗或矩形零件时，不仅要测量两组对边的长度是否分别相等，常常还要测量它们的两条对角线是否相等，以确保图形是矩形. 你知道其中的道理吗？

思考

前面我们研究了矩形的四个角，知道它们都是直角. 它的逆命题成立吗？即四个角都是直角的四边形是矩形吗？进一步，至少有几个角是直角的四边形是矩形？

可以发现并证明矩形的另一个判定定理：

有三个角是直角的四边形是矩形.

例 2 如图 25.2-5，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $OA=OD$，$\angle OAD=50°$. 求$\angle OAB$ 的度数.

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$.

又 $OA=OD$，

∴ $AC=BD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

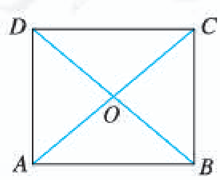


图 25.2-5

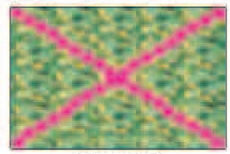
$\therefore\quad \angle DAB=90^\circ$.

又 $\quad \angle OAD=50^\circ$,

$\therefore\quad \angle OAB=40^\circ$.

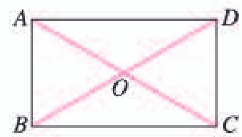
练习

1. 八年级（3）班同学要在广场上布置一个矩形的花坛，计划用红花摆成两条对角线. 如果一条对角线用了 38 盆红花，还需要从花房运来多少盆红花？为什么？如果一条对角线用了 49 盆呢？



（第 1 题）

2. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$\triangle OAB$ 是等边三角形，且 $AB=4$. 求 $\square ABCD$ 的面积.



（第 2 题）

25.2.2 菱形

我们观察平行四边形的一组邻边，如图 25.2-6，当这组邻边相等时，这时的平行四边形也是一个特殊的平行四边形. 有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**（rhombus）.

图 25.2-6

菱形也是常见的图形. 一些门窗的窗格、美丽的中国结、伸缩的衣帽架（图 25.2-7）等都有菱形的形象. 你还能举出一些例子吗？

图 25.2-7

思考

因为菱形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质. 由于它的一组邻边相等，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢？

对于菱形，我们仍然从它的边、角和对角线等方面进行研究. 可以发现并证明（请你自己完成证明），菱形还有以下性质：

菱形的四条边都相等；

菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角.

如图 25.2-8，比较菱形的对角线和平行四边形的对角线，我们发现，菱形的对角线把菱形分成四个全等的直角三角形，而平行四边形通常只被分成两对全等的三角形.

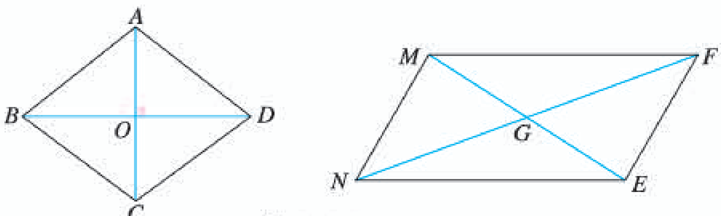


图 25.2-8

由菱形两条对角线的长，你能求出它的面积吗？

菱形是轴对称图形，它的对角线所在的直线就是它的对称轴.

例 3 如图 25.2-9，菱形花坛 $ABCD$ 的边长为 20 m，$\angle ABC=60°$，沿着菱形的对角线修建了两条小路 AC 和 BD. 求两条小路的长（结果保留小数点后两位）和花坛的面积（结果保留小数点后一位）.

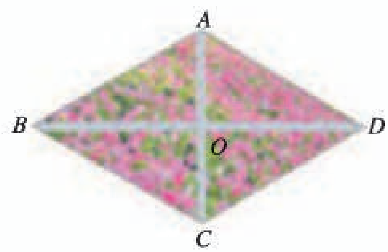


图 25.2-9

解： $\because$ 花坛 $ABCD$ 的形状是菱形，

$\therefore$ $AC\perp BD$，$\angle ABO=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times 60°=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，

$$AO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 20=10,$$

$$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}.$$

$\therefore$ 花坛的两条小路长

$$AC=2AO=20\ (\mathrm{m}),$$

$$BD=2BO=20\sqrt{3}\approx 34.64\ (\mathrm{m}).$$

花坛的面积

$$S_{\text{菱形}ABCD}=4\times S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=200\sqrt{3}\approx 346.4\ (\mathrm{m}^2).$$

练习

1. 四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB=5$，$AO=4$. 求 AC 和 BD 的长.
2. 已知菱形的两条对角线的长分别是 6 和 8，求菱形的周长和面积.

上面我们研究了菱形的性质，下面我们研究如何判定一个平行四边形或四边形是菱形.

由菱形的定义可知，有一组邻边相等的平行四边形是菱形. 除此之外，还有没有其他判定方法呢?

与研究平行四边形、矩形的判定方法类似，我们研究菱形的性质定理的逆命题，看看它们是否成立.

思考

我们知道，菱形的对角线互相垂直. 反过来，对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗?

可以发现并证明菱形的一个判定定理：

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

例 4 如图 25.2-10，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB=5$，$AO=4$，$BO=3$. 求证：▱$ABCD$ 是菱形.

证明：∵ $AB=5$，$AO=4$，$BO=3$，

∴ $AB^2=AO^2+BO^2$.

∴ $\triangle OAB$ 是直角三角形.

∴ $AC\perp BD$.

∴ ▱$ABCD$ 是菱形.

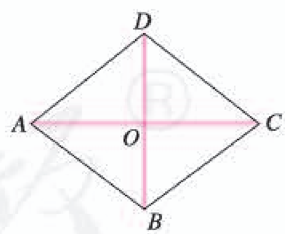


图 25.2-10

思考

我们知道，菱形的四条边相等. 反过来，四条边相等的四边形是菱形吗?

可以发现并证明菱形的另一个判定定理：

四条边相等的四边形是菱形.

练习

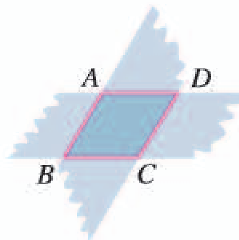
1. 求证：

（1）对角线互相垂直的平行四边形是菱形；

（2）四条边相等的四边形是菱形.

2. 一个平行四边形的一条边长是 9，两条对角线的长分别是 12 和 $6\sqrt{5}$，这是一个特殊的平行四边形吗？为什么？求出它的面积.

3. 如图，两张等宽的纸条交叉叠放在一起，重合部分构成的四边形 $ABCD$ 是一个菱形吗？为什么？



（第 3 题）

25.2.3 正方形

正方形（square）是我们熟悉的几何图形，它的四条边都相等，四个角都是直角. 因此，正方形既是矩形，又是菱形（图 25.2-11）. 它既有矩形的性质，又有菱形的性质.

正方形是轴对称图形吗？它的对称轴是什么？

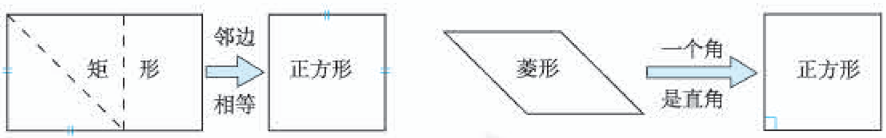


图 25.2-11

思考

正方形有哪些性质？如何判定一个四边形是正方形？把它们写出来，并和同学交流一下，然后证明其中的一些结论.

例 5 求证：正方形的两条对角线把这个正方形分成四个全等的等腰直角三角形.

已知：如图 25.2-12，四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC，BD 相交于点 O.

求证：$\triangle ABO$，$\triangle BCO$，$\triangle CDO$，$\triangle DAO$ 是全等的等腰直角三角形.

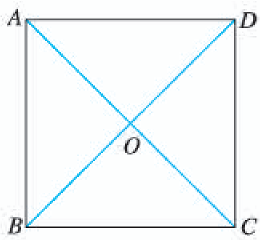
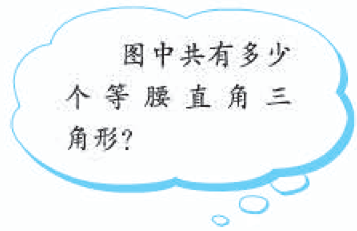


图 25.2-12



证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore$ $AC=BD$，$AC\perp BD$，$AO=BO=CO=DO$.

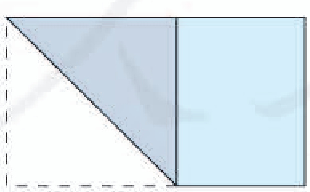
$\therefore$ $\triangle ABO$，$\triangle BCO$，$\triangle CDO$，$\triangle DAO$ 都是等腰直角三角形，并且 $\triangle ABO\cong\triangle BCO\cong\triangle CDO\cong\triangle DAO$.

思考

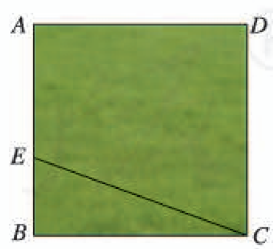
正方形、菱形、矩形、平行四边形之间有什么关系？与同学们讨论一下，并列表或用框图表示这些关系.

练习

1. (1) 把一张长方形纸片按如图方式折一下，就可以裁出正方形纸片. 为什么？
   (2) 如何从一块长方形木板中裁出一块最大的正方形木板呢？



（第 1 (1) 题）



（第 2 题）

2. 如图，$ABCD$ 是一块正方形场地. 小华和小芳在 AB 边上取定了一点 E，测量知，$EC=30$ m，$EB=10$ m. 这块场地的面积和对角线长分别是多少？

3. 满足下列条件的四边形是不是正方形？为什么？

(1) 对角线互相垂直且相等的平行四边形；

(2) 对角线互相垂直的矩形；

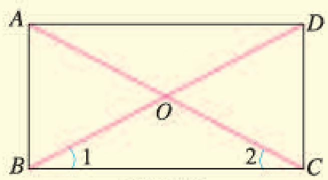
(3) 对角线相等的菱形；

(4) 对角线互相垂直平分且相等的四边形.

习题 25.2

复习巩固

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $\angle 1=\angle 2$. 它是一个矩形吗？为什么？



（第 1 题）

（第 3 题）

2. 求证：四个角都相等的四边形是矩形.

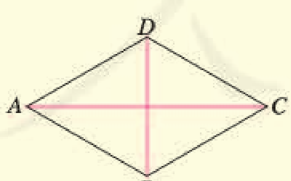
3. 一个木匠要制作矩形的踏板. 他在一个对边平行的长木板上分别沿与长边垂直的方向锯了两次，就能得到矩形踏板. 为什么？

4. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2AC$. 求 $\angle A$，$\angle B$ 的度数.

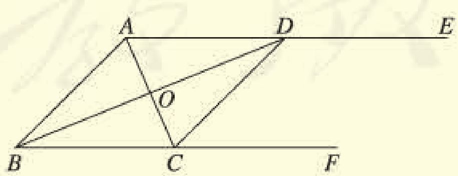
5. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ACD=30°$，$BD=6$. 求：

(1) $\angle BAD$，$\angle ABC$ 的度数；

(2) AB，AC 的长.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，$AE /\!/ BF$，AC 平分 $\angle BAD$，且交 BF 于点 C，BD 平分 $\angle ABC$，且交 AE 于点 D，连接 CD. 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

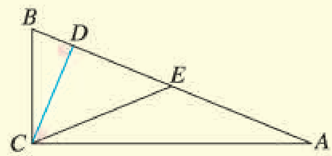
综合应用

7. 如图，把一个长方形的纸片对折两次，然后剪下一个角. 要得到一个正方形，剪口与折痕应成多少度的角？

（第 7 题）

8. 如图，为了做一个无盖纸盒，小明先在一块矩形硬纸板的四角画出四个相同的正方形，用剪刀剪下. 然后把纸板的四边沿虚线折起，并用胶带粘好，一个无盖纸盒就做成了. 纸盒的底面是什么形状？为什么？

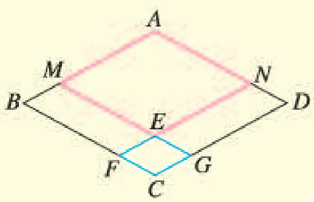
（第 8 题）



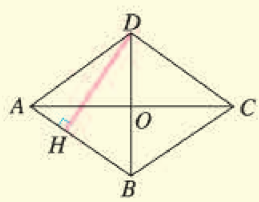
（第 9 题）

9. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D，$\angle ACD=3\angle BCD$，E 是斜边 AB 的中点. $\angle ECD$ 是多少度？为什么？

10. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 M，N 分别在 AB，AD 上，且 $BM=DN$，$MG/\!/AD$，$NF/\!/AB$；点 F，G 分别在 BC，CD 上，MG 与 NF 相交于点 E. 求证：四边形 $AMEN$，$EFCG$ 都是菱形.



（第 10 题）



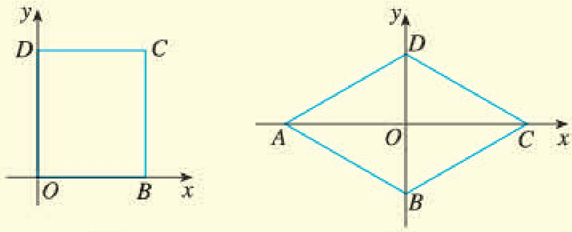
（第 11 题）

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=8$，$DB=6$，$DH\perp AB$ 于点 H. 求 DH 的长.

12. (1) 如下页图 (1)，四边形 $OBCD$ 是矩形，O，B，D 三点的坐标分别是 $(0,0)$，$(b,0)$，$(0,d)$. 求点 C 的坐标.

(2) 如下页图 (2)，四边形 $ABCD$ 是菱形，C，D 两点的坐标分别是 $(c,0)$，$(0,d)$，点 A，B 在坐标轴上. 求 A，B 两点的坐标.

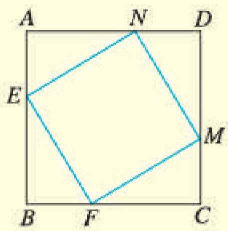
(3) 如下页图 (3)，四边形 $OBCD$ 是正方形，O，D 两点的坐标分别是 $(0,0)$，$(0,d)$. 求 B，C 两点的坐标.



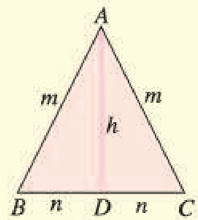
（1）　　　　　　（2）　　　　　　（3）

（第 12 题）

13. 如图，E，F，M，N 分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，且 $AE=BF=CM=DN$. 试判断四边形 $EFMN$ 是什么图形，并证明你的结论.



（第 13 题）

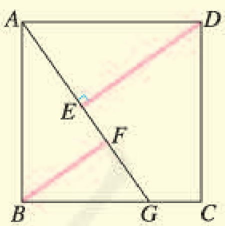


（第 14 题）

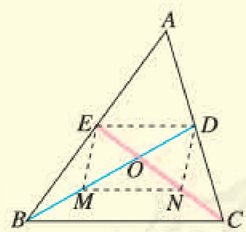
14. 如图，将等腰三角形纸片 ABC 沿底边 BC 上的高 AD 剪成两个三角形. 用这两个三角形你能拼成多少种平行四边形？试一试，分别求出它们的对角线的长.

拓广探索

15. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形. G 是 BC 上的任意一点，$DE\perp AG$ 于点 E，$BF\parallel DE$，且交 AG 于点 F. 求证：$AF-BF=EF$.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，在$\triangle ABC$ 中，BD，CE 分别是边 AC，AB 上的中线，BD 与 CE 相交于点 O. BO 与 OD 的长度有什么关系？BC 边上的中线是否一定过点 O？为什么？（提示：分别作 BO，CO 的中点 M，N，连接 ED，EM，MN，ND.）

17. 如图是一块正方形草地，要在上面修建两条交叉的小路，使得这两条小路将草地分成的四部分面积相等，你有多少种方法？并与你的同学交流一下.

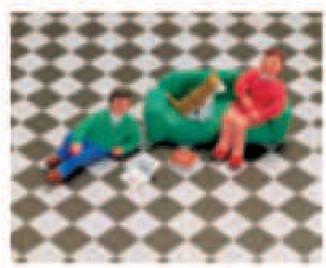
（第 17 题）

实验与探究

丰富多彩的正方形

我们学习了平行四边形、矩形、菱形和正方形. 比较一下，哪种图形的性质最多？答案无疑是正方形.

正方形的四个角相等、四条边相等、对角线相等且互相垂直平分. 它的对称轴比其他四边形都多. 以后我们还会学到，它还是中心对称图形. 这些特点使正方形得到了人们的喜爱和广泛应用.



例如，人们用边长为单位长度的正方形的面积，作为度量其他图形面积的基本单位；人们也常利用正方形美化生活环境，比如，用正方形地砖镶嵌地面，不仅美观大方，而且施工简单易行.

正方形还有许多有趣的性质. 例如，要用给定长度的篱笆围成一个面积最大的四边形区域，那么应当把这个区域选为正方形.

下面是两个有关正方形的小实验，想一想其中的道理.

1. 如图 1，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长相等. 无论正方形 $A_1B_1C_1O$ 绕点 O 怎样转动，两个正方形重叠部分的面积，总等于一个正方形面积的$\frac{1}{4}$. 想一想，这是为什么.

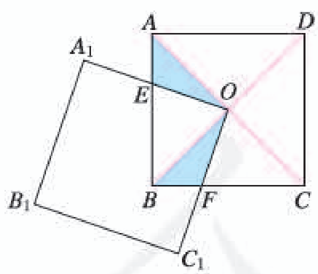


图 1

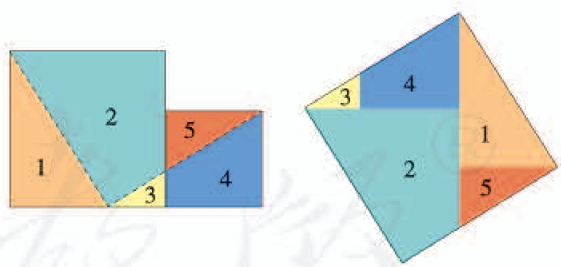


图 2

2. 给你两个大小不等的正方形，你能通过切割把它们拼接成一个大正方形吗？（参考图 2）说明你的拼法的道理.

数学活动

活动1 折纸做60°，30°，15°的角

如果我们身旁没有量角器或三角尺，又需要作60°，30°，15°等大小的角，可以采用下面的方法（如图1）：

（1）对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展平.

（2）再一次折叠纸片，使点 A 落在 EF 上，并使折痕经过点 B，得到折痕 BM. 同时，得到了线段 BN.

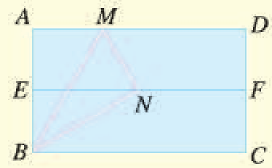


图 1

观察所得的$\angle ABM$，$\angle MBN$ 和$\angle NBC$，这三个角有什么关系？你能证明吗？

通过证明可知，这是从矩形得到30°角的好方法，简单而准确. 由此，15°，60°，120°，150°等角就容易得到了.

活动2 黄金矩形

宽与长的比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（约为0.618）的矩形叫做黄金矩形. 黄金矩形给我们以协调、匀称的美感. 世界各国许多著名的建筑，为取得最佳的视觉效果，都采用了黄金矩形的设计，如希腊的巴特农神庙（图2）等.

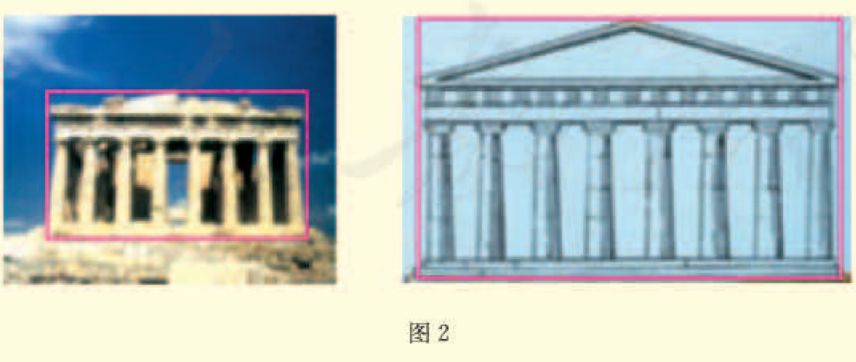


图 2

下面我们折叠出一个黄金矩形：

第一步，在一张矩形纸片的一端，利用图 3 的方法折出一个正方形，然后把纸片展平.

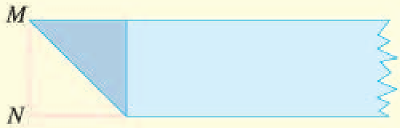


图 3

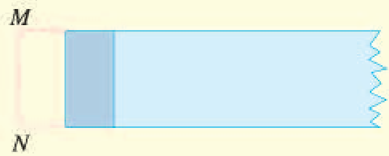


图 4

第二步，如图 4，把这个正方形折成两个相等的矩形，再把纸片展平.

第三步，折出内侧矩形的对角线 AB，并把 AB 折到图 5 中所示的 AD 处.

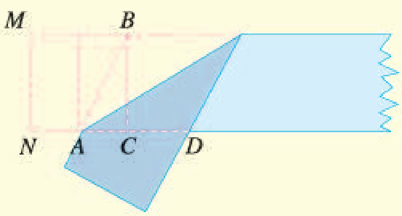


图 5

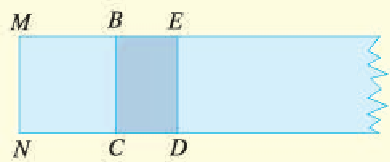


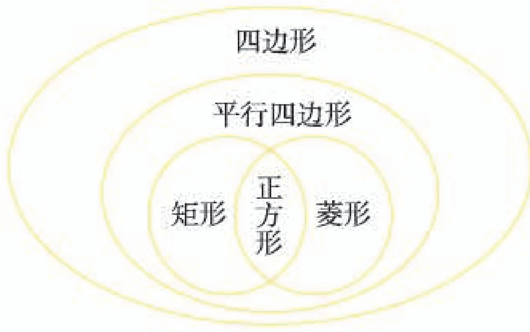
图 6

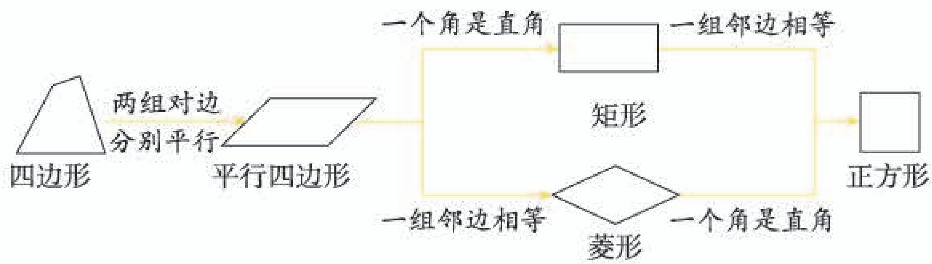
第四步，展平纸片，按照所得的点 D 折出 DE，矩形 $BCDE$（图 6）就是黄金矩形.

你能说明为什么吗？（提示：设 MN 的长为 2.）

小　结

一、本章知识结构图





二、回顾与思考

本章我们主要学习了平行四边形的性质定理、判定定理；探索并证明了三角形的中位线定理，介绍了平行线间距离的概念；通过平行四边形边、角的特殊化，获得了特殊的平行四边形——矩形、菱形和正方形，了解了它们之间的关系；根据它们的特殊性，得到了这些特殊的平行四边形的性质定理和判定定理.

在学习这些知识的过程中，我们采用了从一般到特殊的研究方法；利用图形的性质定理与判定定理之间的关系，通过证明性质定理的逆命题，得到了图形的判定定理. 这些方法在今后的学习中都是很有用的.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 你能概述一下研究平行四边形的思路和方法吗？

2. 平行四边形有哪些性质？如何判定一个四边形是平行四边形？

3. 矩形、菱形、正方形除了具有平行四边形的性质外，分别还具有哪些性质？如何判定一个四边形是矩形、菱形、正方形？你能总结一下研究这些性质和判定的方法吗？

4. 本章我们利用平行四边形的性质，得出了三角形的中位线定理. 你能仿照这一过程，再得出一些其他几何结论吗？

复习题 25

复习巩固

1. 选择题.

(1) 若平行四边形中两个内角的度数比为 $1:2$，则其中较小的内角是（　　）.

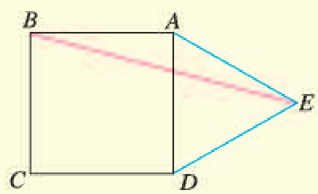
(A) $90°$　　(B) $60°$　　(C) $120°$　　(D) $45°$

(2) 若菱形的周长为 8，高为 1，则菱形两邻角的度数比为（　　）.

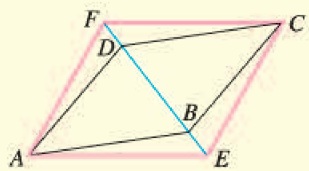
(A) $3:1$　　(B) $4:1$　　(C) $5:1$　　(D) $6:1$

(3) 如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧，作等边三角形 ADE，则 $\angle AEB$ 为（　　）.

(A) $10°$　　(B) $15°$　　(C) $20°$　　(D) $12.5°$



（第 1（3）题）

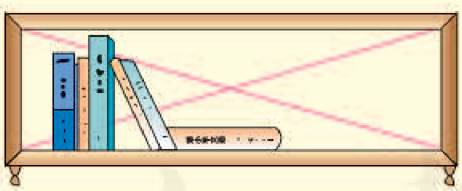


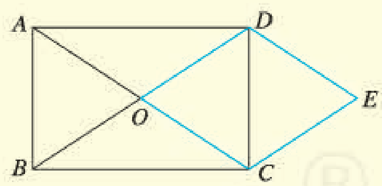
（第 2 题）

2. 如图，将▱$ABCD$ 的对角线 BD 向两个方向延长，分别至点 E 和点 F，且使 $BE=DF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

3. 矩形对角线组成的对顶角中，有一组是两个 $50°$的角. 对角线与各边组成的角是多少度？

4. 如图，你能用一根绳子检查一个书架的侧边是否和上、下底都垂直吗？为什么？

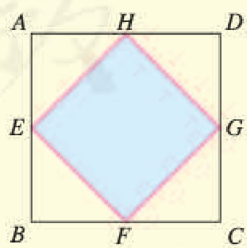

（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $DE \parallel AC$，$CE \parallel BD$. 求证：四边形 $OCED$ 是菱形.

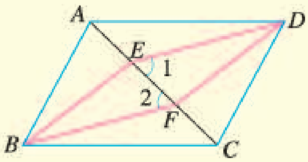
6. 如图，E，F，G，H 分别是正方形 $ABCD$ 各边的中点. 四边形 $EFGH$ 是什么四边形？为什么？



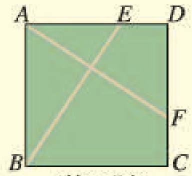
（第 6 题）

综合运用

7. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$BE /\!/ DF$，且分别交对角线 AC 于点 E，F，连接 ED，BF. 求证 $\angle 1=\angle 2$.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，$ABCD$ 是一个正方形花园，E，F 是它的两个门，且 $DE=CF$. 要修建两条路 BE 和 AF，这两条路等长吗？它们有什么位置关系？为什么？

9. 我们把顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫做中点四边形.

（1）任意四边形的中点四边形是什么形状？为什么？

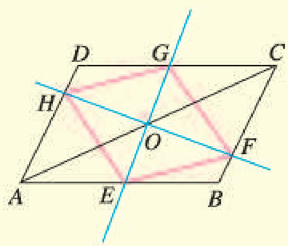
（2）任意平行四边形的中点四边形是什么形状？为什么？

（3）任意矩形、菱形和正方形的中点四边形分别是什么形状？为什么？

10. 如果一个四边形是轴对称图形，并且有两条互相垂直的对称轴，它一定是菱形吗？一定是正方形吗？

11. 用纸板剪成的两个全等三角形能够拼成什么四边形？要想拼成一个矩形，需要两个什么样的全等三角形？要想拼成菱形或正方形呢？动手剪拼一下，并说明理由.

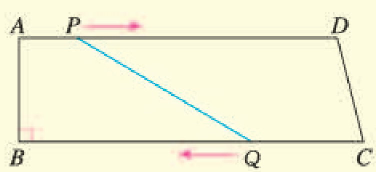
12. 如图，过▱$ABCD$ 的对角线 AC 的中点 O 作两条互相垂直的直线，分别交 AB，BC，CD，DA 于 E，F，G，H 四点，连接 EF，FG，GH，HE. 试判断四边形 $EFGH$ 的形状，并说明理由.



（第 12 题）

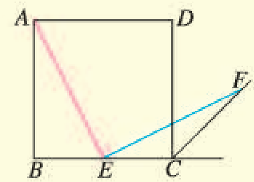
拓广探索

13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$\angle B=90°$，$AB=8$ cm，$AD=24$ cm，$BC=26$ cm. 点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度向点 D 运动；点 Q 从点 C 同时出发，以 3 cm/s 的速度向点 B 运动. 规定其中一个动点到达端点时，另一个动点也随之停止运动. 从运动开始，使 $PQ /\!/ CD$ 和 $PQ=CD$，分别需经过多少时间？为什么？



（第 13 题）

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点，$\angle AEF=90^\circ$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证 $AE=EF$.（提示：取 AB 的中点 G，连接 EG.）



（第 14 题）

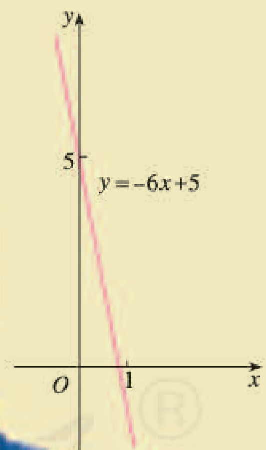
15. 求证：平行四边形两条对角线的平方和等于四条边的平方和.

第二十六章　一次函数

“万物皆变”——行星在宇宙中的位置随时间而变化，气温随海拔而变化，树高随树龄而变化……在你周围的事物中，这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在.

为了研究这些运动变化现象中变量间的依赖关系，数学中逐渐形成了函数概念. 人们通过研究函数及其性质，更深入地认识现实世界中许多运动变化的规律.

本章中，我们将从初步认识变量与函数开始，重点学习一类最基本的函数——一次函数，结合它的图象讨论它的性质，并利用它研究一些数学问题和实际问题，感受函数在解决运动变化问题中的重要作用.



海拔 x/km	…	1	1.5	2	2.5	3	…
气温 y/℃	…	−1	−4	−7	−10	−13	…

26.1 函数

26.1.1 变量与函数

先请思考下面几个问题：

(1) 汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，行驶路程为 s km，行驶时间为 t h. 填写表 26-1，s 的值随 t 的值的变化而变化吗？

表 26-1

t / h	1	2	3	4	5
s / km					

(2) 电影票的售价为 10 元/张. 第一场售出 150 张票，第二场售出 205 张票，第三场售出 310 张票，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出 x 张票，票房收入为 y 元，y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

(3) 你见过水中涟漪吗？如图 26.1-1，圆形水波慢慢地扩大. 在这一过程中，当圆的半径 r 分别为 10 cm，20 cm，30 cm 时，圆的面积 S 分别为多少？S 的值随 r 的值的变化而变化吗？

图 26.1-1

(4) 用 10 m 长的绳子围一个矩形. 当矩形的一边长 x 分别为 3 m，3.5 m，4 m，4.5 m 时，它的邻边长 y 分别为多少？y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

这些问题反映了不同事物的变化过程. 其中有些量的数值是变化的，例如时间 t，路程 s；售出票数 x，票房收入 y……有些量的数值是始终不变的，例如速度 60 km/h，票价 10 元/张……在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为**变量** (variable)，数值始终不变的量为**常量** (constant).

练习

指出下列问题中的变量和常量：

(1) 某市的自来水价为 4 元/t. 现要抽取若干户居民调查水费支出情况，记某户月用水量为 x t，月应交水费为 y 元.

（2）某地手机通话费为 0.2 元/min. 李明在手机话费卡中存入 30 元，记此后他的手机通话时间为 t min，话费卡中的余额为 w 元.

（3）水中涟漪（圆形水波）不断扩大，记它的半径为 r，圆周长为 C，圆周率（圆周长与直径之比）为 π.

（4）把 10 本书随意放入两个抽屉（每个抽屉内都放），第一个抽屉放入 x 本，第二个抽屉放入 y 本.

思考

问题（1）～（4）中是否各有两个变量？同一个问题中的变量之间有什么联系？

在问题（1）中，观察填出的表格，可以发现：t 和 s 是两个变量，每当 t 取定一个值时，s 就有唯一确定的值与其对应. 例如 $t=1$，则 $s=60$；$t=2$，则 $s=120$……$t=5$，则 $s=300$.

在问题（2）中，可以发现：x 和 y 是两个变量，每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应. 例如，若 $x=150$，则 $y=1\ 500$；若 $x=205$，则 $y=2\ 050$；若 $x=310$，则 $y=3\ 100$.

在问题（3）中，可以发现：r 和 S 是两个变量，每当 r 取定一个值时，S 就有唯一确定的值与其对应. 它们的关系式为 $S=\pi r^2$. 据此可以算出 r 分别为 10 cm，20 cm，30 cm 时，S 分别为 100π cm^2，400π cm^2，900π cm^2.

在问题（4）中，可以发现：x 和 y 是两个变量，每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应. 它们的关系式为 $y=5-x$. 据此可以算出 x 分别为 3 m，3.5 m，4 m，4.5 m 时，y 分别为 2 m，1.5 m，1 m，0.5 m.

归纳

上面每个问题中的两个变量互相联系，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就有唯一确定的值与其对应.

一些用图或表格表达的问题中，也能看到两个变量之间有上面那样的关系.

思考

(1) 图 26.1-2 是体检时的心电图，其中图上点的横坐标 x 表示时间，纵坐标 y 表示心脏部位的生物电流，它们是两个变量. 在心电图中，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应吗？

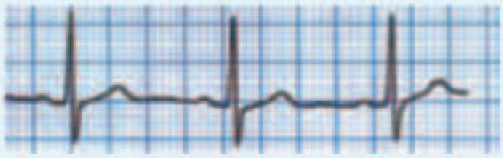


图 26.1-2

(2) 下面的我国人口数统计表（表 26-2）中，年份与人口数可以分别记作两个变量 x 与 y. 对于表中每一个确定的年份 x，都对应着一个确定的人口数 y 吗？

表 26-2　中国人口数统计表

年　份	人口数/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.76
1999	12.52
2010	13.71

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是**自变量**(independent variable)，y 是 x 的**函数**（function）. 如果当 $x=a$ 时 $y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的**函数值**.

可以认为：在前面问题（1）中，时间 t 是自变量，路程 s 是 t 的函数，当 $t=1$时，函数值 $s=60$，当 $t=2$ 时，函数值 $s=120$；在心电图中，时间 x 是自变量，心脏部位的生物电流 y 是 x 的函数；在人口数统计表中，年份 x 是自变量，人口数 y 是 x 的函数，当 $x=2010$ 时，函数值$y=13.71$.

从上面可知，函数是刻画变量之间对应关系的数学模型，许多问题中变量之间的关系都可以用函数来表示.

例 1　汽车油箱中有汽油50 L. 如果不再加油，那么油箱中的油量 y(单

位：L）随行驶路程x（单位：km）的增加而减少，耗油量为0.1 L/km.

（1）写出表示 y 与 x 的函数关系的式子；

（2）指出自变量 x 的取值范围；

（3）汽车行驶 200 km 时，油箱中还有多少汽油？

解：（1）行驶路程 x 是自变量，油箱中的油量 y 是 x 的函数，它们的关系为

$$y=50-0.1x.$$

（2）仅从式子 $y=50-0.1x$ 看，x 可以取任意实数. 但是考虑到 x 代表的实际意义为行驶路程，因此 x 不能取负数. 行驶中的耗油量为 $0.1x$，它不能超过油箱中现有汽油量 50，即

$$0.1x\leqslant 50.$$

因此，自变量 x 的取值范围是

$$0\leqslant x\leqslant 500.$$

（3）汽车行驶200 km时，油箱中的汽油量是函数$y=50-0.1x$ 在 $x=200$ 时的函数值. 将 $x=200$ 代入$y=50-0.1x$，得

$$y=50-0.1\times 200=30.$$

汽车行驶200 km时，油箱中还有30 L汽油.

$0.1x$ 表示什么意思？

确定自变量的取值范围时，不仅要考虑使函数关系式有意义，而且还要注意问题的实际意义.

像 $y=50-0.1x$ 这样，用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系，是描述函数的常用方法. 这种式子叫做函数的**解析式**（analytic expression）.

练习

1. 下列问题中哪些量是自变量？哪些量是自变量的函数？试写出函数的解析式：

（1）改变正方形的边长 x，正方形的面积 S 随之改变.

（2）每分向一水池注水 0.1 m^3，注水量 y（单位：m^3）随注水时间 x（单位：min）的变化而变化.

（3）秀水村的耕地面积是 10^6 m^2，这个村人均占有耕地面积 y（单位：m^2）随这个村人数 n 的变化而变化.

（4）水池中有水 10 L，此后每小时漏水 0.05 L，水池中的水量 V（单位：L）随时间 t（单位：h）的变化而变化.

2. 梯形的上底长 2 cm，高 3 cm，下底长 x cm 大于上底长但不超过 5 cm. 写出梯形面积 S 关于 x 的函数解析式及自变量 x 的取值范围.

26.1.2 函数的图象

有些问题中的函数关系很难列式子表示，但是可以用图来直观地反映，例如用心电图表示心脏部位的生物电流与时间的关系. 即使对于能列式表示的函数关系，如果也能画图表示，那么会使函数关系更直观.

例如，正方形的面积 S 与边长 x 的函数解析式为 $S=x^2$. 根据问题的实际意义，可知自变量 x 的取值范围是 $x>0$. 我们还可以利用在坐标系中画图的方法来表示 S 与 x 的关系.

计算并填写表 26-3.

自变量 x 的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值 S，是否确定了一个点 (x, S) 呢?

表 26-3

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
S	0	0.25	1						

如图 26.1-3，在直角坐标系中，画出上面表格中各对数值所对应的点，然后连接这些点. 所得曲线上每一个点都代表 x 的值与 S 的值的一种对应，例如点 (2, 4) 表示当 $x=2$ 时，$S=4$.

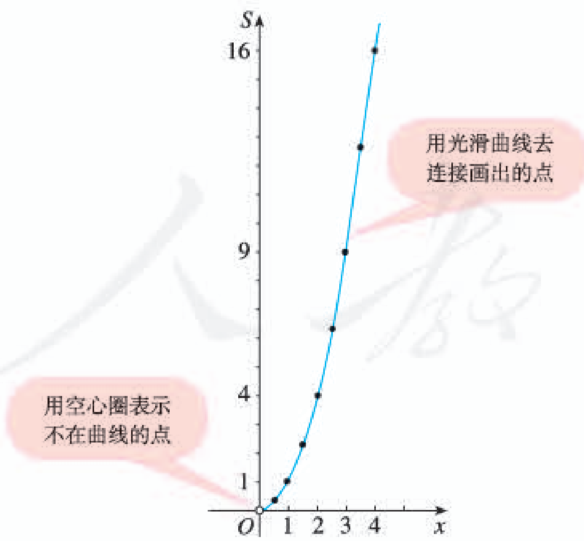


图 26.1-3

表示 x 与 S 的对应关系的点有无数个. 但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置.

一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的**图象**（graph）. 图 26.1-3 的曲线即函数

$$S=x^2\ (x>0)$$

的图象.

通过图象可以数形结合地研究函数.

思考

图 26.1-4 是自动测温仪记录的图象，它反映了北京的春季某天气温 T 如何随时间 t 的变化而变化. 你从图象中得到了哪些信息？

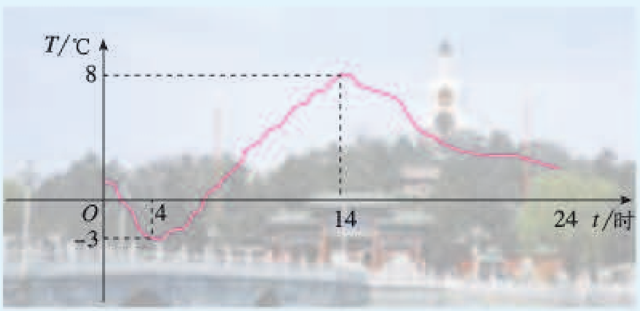


图 26.1-4

如有条件，你可以用带有温度探头的计算机（器），测量、记录温度，并绘制表示温度变化的图象.

可以认为，气温 T 是时间 t 的函数，图 26.1-4 是这个函数的图象. 由图象可知：

（1）这一天中凌晨 4 时气温最低（-3 ℃），14 时气温最高（8 ℃）.

（2）从 0 时至 4 时气温呈下降状态（即温度随时间的增长而下降），从 4 时到 14 时气温呈上升状态，从 14 时至 24 时气温又呈下降状态.

（3）我们可以从图象中看出这一天中任一时刻的气温大约是多少.

例 2 如图 26.1-5 所示，小明家、食堂、图书馆在同一条直线上. 小明从家去食堂吃早餐，接着去图书馆读报，然后回家. 图 26.1-6 反映了这个过程中，小明离家的距离 y 与时间 x 之间的对应关系.

图 26.1-5

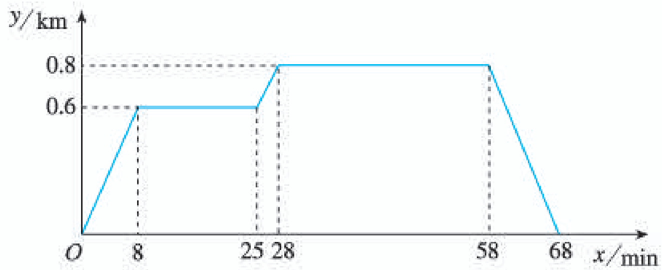


图 26.1-6

根据图象回答下列问题：

（1）食堂离小明家多远？小明从家到食堂用了多少时间？

（2）小明吃早餐用了多少时间？

（3）食堂离图书馆多远？小明从食堂到图书馆用了多少时间？

（4）小明读报用了多少时间？

（5）图书馆离小明家多远？小明从图书馆回家的平均速度是多少？

分析： 小明离家的距离 y 是时间 x 的函数. 由图象中有两段平行于 x 轴的线段可知，小明离家后有两段时间先后停留在食堂与图书馆里.

解：（1）由纵坐标看出，食堂离小明家0.6 km；由横坐标看出，小明从家到食堂用了 8 min.

（2）由横坐标看出，$25-8=17$，小明吃早餐用了 17 min.

（3）由纵坐标看出，$0.8-0.6=0.2$，食堂离图书馆 0.2 km；由横坐标看出，$28-25=3$，小明从食堂到图书馆用了 3 min.

（4）由横坐标看出，$58-28=30$，小明读报用了 30 min.

（5）由纵坐标看出，图书馆离小明家 0.8 km；由横坐标看出，$68-58=10$，小明从图书馆回家用了 10 min，由此算出平均速度是 0.08 km/min.

例 3 在下列式子中，对于 x 的每一个确定的值，y 有唯一的对应值，即 y 是 x 的函数. 画出这些函数的图象：

（1）$y=x+0.5$；　　　　（2）$y=\dfrac{6}{x}$ $(x>0)$.

解：（1）从式子 $y=x+0.5$ 可以看出，x 取任意实数时这个式子都有意义，所以 x 的取值范围是全体实数.

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表（计算并填写表 26-4 中空格）.

表 26-4

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…			-0.5	0.5	1.5	2.5		…

根据表中数值描点（x，y），并用平滑曲线连接这些点（图 26.1-7）.

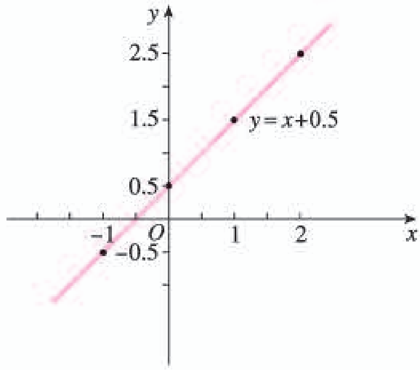


图 26.1-7

你画出的图象
与图 26.1-7 相同吗？

从函数图象可以看出，直线从左向右上升，即当 x 由小变大时，$y=x+0.5$ 随之增大.

（2）$y=\dfrac{6}{x}$（$x>0$）.

列表（计算并填写表 26-5 中空格）.

表 26-5

x	…	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	…
y	…		6		3		2		1.5			…

根据表中数值描点（x，y），并用平滑曲线连接这些点（图 26.1-8）.

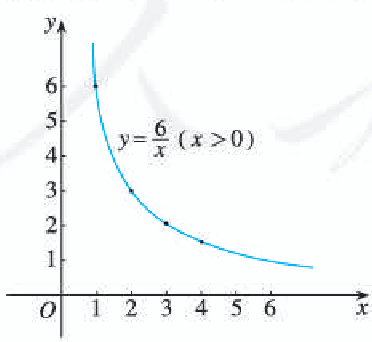


图 26.1-8

你画出的图象
与图 26.1-8 相同吗？

从函数图象可以看出，曲线从左向右下降，即当 x 由小变大时，$y=\frac{6}{x}$ $(x>0)$ 随之减小.

归纳

描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步，列表——表中给出一些自变量的值及其对应的函数值；

第二步，描点——在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点；

第三步，连线——按照横坐标由小到大的顺序，把所描出的各点用平滑曲线连接起来.

练习

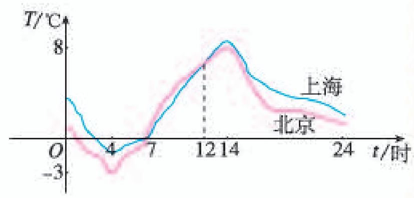
1. (1) 画出函数 $y=2x-1$ 的图象；

   (2) 判断点 $A(-2.5, -4)$，$B(1, 3)$，$C(2.5, 4)$ 是否在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

2. 如图是某一天北京与上海的气温随时间变化的图象.

   (1) 这一天内，上海与北京何时气温相同？

   (2) 这一天内，上海在哪段时间比北京气温高？在哪段时间比北京气温低？



（第 2 题）

3. (1) 画出函数 $y=x^2$ 的图象.

   (2) 从图象中观察，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大，还是 y 随 x 的增大而减小？当 $x>0$ 时呢？

由上可知，写出函数解析式，或者列表格，或者画函数图象，都可以表示具体的函数. 这三种表示函数的方法，分别称为解析式法、列表法和图象法.

思考

从前面的例子看，你认为三种表示函数的方法各有什么优点？

表示函数时，要根据具体情况选择适当的方法，有时为全面地认识问题，需要同时使用几种方法.

例 4 一个水库的水位在最近 5 h 内持续上涨．表 26-6 记录了这 5 h 内 6 个时间点的水位高度，其中 t 表示时间，y 表示水位高度．

表 26-6

t / h	0	1	2	3	4	5
y / m	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5

（1）在平面直角坐标系中描出表中数据对应的点，这些点是否在一条直线上？由此你能发现水位变化有什么规律吗？

（2）水位高度 y 是否为时间 t 的函数？如果是，试写出一个符合表中数据的函数解析式，并画出这个函数的图象．这个函数能表示水位的变化规律吗？

（3）据估计这种上涨规律还会持续 2 h，预测再过 2 h 水位高度将为多少米．

解：（1）如图 26.1-9，描出表 26-6 中数据对应的点．可以看出，这 6 个点在一条直线上．再结合表中数据，可以发现每小时水位上升 0.3 m．由此猜想，如果画出这 5 h 内其他时刻（如 $t=2.5$ h 等）及其水位高度所对应的点，它们可能也在这条直线上，即在这个时间段中水位可能是始终以同一速度均匀上升的．

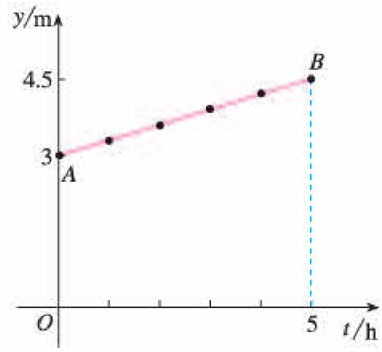


图 26.1-9

（2）由于水位在最近 5 h 内持续上涨，对于时间 t 的每一个确定的值，水位高度 y 都有唯一的值与其对应，所以 y 是 t 的函数．开始时水位高度为 3 m，以后每小时水位上升 0.3 m．函数

$$y=0.3t+3\ (0\leqslant t\leqslant 5)$$

是符合表中数据的一个函数，它表示经过 t h水位上升 $0.3t$ m，即水位 y 为 $(0.3t+3)$ m．其图象是图 26.1-10 中点 A（0，3）和点 B（5，4.5）之间的线段 AB．

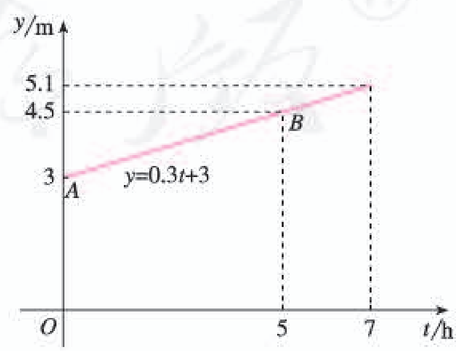


图 26.1-10

如果在这 5 h 内，水位一直匀速上升，即升速为 0.3 m/h，那么函数 $y=0.3t+3$ $(0\leqslant t\leqslant 5)$ 就精确地表示了这种变化规律．即使在这 5 h 内，水位的升速有些变化，

而由于每小时水位上升 0.3 m 是确定的，因此这个函数也可以近似地表示水位的变化规律.

（3）如果水位的变化规律不变，则可利用上述函数预测，再过 2 h，即 $t=5+2=7$（h）时，水位高度

$$y=0.3\times7+3=5.1\ (\text{m}).$$

把图 26.1-9 中的函数图象（线段 AB）向右延伸到 $t=7$ 所对应的位置，得图 26.1-10，从它也能看出这时的水位高度约为 5.1 m.

由例 4 可以看出，函数的不同表示法之间可以转化.

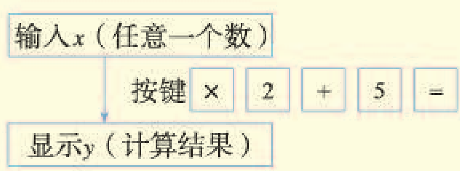
练习

1. 用列表法与解析式法表示 n 边形的内角和 m（单位：度）关于边数 n 的函数.
2. 用解析式法与图象法表示等边三角形的周长 l 关于边长 a 的函数.
3. 一条小船沿直线向码头匀速前进. 在 0 min，2 min，4 min，6 min 时，测得小船与码头的距离分别为 200 m，150 m，100 m，50 m. 小船与码头的距离 s 是时间 t 的函数吗？如果是，写出函数解析式，并画出函数图象. 如果船速不变，多长时间后小船到达码头？

习题 26.1

复习巩固

1. 购买一些铅笔，单价为 0.2 元/支，总价 y 元随铅笔支数 x 变化. 指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出表示函数与自变量关系的式子.
2. 一个三角形的底边长为 5，高 h 可以任意伸缩. 写出面积 S 随 h 变化的解析式，并指出其中的常量与变量，自变量与函数，以及自变量的取值范围.
3. 在计算器上按下面的程序操作：



填表：

x	1	3	-4	0	101	-5.2
y						

显示的计算结果 y 是输入数值 x 的函数吗？为什么？

4. 下列式子中的 y 是 x 的函数吗？为什么？

(1) $y=3x-5$；　(2) $y=\dfrac{x-2}{x-1}$；　(3) $y=\sqrt{x-1}$.

请再举出一些函数的例子.

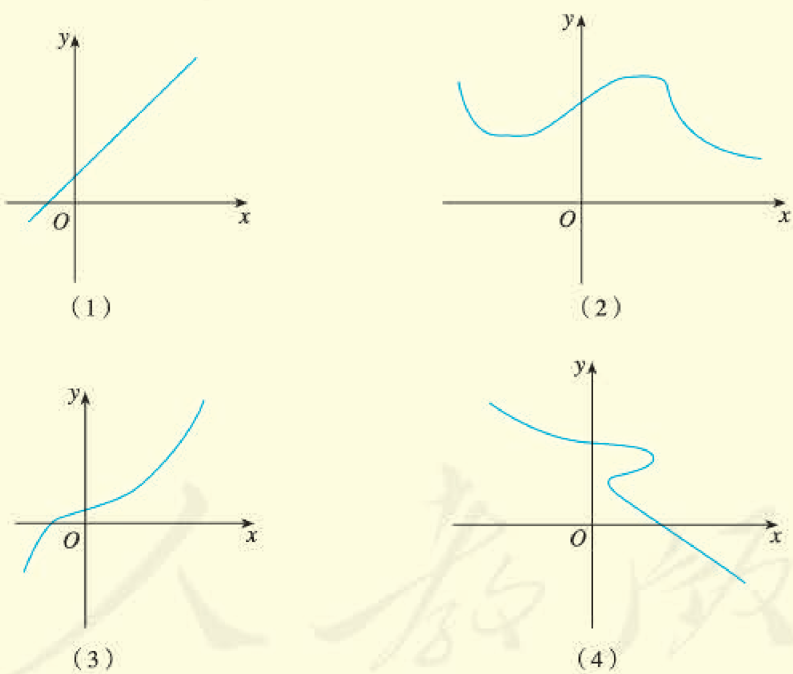
5. 分别对第 4 题中的各函数解析式进行讨论：

(1) 自变量 x 在什么范围内取值时函数解析式有意义？

(2) 当 $x=5$ 时对应的函数值是多少？

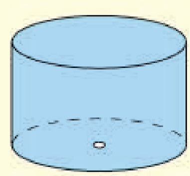
6. 画出函数 $y=0.5x$ 的图象，并指出自变量 x 的取值范围.

7. 下列各曲线中哪些表示 y 是 x 的函数？

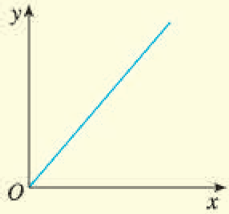


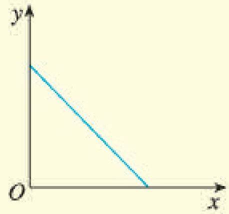
(第 7 题)

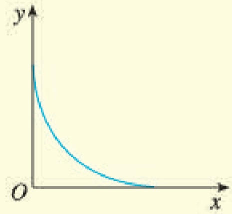
8. “漏壶”是一种古代计时器. 在它内部盛一定量的水，水从壶下的小孔漏出. 壶内壁有刻度，人们根据壶中水面的位置计算时间. 用 x 表示漏水时间，y 表示壶底到水面的高度. 下页哪个图象适合表示 y 与 x 的对应关系？(不考虑水量变化对压力的影响.)



漏壶



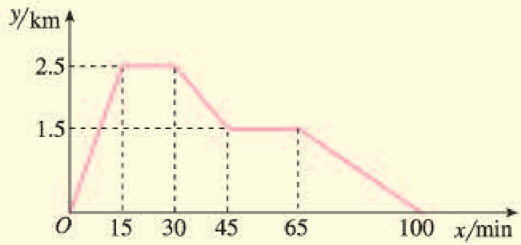




（第 8 题）

综合运用

9. 已知张强家、体育场、文具店在同一直线上. 下面的图象反映的过程是：张强从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又走到文具店去买笔，然后散步走回家. 图中 x 表示时间，y 表示张强离家的距离.



（第 9 题）

根据图象回答下列问题：

(1) 体育场离张强家多远？张强从家到体育场用了多少时间？

(2) 体育场离文具店多远？

(3) 张强在文具店停留了多少时间？

(4) 张强从文具店回家的平均速度是多少？

10. 某种活期储蓄的月利率是 0.06%，存入 100 元本金. 求本息和 y（本金与利息的和，单位：元）随所存月数 x 变化的函数解析式，并计算存期为 4 个月时的本息和.

11. 正方形边长为 3. 若边长增加 x，则面积增加 y. 求 y 随 x 变化的函数解析式，指出自变量与函数，并以表格形式表示当 x 等于 1，2，3，4 时 y 的值.

12. 甲、乙两车沿直路同向行驶，车速分别为 20 m/s 和 25 m/s. 现甲车在乙车前 500 m处，设 x s（$0 \leqslant x \leqslant 100$）后两车相距 y m. 用解析式和图象表示 y 与 x 的对应关系.

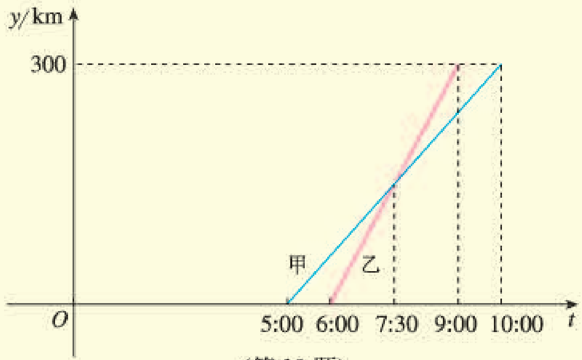
13. 甲、乙两车从 A 城出发前往 B 城. 在整个行程中，汽车离开 A 城的距离 y 与时刻 t 的对应关系如下页图所示.

(1) A，B 两城相距多远？

(2) 哪辆车先出发？哪辆车先到 B 城？

(3) 甲、乙两车的平均速度分别为多少?

(4) 你还能从图中得到哪些信息?



(第 13 题)

拓广探索

14. 在同一直角坐标系中分别画出函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象. 利用这两个图象回答:

(1) x 取什么值时, x 比 $\dfrac{1}{x}$ 大?

(2) x 取什么值时, x 比 $\dfrac{1}{x}$ 小?

15. 四边形有两条对角线, 五边形、六边形分别有多少条对角线? n 边形呢? 多边形对角线的条数是边数的函数吗?

阅读与思考

科学家如何测算岩石的年龄

你知道科学家如何测算岩石的年龄吗？解决这个问题时也用到函数这个数学工具.

1903 年，英国物理学家卢瑟福通过实验证实，放射性物质放出射线后，这种物质的质量将减少，减少的速度开始较快，后来较慢. 物质所剩的质量与时间成某种函数关系. 图 1 为表示镭的放射规律的函数图象.

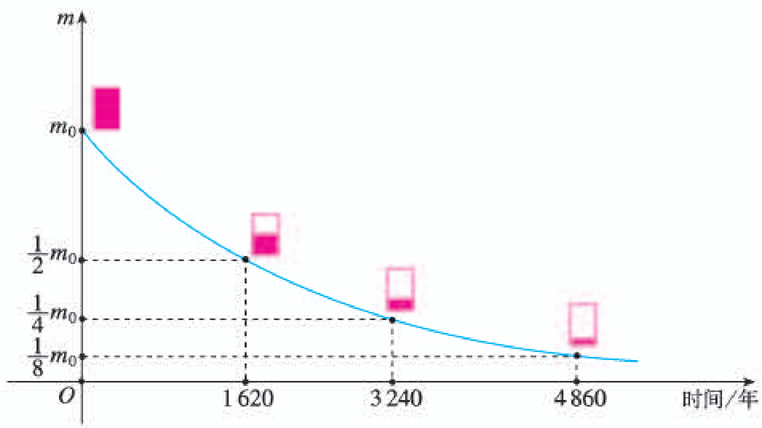


图 1

由图 1 我们可以发现：镭的质量由 m_0 缩减到 $\frac{1}{2}m_0$ 需1 620年，由 $\frac{1}{2}m_0$ 缩减到 $\frac{1}{4}m_0$ 需年数为3 240−1 620=1 620，由 $\frac{1}{4}m_0$ 缩减到 $\frac{1}{8}m_0$ 需年数为4 860−3 240=1 620，即镭的质量缩减为原来的一半所用的时间是一个不变的量——1 620年. 一般把1 620年称为镭的半衰期.

实际上，所有放射性物质都有自己的半衰期. 铀的半衰期为 45.6 亿年，蜕变后的铀最后成为铅. 因此，科学家们测出一块岩石中现在含铀和铅的质量，便可以算出这块岩石原来的含铀量，进而利用半衰期算出从原来含铀量到现在含铀量经过了多少时间，从而推算出这块岩石的年龄. 据此测算出地球上最古老的岩石的年龄约为 30 亿年.

请思考下面的问题，它能帮你理解“半衰”现象.

一个皮球从 16 m 高处下落，第一次落地后反弹起 8 m，第二次落地后反弹起 4 m，以后每次落地后的反弹高度都减半. 试写出表示反弹高度 h（单位：m）与落地次数 n 的对应关系的函数解析式. 皮球第几次落地后的反弹高度为 $\frac{1}{8}$ m?

26.2 一次函数

26.2.1 正比例函数

问题 1 2011 年开始运营的京沪高速铁路全长 1 318 km. 设列车的平均速度为 300 km/h. 考虑以下问题：

(1) 乘京沪高铁列车，从始发站北京南站到终点站上海虹桥站，约需多少小时（结果保留小数点后一位）？

(2) 京沪高铁列车的行程 y（单位：km）与运行时间 t（单位：h）之间有何数量关系？

(3) 京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 后，是否已经过了距始发站 1 100 km 的南京南站？

分析：(1) 京沪高铁列车全程运行时间约需

$$1\,318 \div 300 \approx 4.4 \text{ (h)}.$$

(2) 京沪高铁列车的行程 y 是运行时间 t 的函数，函数解析式为

$$y=300t \ (0 \leqslant t \leqslant 4.4).$$

(3) 京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 的行程，是当 $t=2.5$ 时函数 $y=300t$ 的值，即

$$y=300 \times 2.5=750 \text{ (km)}.$$

这时列车尚未到达距始发站 1 100 km 的南京南站.

以上我们用函数 $y=300t$（$0 \leqslant t \leqslant 4.4$）对京沪高铁列车的行程问题进行了讨论. 尽管实际情况可能会与此有一些小的不同，但这个函数基本上反映了列车的行程与运行时间之间的对应规律.

思考

下列问题中，变量之间的对应关系是函数关系吗？如果是，请写出函数解析式. 这些函数解析式有哪些共同特征？

(1) 圆的周长 l 随半径 r 的变化而变化.

(2) 铁的密度为 $7.9\ \text{g/cm}^3$，铁块的质量 m(单位：g) 随它的体积 V

（单位：cm^3）的变化而变化.

（3）每个练习本的厚度为0.5 cm，一些练习本摞在一起的总厚度h（单位：cm）随练习本的本数n的变化而变化.

（4）冷冻一个0 ℃的物体，使它每分下降2 ℃，物体的温度T（单位:℃）随冷冻时间t（单位：min）的变化而变化.

上面问题中，表示变量之间关系的函数解析式分别为

（1）$l=2\pi r$；　　　　（2）$m=7.9V$；

（3）$h=0.5n$；　　　　（4）$T=-2t$.

正如函数$y=300t$一样，上面这些函数都是常数与自变量的积的形式.

一般地，形如$y=kx$（k是常数，$k\neq 0$）的函数，叫做**正比例函数**（proportional function），其中k叫做比例系数.

练习

1. 下列式子中，哪些表示y是x的正比例函数？

（1）$y=-0.1x$；　（2）$y=\frac{x}{2}$；　（3）$y=2x^2$；　（4）$y^2=4x$.

2. 列式表示下列问题中的y与x的函数关系，并指出哪些是正比例函数.

（1）正方形的边长为x cm，周长为y cm；

（2）某人一年内的月平均收入为x元，他这年（12个月）的总收入为y元；

（3）一个长方体的长为2 cm，宽为1.5 cm，高为x cm，体积为y cm^3.

下面我们研究正比例函数的图象.

例1　画出下列正比例函数的图象：

（1）$y=2x$，$y=\frac{1}{3}x$；　　（2）$y=-1.5x$，$y=-4x$.

解：（1）函数$y=2x$中自变量x可为任意实数. 表26-7是y与x的几组对应值.

表 26-7

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

如图 26.2-1，在直角坐标系中描出以表中的值为坐标的点．将这些点连接起来，得到一条经过原点和第三、第一象限的直线．它就是函数 $y=2x$ 的图象.

用同样的方法，可以得到函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象（图 26.2-1）．它也是一条经过原点和第三、第一象限的直线.

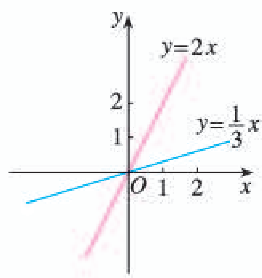
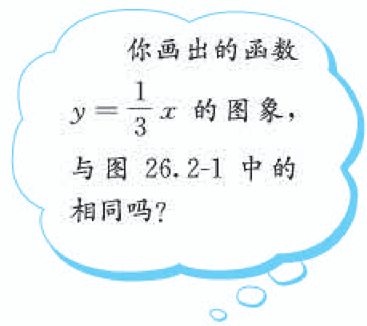


图 26.2-1



（2）函数 $y=-1.5x$ 中自变量 x 可为任意实数．表 26-8 是 y 与 x 的几组对应值.

表 26-8

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	4.5	3	1.5	0	-1.5	-3	-4.5	…

如图 26.2-2，在直角坐标系中描出以表中的值为坐标的点．将这些点连接起来，得到一条经过原点和第二、第四象限的直线，它就是函数 $y=-1.5x$ 的图象.

用同样的方法，可以得到函数 $y=-4x$ 的图象（图 26.2-2）．它也是一条经过原点和第二、第四象限的直线.

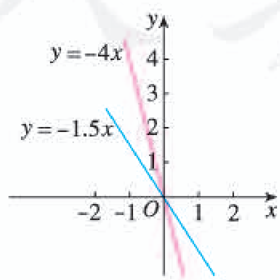
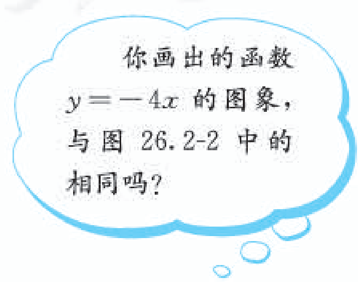


图 26.2-2



以上 4 个函数的图象都是经过原点的直线，其中函数 $y=2x$ 和 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象经过第三、第一象限，从左向右上升；函数 $y=-1.5x$ 和 $y=-4x$ 的图象经过第二、第四象限，从左向右下降.

一般地，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的图象是一条经过原点的直线，我们称它为直线$y=kx$. 当 $k>0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第三、第一象限，从左向右上升，即**随着 x 的增大 y 也增大**；当 $k<0$ 时，直线$y=kx$经过第二、第四象限，从左向右下降，即**随着 x 的增大 y 反而减小**.

思考

经过原点与点（1，k）（k 是常数，$k\neq0$）的直线是哪个函数的图象？画正比例函数的图象时，怎样画最简单？为什么？

因为两点确定一条直线，所以可用两点法画正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的图象. 一般地，过原点和点（1，k）（k 是常数，$k\neq0$）的直线，即正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的图象.

练习

用你认为最简单的方法画出下列函数的图象：

（1）$y=\frac{3}{2}x$；　　（2）$y=-3x$.

26.2.2　一次函数

问题 2　某登山队大本营所在地的气温为 5 ℃，海拔每升高1 km气温下降6 ℃. 登山队员由大本营向上登高x km时，他们所在位置的气温是y ℃. 试用函数解析式表示 y 与 x 的关系.

分析：y 随 x 变化的规律是：从大本营向上，当海拔增加x km时，气温从5 ℃减少$6x$ ℃. 因此 y 与 x 的函数解析式为

$$y=5-6x.$$

这个函数也可以写为

$$y=-6x+5.$$

当登山队员由大本营向上登高0.5 km时，他们所在位置的气温就是当$x=0.5$时函数$y=-6x+5$的值，即$y=-6\times0.5+5=2$(℃).

思考

下列问题中，变量之间的对应关系是函数关系吗？如果是，请写出函数解析式．这些函数解析式有哪些共同特征？

(1) 有人发现，在20 ℃～25 ℃时蟋蟀每分鸣叫次数c与温度t(单位:℃) 有关，即c的值约是t的7倍与35的差.

(2) 一种计算成年人标准体重G(单位：kg) 的方法是：以厘米为单位量出身高值h，再减常数105，所得差是G的值.

(3) 某城市的市内电话的月收费额y(单位：元) 包括月租费22元和拨打电话x min的计时费（按0.1元/min收取).

(4) 把一个长10 cm、宽5 cm的长方形的长减少x cm，宽不变，长方形的面积y（单位：cm^2）随x的变化而变化.

上面问题中，表示变量之间关系的函数解析式分别为

(1) $c=7t-35$ $(20\leqslant t\leqslant 25)$； (2) $G=h-105$；

(3) $y=0.1x+22$； (4) $y=-5x+50$ $(0\leqslant x<10)$.

正如函数$y=-6x+5$一样，上面这些函数都是常数k与自变量的积与常数b的和的形式.

一般地，形如$y=kx+b$（k，b是常数，$k\neq0$）的函数，叫做**一次函数**(linear function)．当$b=0$时，$y=kx+b$即$y=kx$，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数.

练习

1. 下列函数中哪些是一次函数？哪些又是正比例函数？

(1) $y=-8x$； (2) $y=\dfrac{-8}{x}$；

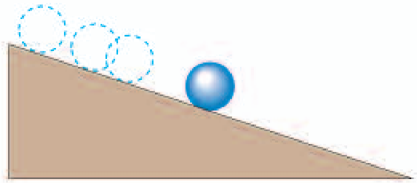
(3) $y=5x^2+6$； (4) $y=-0.5x-1$.

2. 一次函数$y=kx+b$，当$x=1$时，$y=5$；当$x=-1$时，$y=1$．求k和b的值.

3. 一个小球由静止开始沿一个斜坡向下滚动，其速度每秒增加 2 m/s.

(1) 求小球速度 v（单位：m/s）关于时间 t（单位：s）的函数解析式. 它是一次函数吗?

(2) 求第 2.5 s 时小球的速度.



（第 3 题）

例 2 画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象.

解： 函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 中，自变量 x 可以是任意实数. 列表表示几组对应值（计算并填写表 26-9 中空格）.

表 26-9

x	-2	-1	0	1	2
$y=-6x$			0	-6	
$y=-6x+5$			5	-1	

画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象（图 26.2-3）.

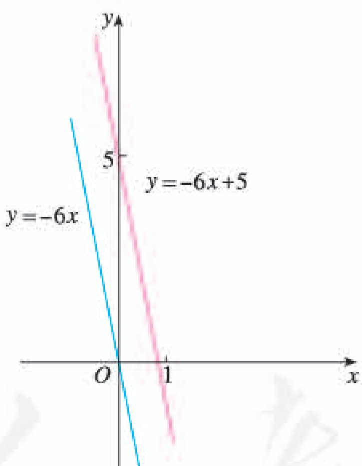


图 26.2-3

你画出的图象与图 26.2-3 相同吗?

思考

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点，填出你的观察结果：

这两个函数的图象形状都是______，并且倾斜程度______. 函数 $y=-6x$ 的图象经过原点，函数 $y=-6x+5$ 的图象与 y 轴交于点______，即它可以看作由直线 $y=-6x$ 向___平移___个单位长度而得到.

比较两个函数解析式，你能说出两个函数的图象有上述关系的道理吗？

联系上面结果，考虑一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象是什么形状，它与直线 $y=kx$（$k\neq0$）有什么关系．

比较一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）与正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的解析式，容易得出：

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象可以由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度得到(当 $b>0$ 时，向上平移；当 $b<0$ 时，向下平移)．一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象也是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$．

例 3　画出函数 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$ 的图象．

分析：由于一次函数的图象是直线，因此只要确定两个点就能画出它．

解：列表表示当 $x=0$，$x=1$ 时两个函数的对应值（表 26-10）．

表 26-10

x	0	1
$y=2x-1$	-1	1
$y=-0.5x+1$	1	0.5

过点 $(0, -1)$ 与点 $(1, 1)$ 画出直线 $y=2x-1$；过点 $(0, 1)$ 与点 $(1, 0.5)$ 画出直线 $y=-0.5x+1$．(图 26.2-4)

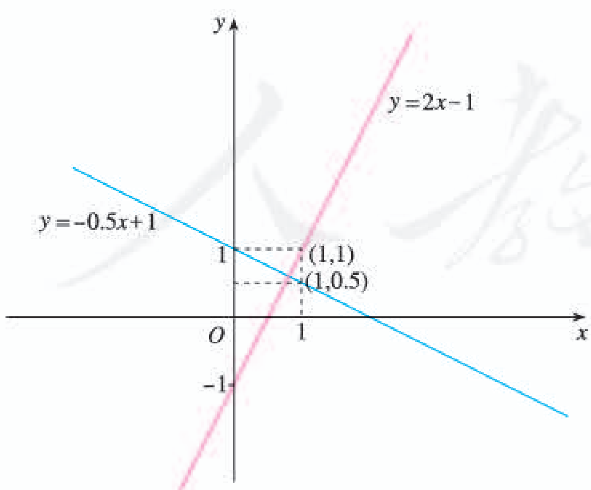


图 26.2-4

先画直线 $y=2x$ 与 $y=-0.5x$，再分别平移它们，也能得到直线 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$．

探究

画出函数 $y=x+1$，$y=-x+1$，$y=2x+1$，$y=-2x+1$ 的图象. 由它们联想：一次函数解析式 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）中，k 的正负对函数图象有什么影响？

观察前面一次函数的图象，可以发现规律：

当 $k>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 从左向右上升；当$k<0$时，直线 $y=kx+b$ 从左向右下降. 由此可知，一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）具有如下性质：

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

我们先通过观察发现图象（形）的规律，再根据这些规律得出关于数值大小的性质，这种数形结合的研究方法在数学学习中很重要.

练习

1. 直线 $y=2x-3$ 与 x 轴交点坐标为________，与 y 轴交点坐标为________，图象经过________象限，y 随 x 的增大而________.
2. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，并指出每小题中三个函数的图象有什么关系.
   (1) $y=x-1$，$y=x$，$y=x+1$；
   (2) $y=-2x-1$，$y=-2x$，$y=-2x+1$.
3. 分别在同一直角坐标系中画出下列（1）（2）中各函数的图象，并指出每组函数图象的共同之处.
   (1) $y=\frac{1}{2}x+1$，$y=x+1$，$y=2x+1$；
   (2) $y=-\frac{1}{2}x-1$，$y=-x-1$，$y=-2x-1$.

例 4 已知一次函数的图象过点（3，5）与（−4，−9），求这个一次函数的解析式.

分析：求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式，关键是求出 k，b 的值. 从已知条件可以列出关于 k，b 的二元一次方程组，并求出 k，b.

因为图象过（3，5）与（−4，−9）点，所以这两点的坐标必适合解析式.

解：设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b$（$k\neq0$）.

因为 $y=kx+b$ 的图象过点（3，5）与（-4，-9），所以

$$\begin{cases}3k+b=5,\\-4k+b=-9.\end{cases}$$

解方程组得

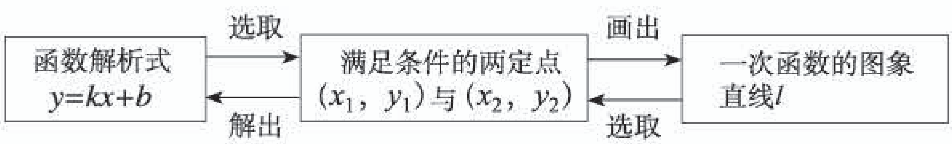
$$\begin{cases}k=2,\\b=-1.\end{cases}$$

这个一次函数的解析式为 $y=2x-1$.

像例 4 这样先设出函数解析式，再根据条件确定解析式中未知的系数，从而得出函数解析式的方法，叫做**待定系数法**.

由于一次函数 $y=kx+b$ 中有 k 和 b 两个待定系数，因此用待定系数法时需要根据两个条件列二元一次方程组（以 k 和 b 为未知数）. 解方程组后就能具体写出一次函数的解析式.

例 3 与例 4 从两方面说明：



例 5 “黄金 1 号”玉米种子的价格为 5 元/kg. 如果一次购买 2 kg 以上的种子，超过 2 kg 部分的种子价格打 8 折.

（1）填写表 26-11.

表 26-11

购买量/kg	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	…
付款金额/元									…

（2）写出付款金额关于购买量的函数解析式，并画出函数图象.

分析：付款金额与种子价格相关. 问题中种子价格不是固定不变的，它与购买量有关. 设购买 x kg 种子，当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，种子价格为5 元/kg；当$x>2$ 时，其中有 2 kg 种子按 5 元/kg 计价，其余的（$x-2$）kg（即超出2 kg部分）种子按 4 元/kg（即 8 折）计价. 因此，写函数解析式与画函数图象时，应对 $0\leqslant x\leqslant2$ 和 $x>2$ 分段讨论.

解：(1)

表 26-12

购买量/kg	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	…
付款金额/元	2.5	5	7.5	10	12	14	16	18	…

(2) 设购买量为 x kg，付款金额为 y 元.

当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$y=5x$；

当 $x>2$ 时，$y=4(x-2)+10=4x+2$.

函数图象如图 26.2-5.

> y 与 x 的函数解析式也可合起来表示为
> $$y=\begin{cases}5x, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4x+2, & x>2.\end{cases}$$

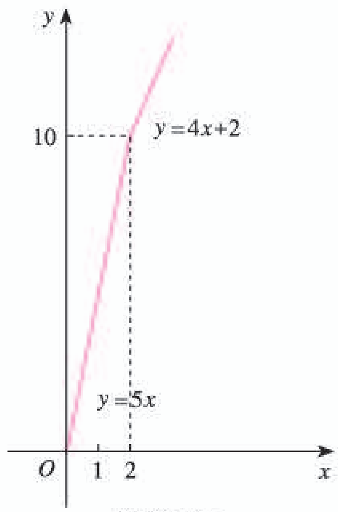


图 26.2-5

思考

你能由上面的函数解析式解决以下问题吗？由函数图象也能解决这些问题吗？

(1) 一次购买 1.5 kg 种子，需付款多少元？

(2) 一次购买 3 kg 种子，需付款多少元？

练习

1. 已知一次函数的图象经过点 (9，0) 和点 (24，20)，写出函数解析式.
2. 一个试验室在 0:00—2:00 保持 20 ℃的恒温，在 2:00—4:00 匀速升温，每小时升高 5 ℃. 写出试验室温度 T（单位:℃）关于时间 t（单位：h）的函数解析式，并画出函数图象.

26.2.3 一次函数与方程、不等式

方程、不等式与函数之间有着密切的联系. 下面我们先从函数的角度看解一元一次方程.

思考

下面 3 个方程有什么共同点和不同点? 你能从函数的角度对解这 3 个方程进行解释吗?

(1) $2x+1=3$; (2) $2x+1=0$; (3) $2x+1=-1$.

可以看出, 这 3 个方程的等号左边都是 $2x+1$, 等号右边分别是 3, 0, -1. 从函数的角度看, 解这 3 个方程相当于在一次函数 $y=2x+1$ 的函数值分别为 3, 0, -1 时, 求自变量 x 的值. 或者说, 在直线 $y=2x+1$ 上取纵坐标分别为 3, 0, -1 的点, 看它们的横坐标分别为多少 (图 26.2-6).

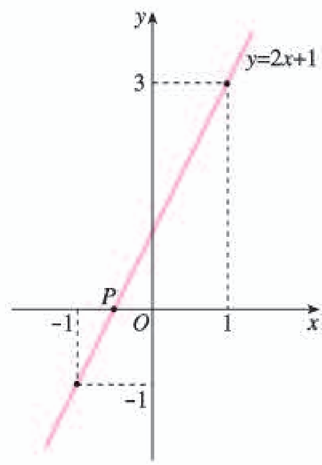


图 26.2-6

因为任何一个以 x 为未知数的一元一次方程都可以变形为 $ax+b=0$ ($a\neq 0$) 的形式, 所以解一元一次方程相当于在某个一次函数 $y=ax+b$ 的函数值为 0 时, 求自变量 x 的值.

我们再从函数的角度看解一元一次不等式.

思考

下面 3 个不等式有什么共同点和不同点? 你能从函数的角度对解这 3 个不等式进行解释吗?

(1) $3x+2>2$; (2) $3x+2<0$; (3) $3x+2<-1$.

可以看出, 这 3 个不等式的不等号左边都是 $3x+2$, 而不等号及不等号右边却有不同. 从函数的角度看, 解这 3 个不等式相当于在一次函数 $y=3x+2$ 的函数值分别大于 2、小于 0、小于 -1 时, 求自变量 x 的取值范围. 或者说,

在直线 $y=3x+2$ 上取纵坐标分别满足大于 2、小于 0、小于 -1 的点，看它们的横坐标分别满足什么条件（图 26.2-7）.

因为任何一个以 x 为未知数的一元一次不等式都可以变形为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$（$a\neq 0$）的形式，所以解一元一次不等式相当于在某个一次函数 $y=ax+b$ 的函数值大于 0 或小于 0 时，求自变量 x 的取值范围.

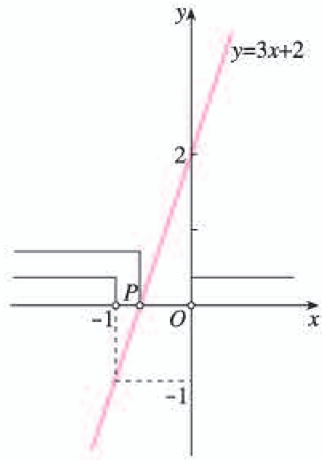


图 26.2-7

最后，我们从函数的角度看解二元一次方程组.

问题 3 1 号探测气球从海拔 5 m 处出发，以 1 m/min的速度上升. 与此同时，2 号探测气球从海拔 15 m 处出发，以 0.5 m/min 的速度上升. 两个气球都上升了 1 h.

(1) 用式子分别表示两个气球所在位置的海拔 y（单位：m）关于上升时间 x（单位：min）的函数关系；

(2) 在某时刻两个气球能否位于同一高度？如果能，这时气球上升了多长时间？位于什么高度？

分析：(1) 气球上升时间 x 满足 $0\leqslant x\leqslant 60$.

对于 1 号气球，y 关于 x 的函数解析式为 $y=x+5$.

对于 2 号气球，y 关于 x 的函数解析式为 $y=0.5x+15$.

(2) 在某时刻两个气球位于同一高度，就是说对于 x 的某个值（$0\leqslant x\leqslant 60$），函数 $y=x+5$ 和 $y=0.5x+15$ 有相同的值 y. 如能求出这个 x 和 y，则问题得到解决. 由此容易想到解二元一次方程组

$$\begin{cases}y=x+5,\\ y=0.5x+15,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x-y=-5,\\ 0.5x-y=-15.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=20,\\ y=25.\end{cases}$ 这就是说，当上升 20 min 时，两个气球都位于海拔 25 m 的高度.

我们也可以用一次函数的图象解释上述问题的解答. 如图 26.2-8，在同一直角坐标系中，画出一次函数 $y=x+5$ 和 $y=0.5x+15$ 的图象. 这两

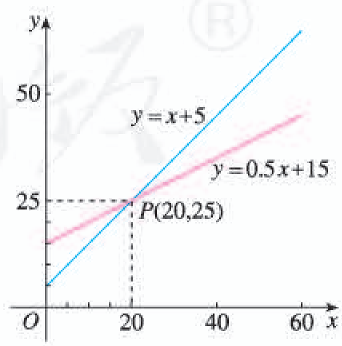


图 26.2-8

条直线的交点坐标为（20，25），这也说明当上升 20 min 时，两个气球都位于海拔25 m的高度.

一般地，因为每个含有未知数 x 和 y 的二元一次方程，都可以改写为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）的形式，所以每个这样的方程都对应一个一次函数，于是也对应一条直线. 这条直线上每个点的坐标（x，y）都是这个二元一次方程的解.

由上可知，由含有未知数 x 和 y 的两个二元一次方程组成的每个二元一次方程组，都对应两个一次函数，于是也对应两条直线. 从“数”的角度看，解这样的方程组，相当于求自变量为何值时相应的两个函数值相等，以及这个函数值是多少；从“形”的角度看，解这样的方程组，相当于确定两条相应直线交点的坐标. 因此，我们可以用画一次函数图象的方法得到方程组的解.

归纳

方程（组）与函数之间互相联系，从函数的角度可以把它们统一起来. 解决问题时，应根据具体情况灵活地把它们结合起来考虑.

练习

考虑下面两种移动电话计费方式：

	方式一	方式二
月租费/（元/月）	30	0
本地通话费/（元/min）	0.30	0.40

用函数方法解答何时两种计费方式费用相等.

习题 26.2

复习巩固

1. 一列火车以 90 km/h 的速度匀速前进. 求它的行驶路程 s（单位：km）关于行驶时间 t（单位：h）的函数解析式，并画出函数图象.
2. 函数 $y=-5x$ 的图象在第______象限内，经过点（0，____）与点（1，____），y 随 x 的增大而________.

3. 一个弹簧不挂重物时长 12 cm，挂上重物后伸长的长度与所挂重物的质量成正比. 如果挂上 1 kg 的物体后，弹簧伸长 2 cm. 求弹簧总长 y（单位：cm）关于所挂物体质量 x（单位：kg）的函数解析式.

4. 分别画出下列函数的图象：

(1) $y=4x$；　　(2) $y=4x+1$；

(3) $y=-4x+1$；　　(4) $y=-4x-1$.

5. 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=2x+4$ 与 $y=-2x+4$ 的图象，并指出每个函数中当 x 增大时 y 如何变化.

6. 已知一次函数 $y=kx+b$，当 $x=2$ 时 y 的值为 4，当 $x=-2$ 时 y 的值为 -2，求 k 与 b.

7. 已知一次函数的图象经过点（-4，9）和点（6，3），求这个函数的解析式.

8. 当自变量 x 取何值时，函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 与 $y=5x+17$ 的值相等？这个函数值是多少？

综合运用

9. 点 $P(x, y)$ 在第一象限，且 $x+y=8$，点 A 的坐标为（6，0）. 设 $\triangle OPA$ 的面积为 S.

(1) 用含 x 的式子表示 S，写出 x 的取值范围，画出函数 S 的图象.

(2) 当点 P 的横坐标为 5 时，$\triangle OPA$ 的面积为多少？

(3) $\triangle OPA$ 的面积能大于 24 吗？为什么？

10. 不画图象，仅从函数解析式能否看出直线 $y=3x+4$ 与 $y=3x-4$ 具有什么样的位置关系？

11. 从 A 地向 B 地打长途电话，通话时间不超过 3 min 收费 2.4 元，超过 3 min 后每分加收 1 元. 写出通话费用 y（单位：元）关于通话时间 x（单位：min）的函数解析式. 有 10 元钱时，打一次电话最多可以通话多长时间？（本题中 x 取整数，不足 1 min 的通话时间按 1 min 计费.）

12. (1) 当 $b>0$ 时，函数 $y=x+b$ 的图象经过哪几个象限？

(2) 当 $b<0$ 时，函数 $y=-x+b$ 的图象经过哪几个象限？

(3) 当 $k>0$ 时，函数 $y=kx+1$ 的图象经过哪几个象限？

(4) 当 $k<0$ 时，函数 $y=kx+1$ 的图象经过哪几个象限？

13. 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 和 $y=5x+17$ 的图象，并结合图象比较这两个函数的函数值的大小关系.

拓广探索

14. 图中的折线表示一骑车人离家的距离 y 与时刻 x 的关系. 骑车人 9:00 离开家, 15:00 回到家. 请你根据这个折线图回答下列问题:

(1) 这个人何时离家最远? 这时他离家多远?

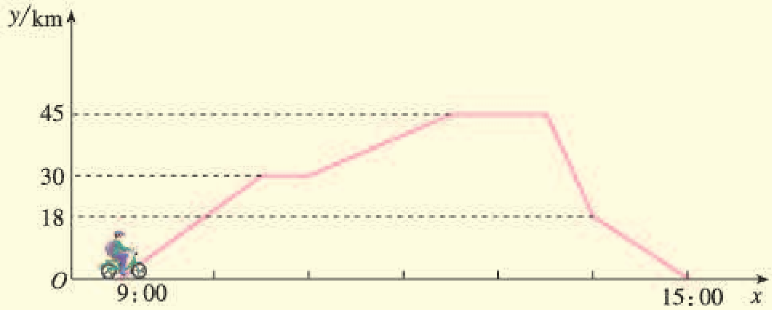
(2) 何时他开始第一次休息? 休息多长时间? 这时他离家多远?

(3) 11:00～12:30 他骑了多少千米?

(4) 他在 9:00～10:30 和 10:30～12:30 的平均速度各是多少?

(5) 他返家时的平均速度是多少?

(6) 14:00 时他离家多远? 回家路上, 何时他离家 9 km?



(第 14 题)

15. 甲、乙两家商场平时以同样价格出售相同的商品. 春节期间两家商场都让利酬宾, 其中甲商场所有商品按 8 折出售, 乙商场对一次购物中超过 200 元后的价格部分打 7 折.

(1) 以 x (单位: 元) 表示商品原价, y (单位: 元) 表示购物金额, 分别就两家商场的让利方式写出 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 在同一直角坐标系中画出 (1) 中函数的图象;

(3) 春节期间如何选择这两家商场去购物更省钱?

信息技术应用

用计算机画函数图象

由解析式画函数图象时，一般采用描点连线法．描出的点越多，画出的函数图象越准确．但是，仅靠手工操作有时很难画出准确的图象，而计算机可以帮助我们又快又准地画出函数图象．下面介绍根据函数解析式用《几何画板》软件画函数图象的一些例子．

例如，画函数 $y=3x-2$ 的图象．启用《几何画板》软件绘制函数图象功能（new function / graph），输入函数解析式 $y=3x-2$，计算机便自动画出如下图象（图 1 中的直线）．

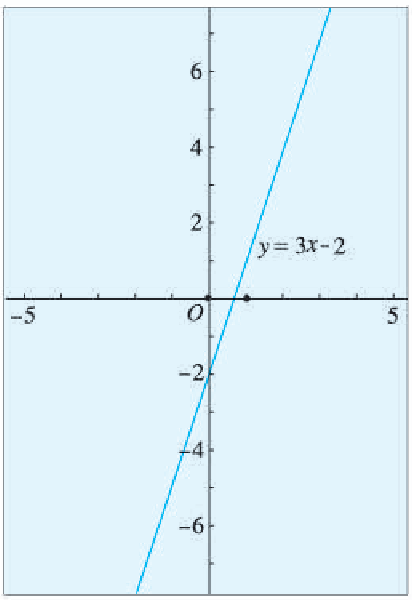


图 1

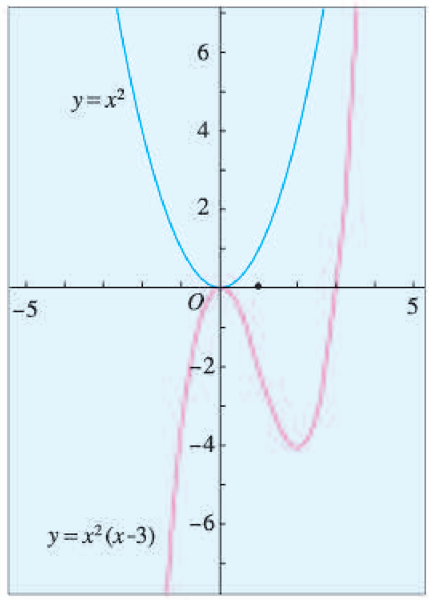


图 2

类似地，在同一坐标系中，可以画出函数 $y=x^2$ 与 $y=x^2(x-3)$ 的图象（图 2 中蓝色的曲线与红色的曲线）．

从画出的函数图象可以看出，函数图象与函数性质之间存在着必然的联系．例如

图象特征		函数变化规律
从左向右曲线呈上升状态	$\Leftrightarrow$	y 随 x 的增大而增大
从左向右曲线呈下降状态	$\Leftrightarrow$	y 随 x 的增大而减小
曲线上的最高点是 (a, b)	$\Leftrightarrow$	当 $x=a$ 时，y 有最大值 b
曲线上的最低点是 (a, b)	$\Leftrightarrow$	当 $x=a$ 时，y 有最小值 b

根据上面例子中的函数图象，你发现这些函数各具有什么性质？

26.3 课题学习　选择方案

做一件事情，有时有不同的实施方案. 比较这些方案，从中选择最佳方案作为行动计划，是非常必要的. 在选择方案时，往往需要从数学角度进行分析，涉及变量的问题常用到函数. 同学们通过讨论下面两个问题，可以体会如何运用一次函数选择最佳方案. 解决这些问题后，可以进行后面的实践活动.

问题 1　怎样选取上网收费方式?

表 26-13 给出 A，B，C 三种上宽带网的收费方式.

表 26-13

收费方式	月使用费/元	包时上网时间/h	超时费/（元/min）
A	30	25	0.05
B	50	50	0.05
C	120	不限时	

选取哪种方式能节省上网费?

分析： 在方式 A，B 中，上网时间是影响上网费的变量；在方式 C 中，上网费是常量.

设月上网时间为 x h，则方案 A，B 的收费金额 y_1，y_2 都是 x 的函数. 要比较它们，需在 $x>0$ 的条件下，考虑何时 (1) $y_1=y_2$，(2) $y_1<y_2$，(3) $y_1>y_2$. 利用函数解析式，通过方程、不等式或函数图象能够解答上述问题. 在此基础上，再用其中省钱的方式与方式 C 进行比较，则容易对收费方式作出选择.

在方式 A 中，月使用费 30 元与包时上网时间 25 h 是常量. 考虑收费金额时，要把上网时间分为 25 h 以内和超过 25 h 两种情况，得到的是如下的函数

$$y_1=\begin{cases}30, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 30+0.05\times 60(x-25), & x>25.\end{cases}$$

化简，得

$$y_1=\begin{cases}30, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 3x-45, & x>25.\end{cases}$$

这个函数的图象如图 26.3-1 所示.

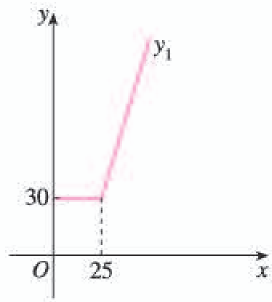


图 26.3-1

类似地，可以得出方式 B，C 的收费金额 y_2，y_3 关于上网时间 x 的函数解析式.

在图 26.3-1 中画出 y_2，y_3 的图象，结合函数图象与解析式，填空：

当上网时间____________时，选择方式 A 最省钱；

当上网时间____________时，选择方式 B 最省钱；

当上网时间____________时，选择方式 C 最省钱.

问题 2　怎样租车？

某学校计划在总费用 2 300 元的限额内，租用汽车送 234 名学生和 6 名教师集体外出活动，每辆汽车上至少要有 1 名教师.

现有甲、乙两种大客车，它们的载客量和租金如表 26-14 所示.

表 26-14

	甲种客车	乙种客车
载客量/（人/辆）	45	30
租金/（元/辆）	400	280

（1）共需租多少辆汽车？

（2）给出最节省费用的租车方案.

分析：（1）可以从乘车人数的角度考虑租多少辆汽车，要注意到以下要求：

①要保证 240 名师生都有车坐；

②要使每辆汽车上至少有 1 名教师.

根据①可知，汽车总数不能小于____；根据②可知，汽车总数不能大于____. 综合起来可知汽车总数为____.

（2）租车费用与所租车的种类有关. 可以看出，当汽车总数 a 确定后，在

满足各项要求的前提下，尽可能少地租用甲种客车可以节省费用.

设租用 x 辆甲种客车，则租车费用 y（单位：元）是 x 的函数，即

$$y=400x+280(a-x).$$

将（1）中确定的 a 的值代入上式，化简这个函数，得

$$y=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

为使 240 名师生有车坐，x 不能小于______；为使租车费用不超过 2 300 元，x 不能超过______. 综合起来可知 x 的取值为__________.

在考虑上述问题的基础上，你能得出几种不同的租车方案？为节省费用应选择其中哪个方案？试说明理由.

归纳

解决含有多个变量的问题时，可以分析这些变量之间的关系，从中选取一个取值能影响其他变量的值的变量作为自变量．然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数，以此作为解决问题的数学模型.

实践活动：

结合日常生活中某个可以选择多种实施方案的实际问题，例如购物、配送、上网、通信等，利用数学知识进行分析，选择最佳方案，并写出有关活动的报告.

数学活动

活动1

（1）根据下表的数据，在直角坐标系中画出世界人口增长曲线图.

（2）选择一个近似于人口增长曲线的一次函数，写出它的解析式.

（3）按照这样的增长趋势，估计 2020 年的世界人口数.

世界人口数统计表

年份 x	1960	1974	1987	1999	2010
人口数 y/亿	30	40	50	60	69

活动2

水龙头关闭不严会造成滴水，为了调查漏水量与漏水时间关系，可进行以下的试验与研究：

（1）在滴水的水龙头下放置一个能显示水量的容器，每 5 min 记录一次容器中的水量，并填写下表：

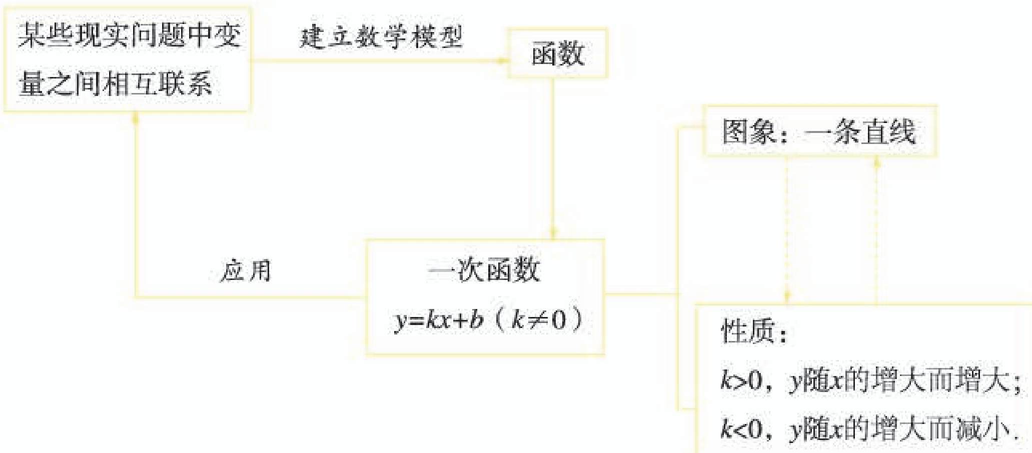
时间 t/min	0	5	10	15	20	25	30
水量 w/ml							

（2）建立直角坐标系，以横轴表示时间 t，纵轴表示水量 w，描出以上述试验所得数据为坐标的各点，并观察它们的分布规律.

（3）试写出 w 关于 t 的函数解析式，并由它估算这种漏水状态下一天的漏水量.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

客观世界中变量大量存在. 本章结合一些实际问题，分析了一个变化过程中两个变量的一种对应关系，即每当其中某个变量取一个定值时，另一变量有唯一确定的值与其对应，由此初步认识了函数及其表示法.

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）是一种最基本的函数，它刻画了一类常见的变化规律. 正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）是一次函数的特例. 一次函数的图象是一条直线，利用图象可以直观地分析函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的增减性. 观察发现，当 $k>0$（$k<0$）时，图象从左向右上升（下降）. 这表明，函数 y 的值随自变量 x 的增大而增大（减小）. 利用图象研究函数的方法体现了数形结合的思想.

利用函数解决问题时，关键在于分析问题中变量之间的对应关系，并考虑如何表示这种关系，从而将实际问题转化为函数模型. 如果判断出某问题的变化规律可用一次函数模型刻画，那么可根据已知条件用待定系数法得出函数解析式.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 举例说明两个变量 x 和 y 满足什么条件时，y 是 x 的函数.

2. 函数有哪些表示法？它们各有什么优点？请举例说明.

3. 一次函数 $y=kx+b$ 的图象是什么图形？当 $b=0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的

图象经过哪个定点？常数 k 对函数 $y=kx+b$ 的图象有什么影响？由此能说明 y 与 x 之间的什么变化规律？

4. 由一条不平行于坐标轴的已知直线，能求出它对应的一次函数的解析式吗？如果能，应怎样求？由此体会由形到数的转化.

5. 举例说明如何利用函数解决实际问题.

复习题 26

复习巩固

1. 小亮现已存款 100 元. 为赞助“希望工程”，他计划今后三年每月存款 10 元. 存款总金额 y（单位：元）将随时间 x（单位：月）的变化而改变. 指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出函数解析式.

2. 判断下列各点是否在直线 $y=2x+6$ 上. 这条直线与坐标轴交于何处？

   $(-5,\ -4)$，　$(-7,\ 20)$，

   $\left(-\dfrac{7}{2},\ 1\right)$，　$\left(\dfrac{2}{3},\ 7\dfrac{1}{3}\right)$.

3. 填空：

   (1) 直线 $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}x$ 经过第________象限，y 随 x 的增大而______；

   (2) 直线 $y=3x-2$ 经过第________象限，y 随 x 的增大而______.

4. 根据下列条件分别确定函数 $y=kx+b$ 的解析式：

   (1) y 与 x 成正比例，当 $x=5$ 时，$y=6$；

   (2) 直线 $y=kx+b$ 经过点 $(3,\ 6)$ 与点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

5. 试根据函数 $y=3x-15$ 的性质或图象，确定 x 取何值时：

   (1) $y>0$；　　(2) $y<0$.

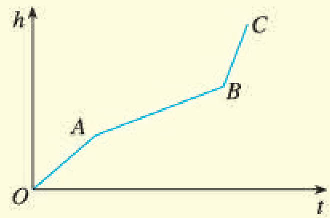
综合运用

6. 在某火车站托运物品时，不超过 1 kg 的物品需付 2 元，以后每增加 1 kg（不足

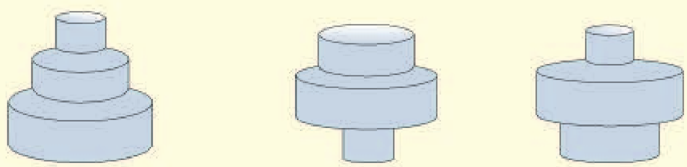
1 kg 按 1 kg 计）需增加托运费 0.5 元. 设托运 p kg（p 为整数）物品的费用为 c 元. 试写出 c 的计算公式.

7. 某水果批发市场规定，批发苹果不少于 100 kg 时，批发价为 2.5 元/kg. 小王携带现金3 000元到这市场采购苹果，并以批发价买进. 设购买的苹果为 x kg，小王付款后还剩余现金 y 元. 试写出 y 关于 x 的函数解析式，并指出自变量 x 的取值范围.

8. 匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满. 在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示（图中 $OABC$ 为一折线）. 这个容器的形状是下图中哪一个？匀速地向另两个容器注水时，你能画出水面高度 h 随时间 t 变化的图象（草图）吗？



（第 8 题）



9. 已知等腰三角形周长为 20.

（1）写出底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式（x 为自变量）；

（2）写出自变量取值范围；

（3）在直角坐标系中，画出函数图象.

10. 已知点 $A(8, 0)$ 及在第一象限的动点 $P(x, y)$，且 $x+y=10$. 设△OPA 的面积为 S.

（1）求 S 关于 x 的函数解析式；

（2）求 x 的取值范围；

（3）当 $S=12$ 时，求 P 点坐标；

（4）画出函数 S 的图象.

11. （1）画出函数 $y=|x-1|$ 的图象.

（2）设 $P(x, 0)$ 是 x 轴上的一个动点，它与 x 轴上表示 -3 的点的距离为 y. 求 y 关于 x 的函数解析式，并画出这个函数的图象.

12. A，B 两地相距 25 km. 甲 8:00 由 A 地出发骑自行车去 B 地，速度为10 km/h；乙 9:30 由 A 地出发乘汽车也去 B 地，速度为 40 km/h.

（1）分别写出两个人的行程关于时刻的函数解析式；

（2）乙能否在途中超过甲？如果能超过，何时超过？

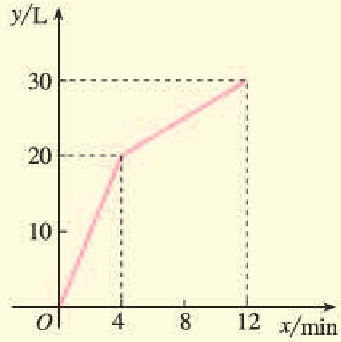
拓广探索

13. 一个有进水管与出水管的容器，从某时刻开始4 min内只进水不出水，在随后的8 min内既进水又出水，每分的进水量和出水量是两个常数. 容器内的水量 y（单位：L）与时间 x（单位：min）之间的关系如图所示.

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式.

(2) 当 $4 < x \leqslant 12$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式.

(3) 每分进水、出水各多少升？



（第 13 题）

14. 一次越野赛跑中，当小明跑了 1 600 m 时，小刚跑了 1 450 m. 此后两人分别以 a m/s 和 b m/s 匀速跑. 又过 100 s 时小刚追上小明，200 s 时小刚到达终点，300 s 时小明到达终点. 这次越野赛跑的全程为多少米？

15. A 城有肥料 200 t，B 城有肥料 300 t. 现要把这些肥料全部运往 C，D 两乡. 从 A 城往 C，D 两乡运肥料的费用分别为 20 元/t 和 25 元/t；从 B 城往 C，D 两乡运肥料的费用分别为 15 元/t 和 24 元/t. 现 C 乡需要肥料 240 t，D 乡需要肥料 260 t，怎样调运可使总运费最少？

（第 15 题）

第二十七章　一元二次方程

在设计人体雕像时，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，可以增加视觉美感．按此比例，如果雕像的高为 2 m，那么它的下部应设计为多高？

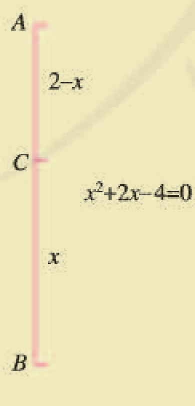
如图，雕像的上部高度 AC 与下部高度 BC 应有如下关系：

$$AC : BC = BC : 2\text{，即 } BC^2 = 2AC.$$

设雕像下部高 x m，可得方程 $x^2 = 2(2-x)$，整理得

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

这个方程与我们学过的一元一次方程不同，其中未知数 x 的最高次数是 2．如何解这类方程？如何用这类方程解决一些实际问题？这就是本章要学习的主要内容．



27.1 一元二次方程

方程

$$x^2+2x-4=0 \qquad ①$$

中有一个未知数 x，x 的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用，请看下面的问题.

问题 1 如图 27.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 3 600 cm²，那么铁皮各角应切去多大的正方形？

图 27.1-1

设切去的正方形的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100-2x)$ cm，宽为 $(50-2x)$ cm. 根据方盒的底面积为3 600 cm²，得

$$(100-2x)(50-2x)=3\ 600.$$

整理，得

$$4x^2-300x+1\ 400=0.$$

化简，得

$$x^2-75x+350=0. \qquad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.

方程②中未知数的个数和最高次数各是多少？

问题 2 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场. 根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？

全部比赛的场数为 $4\times7=28$.

设应邀请 x 个队参赛，每个队要与其他 $(x-1)$ 个队各赛一场，因为甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场.

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

整理，得

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=28.$$

化简，得

$$x^2-x=56. \qquad ③$$

由方程③可以得出参赛队数.

方程③中未知数的个数和最高次数各是多少？

思考

方程①②③有什么共同点？

可以发现，这些方程的两边都是整式，方程中只含有一个未知数，未知数的最高次数是 2. 同样地，方程 $4x^2=9$，$x^2+3x=0$，$3y^2-5y=7-y$ 等也是这样的方程. 像这样，等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，叫做**一元二次方程**（quadratic equation in one unknown）.

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0).$$

为什么规定 $a\neq0$？

其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项.

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的**根**（root）.

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

解： 去括号，得

$$3x^2-3x=5x+10.$$

移项，合并同类项，得一元二次方程的一般形式

$$3x^2-8x-10=0.$$

其中二次项系数为 3，一次项系数为 -8，常数项为 -10.

练习

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $5x^2-1=4x$；　　(2) $4x^2=81$；

(3) $4x(x+2)=25$；　　(4) $(3x-2)(x+1)=8x-3$.

2. 根据下列问题，列出关于 x 的方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式：

(1) 4 个完全相同的正方形的面积之和是 25. 求正方形的边长 x.

(2) 一个矩形的长比宽多 2，面积是 100. 求矩形的长 x.

(3) 把长为 1 的木条分成两段，使较短一段的长与全长的积，等于较长一段的长的平方. 求较短一段的长 x.

习题 27.1

复习巩固

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $3x^2+1=6x$；　　(2) $4x^2+5x=81$；

(3) $x(x+5)=0$；　　(4) $(2x-2)(x-1)=0$；

(5) $x(x+5)=5x-10$；　　(6) $(3x-2)(x+1)=x(2x-1)$.

2. 根据下列问题列方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式：

(1) 一个圆的面积是 2π m². 求半径.

(2) 一个直角三角形的两条直角边相差 3 cm，面积是 9 cm². 求较长的直角边的长.

3. 下列哪些数是方程 $x^2+x-12=0$ 的根？

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

综合运用

根据下列问题列方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式（第 4～6 题）：

4. 一个矩形的长比宽多 1 cm，面积是 132 cm². 矩形的长和宽各是多少？

5. 有一根 1 m 长的铁丝，怎样用它围成一个面积为 0.06 m² 的矩形？

6. 参加一次聚会的每两人都握了一次手，所有人共握手 10 次. 有多少人参加聚会？

拓广探索

7. 如果 2 是方程 $x^2-c=0$ 的一个根，那么常数 c 是多少？求出这个方程的其他根.

27.2 解一元二次方程

27.2.1 配方法

问题 1 一桶油漆可刷的面积为1 500 dm^2，李林用这桶油漆恰好刷完 10 个同样的正方体形状的盒子的全部外表面，你能算出盒子的棱长吗？

设其中一个盒子的棱长为 x dm，则这个盒子的表面积为 $6x^2$ dm^2. 根据一桶油漆可刷的面积，列出方程

$$10\times 6x^2=1\ 500. \qquad ①$$

整理，得

$$x^2=25.$$

根据平方根的意义，得

$$x=\pm 5,$$

即

$$x_1=5,\ x_2=-5.$$

可以验证，5 和 −5 是方程①的两个根，因为棱长不能是负值，所以盒子的棱长为 5 dm.

用方程解决实际问题时，要考虑所得结果是否符合实际意义.

一般地，对于方程

$$x^2=p, \qquad (\text{I})$$

(1) 当 $p>0$ 时，根据平方根的意义，方程（Ⅰ）有两个不等的实数根

$$x_1=-\sqrt{p}，x_2=\sqrt{p}；$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程（Ⅰ）有两个相等的实数根 $x_1=x_2=0$；

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有 $x^2\geqslant 0$，所以方程（Ⅰ）无实数根.

探究

对照上面解方程（Ⅰ）的过程，你认为应怎样解方程 $(x+3)^2=5$？

在解方程（Ⅰ）时，由方程 $x^2=25$ 得 $x=\pm5$. 由此想到：由方程

$$(x+3)^2=5, \tag{②}$$

得

$$x+3=\pm\sqrt{5},$$

即

$$x+3=\sqrt{5}，或 x+3=-\sqrt{5}. \tag{③}$$

于是，方程 $(x+3)^2=5$ 的两个根为

$$x_1=-3+\sqrt{5}，x_2=-3-\sqrt{5}.$$

上面的解法中，由方程②得到③，实质上是把一个一元二次方程“**降次**”，转化为两个一元一次方程，这样就把方程②转化为我们会解的方程了.

练习

解下列方程：

(1) $2x^2-8=0$； (2) $9x^2-5=3$； (3) $(x+6)^2-9=0$；

(4) $3(x-1)^2-6=0$； (5) $x^2-4x+4=5$； (6) $9x^2+5=1$.

探究

怎样解方程 $x^2+6x+4=0$？

我们已经会解方程 $(x+3)^2=5$. 因为它的左边是含有 x 的完全平方式，右边是非负数，所以可以直接降次解方程. 那么，能否将方程 $x^2+6x+4=0$ 转化为可以直接降次的形式再求解呢？

解方程 $x^2+6x+4=0$ 的过程可以用下面的框图表示：

$$x^2+6x+4=0$$

$\downarrow$ 移项

$$x^2+6x=-4$$

$\downarrow$ 两边加 $9\left(即\left(\frac{6}{2}\right)^2\right)$ 使左边配成 $x^2+2bx+b^2$ 的形式

$$x^2+6x+9=-4+9$$

$\downarrow$ 左边写成完全平方形式

$$(x+3)^2=5$$

$\downarrow$ 降次

$$x+3=\pm\sqrt{5}$$

$\downarrow$

$$x+3=\sqrt{5}，或 x+3=-\sqrt{5}$$

$\downarrow$ 解一次方程

$$x_1=-3+\sqrt{5}，x_2=-3-\sqrt{5}$$

为什么在方程 $x^2+6x=-4$ 的两边加 9？加其他数行吗？

可以验证，$-3\pm\sqrt{5}$ 是方程 $x^2+6x+4=0$ 的两个根.

像上面那样，通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法**. 可以看出，配方是为了降次，把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解.

例 1 解下列方程：

(1) $x^2-8x+1=0$； (2) $2x^2+1=3x$； (3) $3x^2-6x+4=0$.

分析：(1) 方程的二次项系数为 1，直接运用配方法.

(2) 先把方程化成 $2x^2-3x+1=0$. 它的二次项系数为 2，为了便于配方，需将二次项系数化为 1，为此方程的两边都除以 2.

(3) 与(2)类似，方程的两边都除以 3 后再配方.

解：(1) 移项，得

$$x^2-8x=-1.$$

配方，得

$$x^2-8x+4^2=-1+4^2,$$
$$(x-4)^2=15.$$

由此可得

$$x-4=\pm\sqrt{15},$$

$$x_1=4+\sqrt{15}，x_2=4-\sqrt{15}.$$

(2) 移项，得

$$2x^2-3x=-1.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}.$$

配方，得

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

由此可得

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4},$$

$$x_1=1，x_2=\frac{1}{2}.$$

(3) 移项，得

$$3x^2-6x=-4.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-2x=-\frac{4}{3}.$$

配方，得

$$x^2-2x+1^2=-\frac{4}{3}+1^2,$$

$$(x-1)^2=-\frac{1}{3}.$$

因为实数的平方不会是负数，所以 x 取任何实数时，$(x-1)^2$ 都是非负数，上式都不成立，即原方程无实数根.

一般地，如果一个一元二次方程通过配方转化成

$$(x+n)^2=p \tag{Ⅱ}$$

的形式，那么就有：

(1) 当 $p>0$ 时，方程（Ⅱ）有两个不等的实数根

$$x_1=-n-\sqrt{p}\,,\ x_2=-n+\sqrt{p}\,;$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程（Ⅱ）有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-n;$$

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有 $(x+n)^2\geqslant 0$，所以方程（Ⅱ）无实数根.

练习

1. 填空：

(1) $x^2+10x+\_\_\_\_=(x+\_\_\_\_)^2$；　　(2) $x^2-12x+\_\_\_\_=(x-\_\_\_\_)^2$；

(3) $x^2+5x+\_\_\_\_=(x+\_\_\_\_)^2$；　　(4) $x^2-\frac{2}{3}x+\_\_\_\_=(x-\_\_\_\_)^2$.

2. 解下列方程：

(1) $x^2+10x+9=0$；　　(2) $x^2-x-\frac{7}{4}=0$；

(3) $3x^2+6x-4=0$；　　(4) $4x^2-6x-3=0$；

(5) $x^2+4x-9=2x-11$；　　(6) $x(x+4)=8x+12$.

27.2.2　公式法

探究

任何一个一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0). \tag{Ⅲ}$$

能否也用配方法得出（Ⅲ）的解呢？

我们可以根据用配方法解一元二次方程的经验来解决这个问题.

移项，得

$$ax^2+bx=-c.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad ①$$

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$. 式子 b^2-4ac 的值有以下三种情况：

(1) $b^2-4ac>0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$，由①得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

方程有两个不等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) $b^2-4ac=0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$，由①可知，方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

(3) $b^2-4ac<0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，由①可知$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，而 x 取任何实数都不能使$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，因此方程无实数根.

一般地，式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的**判别式**，通常用希腊字母“Δ”表示它，即 $\Delta=b^2-4ac$.

归纳

由上可知，当 $\Delta>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个不等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 无实数根.

当 $\Delta \geqslant 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的实数根可写为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**求根公式**. 求根公式表达了用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的结果. 解一个具体的一元二次方程时，把各系数直接代入求根公式，可以避免配方过程而直接得出根，这种解一元二次方程的方法叫做**公式法**.

例 2 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-4x-7=0$；　　(2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$；

(3) $5x^2-3x=x+1$；　　(4) $x^2+17=8x$.

解：(1) $a=1$，$b=-4$，$c=-7$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-7)=44>0$.

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{44}}{2\times1}=2\pm\sqrt{11},$$

即

$$x_1=2+\sqrt{11},\quad x_2=2-\sqrt{11}.$$

确定 a，b，c 的值时，要注意它们的符号.

(2) $a=2$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times2\times1=0$.

方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) 方程化为 $5x^2-4x-1=0$.

$a=5$，$b=-4$，$c=-1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times5\times(-1)=36>0$.

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\times5}=\frac{4\pm6}{10},$$

即

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{5}.$$

(4) 方程化为 $x^2-8x+17=0$.

$a=1$，$b=-8$，$c=17$.

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times17=-4<0$.

方程无实数根.

回到本章引言中的问题，雕像下部高度 x(单位：m) 满足方程

$$x^2+2x-4=0.$$

用公式法解这个方程，得

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=-1\pm\sqrt{5},$$

即

$$x_1=-1+\sqrt{5},\ x_2=-1-\sqrt{5}.$$

如果结果保留小数点后两位，那么，$x_1\approx1.24$，$x_2\approx-3.24$.

这个方程的两个根中，只有 $x_1\approx1.24$ 符合问题的实际意义，因此雕像下部高度应设计为约 1.24 m.

练习

1. 解下列方程：

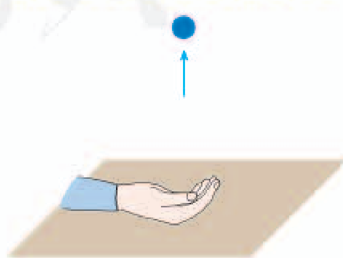
(1) $x^2+x-6=0$；　(2) $x^2-\sqrt{3}x-\frac{1}{4}=0$；

(3) $3x^2-6x-2=0$；　(4) $4x^2-6x=0$；

(5) $x^2+4x+8=4x+11$；　(6) $x(2x-4)=5-8x$.

2. 求第 27.1 节中问题 1 的答案.

27.2.3　因式分解法



问题 2　根据物理学规律，如果把一个物体从地面以 10 m/s 的速度竖直上抛，那么物体经过 x s 离地面的高度(单位：m)为

$$10x-4.9x^2.$$

根据上述规律，求出物体落回地面所需经过的时间（结果保留小数点后两位）.

设物体经过 x s 落回地面，这时它离地面的高度为 0 m，即

$$10x-4.9x^2=0. \qquad ①$$

思考

除配方法或公式法以外，能否找到更简单的方法解方程①?

方程①的右边为 0，左边可以因式分解，得

$$x(10-4.9x)=0.$$

这个方程的左边是两个一次因式的乘积，右边是 0. 我们知道，如果两个因式的积为 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；反之，如果两个因式中任何一个为 0，那么它们的积也等于 0. 所以

如果 $a \cdot b=0$，那么 $a=0$，或 $b=0$.

$$x=0，或\ 10-4.9x=0. \qquad ②$$

所以，方程①的两个根是

$$x_1=0，\ x_2=\frac{100}{49}\approx 2.04.$$

这两个根中，$x_2\approx 2.04$ 表示物体约在 2.04 s 时落回地面，而 $x_1=0$ 表示物体被上抛离开地面的时刻，即在 0 s 时物体被抛出，此刻物体的高度是 0 m.

思考

解方程①时，二次方程是如何降为一次的?

可以发现，上述解法中，由①到②的过程，不是用开平方降次，而是先因式分解，使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次式分别等于 0，从而实现降次. 这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

例 3 解下列方程：

(1) $x(x-2)+x-2=0$；　　(2) $5x^2-2x-\frac{1}{4}=x^2-2x+\frac{3}{4}$.

解：(1) 因式分解，得

$$(x-2)(x+1)=0.$$

于是得

$$x-2=0，或 x+1=0，$$

$$x_1=2，x_2=-1.$$

(2) 移项、合并同类项，得

$$4x^2-1=0.$$

因式分解，得

$$(2x+1)(2x-1)=0.$$

于是得

$$2x+1=0，或 2x-1=0，$$

$$x_1=-\frac{1}{2}，x_2=\frac{1}{2}.$$

可以试用多种方法解本例中的两个方程.

归纳

配方法要先配方，再降次；通过配方法可以推出求根公式，公式法直接利用求根公式解方程；因式分解法要先将方程一边化为两个一次因式相乘，另一边为 0，再分别使各一次因式等于 0. 配方法、公式法适用于所有一元二次方程，因式分解法在解某些一元二次方程时比较简便. 总之，解一元二次方程的基本思路是：将二次方程化为一次方程，即降次.

练习

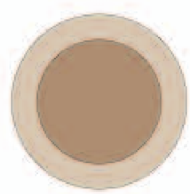
1. 解下列方程：

(1) $x^2+x=0$；　　(2) $x^2-2\sqrt{3}x=0$；

(3) $3x^2-6x=-3$；　　(4) $4x^2-121=0$；

(5) $3x(2x+1)=4x+2$；　　(6) $(x-4)^2=(5-2x)^2$.

2. 如图，把小圆形场地的半径增加 5 m 得到大圆形场地，场地面积扩大了一倍. 求小圆形场地的半径.



(第 2 题)

*27.2.4 一元二次方程的根与系数的关系

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，不仅表示可以由方程的系数 a，b，c 决定根的值，而且反映了根与系数之间的联系. 一元二次方程根与系数之间的联系还有其他表现方式吗？

思考

从因式分解法可知，方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$（x_1，x_2 为已知数）的两根为 x_1 和 x_2，将方程化为 $x^2+px+q=0$ 的形式，你能看出 x_1，x_2 与 p，q 之间的关系吗？

把方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的左边展开，化成一般形式，得方程

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

这个方程的二次项系数为 1，一次项系数 $p=-(x_1+x_2)$，常数项 $q=x_1x_2$.

于是，上述方程两个根的和、积与系数分别有如下关系：

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

思考

一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，二次项系数 a 未必是 1，它的两个根的和、积与系数又有怎样的关系呢？

根据求根公式可知，

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},\end{aligned}$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* 本小节内容为选学内容.

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

因此，方程的两个根 x_1，x_2 和系数 a，b，c 有如下关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

把方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两边同除以 a，能否得出该结论？

这表明任何一个一元二次方程的根与系数的关系为：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比.

例 4 根据一元二次方程的根与系数的关系，求下列方程两个根 x_1，x_2 的和与积：

(1) $x^2-6x-15=0$；　　(2) $3x^2+7x-9=0$；

(3) $5x-1=4x^2$.

解：(1) $x_1+x_2=-(-6)=6$，$x_1x_2=-15$.

(2) $x_1+x_2=-\frac{7}{3}$，$x_1x_2=\frac{-9}{3}=-3$.

(3) 方程化为 $4x^2-5x+1=0$. $x_1+x_2=-\frac{-5}{4}=\frac{5}{4}$，$x_1x_2=\frac{1}{4}$.

练习

不解方程，求下列方程两个根的和与积：

(1) $x^2-3x=15$；　　(2) $3x^2+2=1-4x$；

(3) $5x^2-1=4x^2+x$；　　(4) $2x^2-x+2=3x+1$.

习题 27.2

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $36x^2-1=0$；　　(2) $4x^2=81$；

(3) $(x+5)^2=25$；　　(4) $x^2+2x+1=4$.

2. 填空：

(1) x^2+6x+______$=(x+$___$)^2$；　　(2) x^2-x+______$=(x-$___$)^2$；

(3) $4x^2+4x+$______$=(2x+$___$)^2$；　　(4) $x^2-\frac{2}{5}x+$______$=(x-$___$)^2$.

3. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+10x+16=0$；　　(2) $x^2-x-\frac{3}{4}=0$；

(3) $3x^2+6x-5=0$；　　(4) $4x^2-x-9=0$.

4. 利用判别式判断下列方程的根的情况：

(1) $2x^2-3x-\frac{3}{2}=0$；　　(2) $16x^2-24x+9=0$；

(3) $x^2-4\sqrt{2}x+9=0$；　　(4) $3x^2+10=2x^2+8x$.

5. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+x-12=0$；　　(2) $x^2-\sqrt{2}x-\frac{1}{4}=0$；

(3) $x^2+4x+8=2x+11$；　　(4) $x(x-4)=2-8x$；

(5) $x^2+2x=0$；　　(6) $x^2+2\sqrt{5}x+10=0$.

6. 用因式分解法解下列方程：

(1) $3x^2-12x=-12$；　　(2) $4x^2-144=0$；

(3) $3x(x-1)=2(x-1)$；　　(4) $(2x-1)^2=(3-x)^2$.

*7. 求下列方程两个根的和与积：

(1) $x^2-3x+2=10$；　　(2) $5x^2+x-5=0$；

(3) $x^2+x=5x+6$；　　(4) $7x^2-5=x+8$.

综合运用

8. 一个直角三角形的两条直角边相差 5 cm，面积是 7 cm^2. 求斜边的长.

9. 参加一次商品交易会的每两家公司之间都签订了一份合同，所有公司共签订了 45 份合同. 共有多少家公司参加商品交易会？

10. 分别用公式法和因式分解法解方程 $x^2-6x+9=(5-2x)^2$.

11. 有一根 20 m 长的绳，怎样用它围成一个面积为 24 m^2 的矩形？

拓广探索

12. 一个凸多边形共有 20 条对角线，它是几边形？是否存在有 18 条对角线的多边形？如果存在，它是几边形？如果不存在，说明得出结论的道理.

13. 无论 p 取何值，方程 $(x-3)(x-2)-p^2=0$ 总有两个不等的实数根吗？给出答案并说明理由.

阅读与思考

黄金分割数

本章引言中有一个关于人体雕塑的问题. 要使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，这个高度比应是多少？

把上面的问题一般化，如图 1，在线段 AB 上找一个点 C，C 把 AB 分为 AC 和 CB 两段，其中 AC 是较小的一段，现要使 $AC:CB=CB:AB$. 为简单起见，设 $AB=1$，$CB=x$，则 $AC=1-x$. 代入 $AC:CB=CB:AB$，即 $(1-x):x=x:1$，也即 $x^2+x-1=0$. 解方程，得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

根据问题的实际意义，取 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，这个值就是上面问题中所求的高度比.

人们把$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$这个数叫做黄金分割数. 如果把一条线段分为两部分，使其中较长一段与整个线段的比是黄金分割数，那么较短一段与较长一段的比也是黄金分割数.

图 1

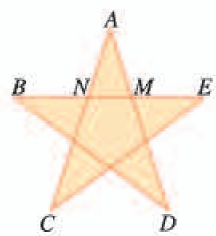


图 2

五角星是常见的图案. 如图 2，在正五角星中存在黄金分割数，可以证明其中$\dfrac{MN}{NB}=\dfrac{BN}{BM}=\dfrac{BM}{BE}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

长期以来，很多人认为黄金分割数是一个很特别的数. 一些美术家认为：如果人的上、下身长之比接近黄金分割数，那么可以增加美感. 据说，一些名画和雕塑中的人体大都符合这个比. 一位科学家曾提出：在一棵树的生长过程中，$\dfrac{n\text{ 年后的树枝数目}}{n+1\text{ 年后的树枝数目}}$约是黄金分割数.

优选法是一种具有广泛应用价值的数学方法，著名数学家华罗庚曾为普及它作出重要贡献. 优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数. 同学们可以查阅资料，了解 0.618 法的应用.

这是著名数学家华罗庚在日本去世前几小时做学术报告，讲解优选法的照片. 华先生说过，他要工作到人生的最后一刻. 他实践了自己的诺言.

27.3 一元二次方程与实际问题

同一元一次方程、二元一次方程（组）等一样，一元二次方程也可以作为反映某些实际问题中数量关系的数学模型．本节继续讨论如何利用一元二次方程解决实际问题．

探究1

有一个人患了流感，经过两轮传染后共有 121 个人患了流感，每轮传染中平均一个人传染了几个人？

分析： 设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人．

开始有一个人患了流感，第一轮的传染源就是这个人，他传染了 x 个人，用代数式表示，第一轮后共有______个人患了流感；第二轮传染中，这些人中的每个人又传染了 x 个人，用代数式表示，第二轮后共有______个人患了流感．

列方程

$$1+x+x(1+x)=121.$$

解方程，得

$$x_1=10，x_2=-12 \text{（不合题意，舍去）}.$$

平均一个人传染了 10 个人．

通过对这个问题的探究，你对类似的传播问题中的数量关系有新的认识吗？

思考

如果按照这样的传染速度，经过三轮传染后共有多少个人患流感？

探究2

两年前生产 1 t 甲种药品的成本是 5 000 元，生产 1 t 乙种药品的成本是6 000元．随着生产技术的进步，现在生产 1 t 甲种药品的成本是3 000元，生产 1 t 乙种药品的成本是3 600 元．哪种药品成本的年平均下降率较大？

分析：容易求出，甲种药品成本的年平均下降额为 $(5\ 000-3\ 000)\div 2=1\ 000$（元），乙种药品成本的年平均下降额为 $(6\ 000-3\ 600)\div 2=1\ 200$（元）. 显然，乙种药品成本的年平均下降额较大. 但是，年平均下降额（元）不等同于年平均下降率（百分数）.

设甲种药品成本的年平均下降率为 x，则一年后甲种药品成本为 $5\ 000(1-x)$ 元，两年后甲种药品成本为 $5\ 000(1-x)^2$ 元，于是有

$$5\ 000(1-x)^2=3\ 000.$$

解方程，得

$$x_1\approx 0.225,\ x_2\approx 1.775.$$

根据问题的实际意义，甲种药品成本的年平均下降率约为 22.5%.

为什么选择 22.5%作为答案?

乙种药品成本的年平均下降率是多少？请比较两种药品成本的年平均下降率.

思考

经过计算，你能得出什么结论？成本下降额大的药品，它的成本下降率一定也大吗？应怎样全面地比较几个对象的变化状况？

探究3

如图 27.3-1，要设计一本书的封面，封面长27 cm，宽 21 cm，正中央是一个与整个封面长宽比例相同的矩形. 如果要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，上、下边衬等宽，左、右边衬等宽，应如何设计四周边衬的宽度（结果保留小数点后一位）？

图 27.3-1

分析：封面的长宽之比是 $27:21=9:7$，中央的矩形的长宽之比也应是 $9:7$. 设中央的矩形的长和宽分别是 $9a$ cm 和 $7a$ cm，由此得上、下边衬与左、右边衬的宽度之比是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(27-9a):\frac{1}{2}(21-7a)\\=&9(3-a):7(3-a)\\=&9:7.\end{aligned}$$

设上、下边衬的宽均为 $9x$ cm，左、右边衬的宽均为 $7x$ cm，则中央的矩形的长为 $(27-18x)$cm，宽为 $(21-14x)$cm.

要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，则中央的矩形的面积是封面面积的四分之三. 于是可列出方程

$$(27-18x)(21-14x)=\frac{3}{4}\times 27\times 21.$$

整理，得

$$16x^2-48x+9=0.$$

方程的哪个根符合实际意义？为什么？

解方程，得

$$x=\frac{6\pm 3\sqrt{3}}{4}.$$

上、下边衬的宽均为______ cm，左、右边衬的宽均为______ cm.

思考

如果换一种设未知数的方法，是否可以更简单地解决上面的问题？请你试一试.

习题 27.3

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $x^2+10x+21=0$；　　(2) $x^2-x-1=0$；

(3) $3x^2+6x-4=0$；　　(4) $3x(x+1)=3x+3$；

(5) $4x^2-4x+1=x^2+6x+9$；　　(6) $7x^2-\sqrt{6}x-5=0$.

2. 两个相邻偶数的积是 168. 求这两个偶数.

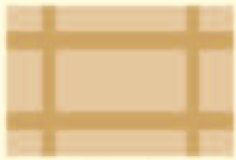
3. 一个直角三角形的两条直角边的和是 14 cm，面积是 24 cm^2. 求两条直角边的长.

综合运用

4. 某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是 91. 每个支干长出多少小分支？
5. 一个菱形两条对角线长的和是 10 cm，面积是 12 cm^2. 求菱形的周长.
6. 参加足球联赛的每两队之间都进行两场比赛，共要比赛 90 场. 共有多少个队参加比赛？
7. 青山村种的水稻 2010 年平均每公顷产 7 200 kg，2012 年平均每公顷产 8 450 kg. 求水稻每公顷产量的年平均增长率.
8. 要为一幅长 29 cm，宽 22 cm 的照片配一个镜框，要求镜框的四条边宽度相等，且镜框所占面积为照片面积的四分之一，镜框边的宽度应是多少厘米（结果保留小数点后一位）？

拓广探索

9. 如图，要设计一幅宽 20 cm，长 30 cm 的图案，其中有两横两竖的彩条，横、竖彩条的宽度比为 3∶2. 如果要使彩条所占面积是图案面积的四分之一，应如何设计彩条的宽度（结果保留小数点后一位）？



（第 9 题）

10. 如图，线段 AB 的长为 1.

（第 10 题）

(1) 线段 AB 上的点 C 满足关系式 $AC^2=BC\cdot AB$，求线段 AC 的长度；
(2) 线段 AC 上的点 D 满足关系式 $AD^2=CD\cdot AC$，求线段 AD 的长度；
(3) 线段 AD 上的点 E 满足关系式 $AE^2=DE\cdot AD$，求线段 AE 的长度.

上面各小题的结果反映了什么规律？

数学活动

活动　三角点阵中前n行的点数计算

图 1 是一个三角点阵，从上向下数有无数多行，其中第一行有 1 个点，第二行有 2 个点……第 n 行有 n 个点……

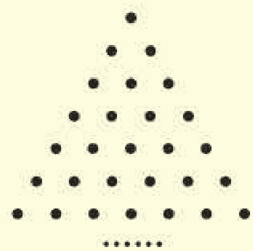


图 1

容易发现，10 是三角点阵中前 4 行的点数和．你能发现 300 是前多少行的点数的和吗？

用试验的方法，由上而下地逐行相加其点数，可以得到答案．但是这样寻找答案需要花费较多时间．你能用一元二次方程解决这个问题吗？

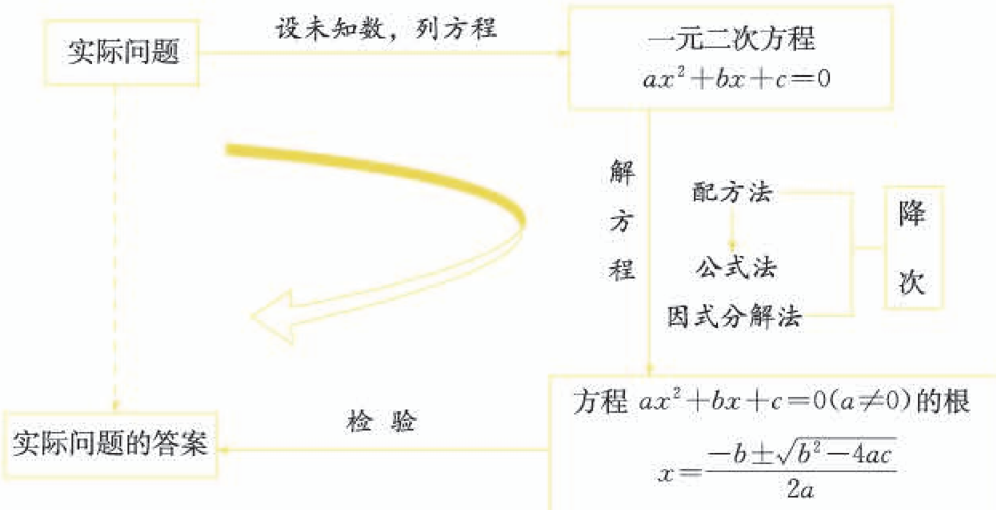
(提示：$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.)

三角点阵中前 n 行的点数和能是 600 吗？如果能，求出 n；如果不能，试用一元二次方程说明道理．

如果把图 1 的三角点阵中各行的点数依次换为 2，4，6，…，$2n$，…，你能探究出前 n 行的点数和满足什么规律吗？这个三角点阵中前 n 行的点数和能是 600 吗？如果能，求出 n；如果不能，试用一元二次方程说明道理．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章主要内容是一元二次方程的解法及其应用．一元二次方程是含有一个未知数的整式方程，未知数的最高次数是 2.

解一元二次方程的基本思想是“降次”，即通过配方、因式分解等，把一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解．具体地，根据平方根的意义，可得出方程 $x^2=p$ 和 $(x+n)^2=p$ 的解；通过配方，可将一元二次方程转化为 $(x+n)^2=p$ 的形式再解；一元二次方程的求根公式，就是对方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 配方后得出的．若能将 ax^2+bx+c 分解为两个一次因式的乘积，则可令每个因式为 0 来解.

本章学习了一元二次方程的三种解法——配方法、公式法和因式分解法．一般地，配方法是推导一元二次方程求根公式的工具．掌握了公式法，就可以直接用公式求一元二次方程的根．当然，也要根据方程的具体特点选择适当的解法．配方法是一种重要的、应用广泛的数学方法，如后面研究二次函数时也要用到它.

一元二次方程是刻画现实世界中某些数量关系的有效数学模型．在运用一元二次方程分析、表达和解决实际问题的过程中，要注意体会建立数学模型解决实际问题的思想和方法.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 比较你所学过的各种整式方程，说明它们的未知数的个数与次数. 你能写出这些方程的一般形式吗?

2. 一元二次方程有哪些解法? 各种解法在什么情况下比较适用? 你能说说“降次”在解一元二次方程中的作用吗?

3. 求根公式与配方法有什么关系? 如何判别一元二次方程根的情况?

4. 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根 x_1，x_2 与系数 a，b，c 有什么关系? 我们是如何得到这种关系的?

5. 你能举例说明用一元二次方程解决实际问题的过程吗?

复习题 27

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $196x^2-1=0$；　　(2) $4x^2+12x+9=81$；

(3) $x^2-7x-1=0$；　　(4) $2x^2+3x=3$；

(5) $x^2-2x+1=25$；　　(6) $x(2x-5)=4x-10$；

(7) $x^2+5x+7=3x+11$；　　(8) $1-8x+16x^2=2-8x$.

2. 两个数的和为 8，积为 9.75. 求这两个数.

3. 一个矩形的长和宽相差 3 cm，面积是 4 cm². 求这个矩形的长和宽.

*4. 求下列方程两个根的和与积：

(1) $x^2-5x-10=0$；　　(2) $2x^2+7x+1=0$；

(3) $3x^2-1=2x+5$；　　(4) $x(x-1)=3x+7$.

综合运用

5. 一个直角梯形的下底比上底长 2 cm，高比上底短 1 cm，面积是 8 cm². 画出这个梯形.

6. 一个长方体的长与宽的比为 5∶2，高为 5 cm，表面积为 40 cm². 画出这个长方体的展开图.

7. 要组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式（每两队之间都赛一场），计划安排 15 场比赛，应邀请多少个球队参加比赛?

8. 如下页图，利用一面墙（墙的长度不限），用 20 m 长的篱笆，怎样围成一个面积为50 m²的矩形场地?

（第 8 题）

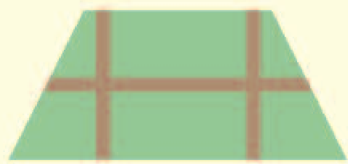
9. 某银行经过最近的两次降息，使一年期存款的年利率由 2.25%降至 1.98%. 平均每次降息的百分率是多少（结果写成 a%的形式，其中 a 保留小数点后两位）?

10. 向阳村 2010 年的人均收入为 12 000 元，2012 年的人均收入为 14 520 元. 求人均收入的年平均增长率.

11. 用一条长 40 cm 的绳子怎样围成一个面积为 75 cm^2 的矩形？能围成一个面积为 101 cm^2 的矩形吗？如能，说明围法；如不能，说明理由.

拓广探索

12. 如图，要设计一个等腰梯形的花坛，花坛上底长 100 m，下底长 180 m，上下底相距 80 m. 在两腰中点连线处有一条横向甬道，上下底之间有两条纵向甬道，各甬道的宽度相等. 甬道的面积是梯形面积的六分之一. 甬道的宽应是多少米（结果保留小数点后两位）?



（第 12 题）

13. 一个小球以 5 m/s 的速度开始向前滚动，并且均匀减速，4 s 后小球停止滚动.

(1) 小球的滚动速度平均每秒减少多少?

(2) 小球滚动 5 m 约用了多少秒（结果保留小数点后一位）?

（提示：匀变速直线运动中，每个时间段内的平均速度 $\overline{v}$（初速度与末速度的算术平均数）与路程 s，时间 t 的关系为 $s=\overline{v}t$.）

部分中英文词汇索引

后　记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过。

本册教科书集中反映了基础教育教科书研究与实验的成果，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教研人员以及一线教师的集体智慧。我们感谢所有对教科书的编写、出版提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友，感谢整体设计艺术指导吕敬人等。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。对此，我们表示衷心的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请入选作品的作者与我们联系，以便支付稿酬。

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们。让我们携起手来，共同完成义务教育教材建设工作！

联系方式
电　　话：010-58758316
电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2013年5月