义务教育教科书
（五·四学制）

教师教学用书

数学

九年级
下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东

本册主编：章建跃　邓泾河
主要编者：宋莉莉　李龙才　刘长明　邓泾河　郑新明
黎灿明　鲁欲民
责任编辑：张劲松

图书在版编目（CIP）数据

义务教育教科书（五·四学制）教师教学用书．数学．九年级．下册 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．— 北京：人民教育出版社，2014.10

ISBN 978-7-107-29714-4

Ⅰ．①义…　Ⅱ．①人…　Ⅲ．①中学数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．① G633

义务教育教科书（五·四学制）教师教学用书　数学　九年级　下册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　××× 印刷厂
版　　次　2014 年 10 月第 1 版
印　　次　　　年　月第　次印刷
开　　本　787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张　11.25
字　　数　251 千字
定　　价　　　元

说　明

为适应实行五・四学制地区小学、初中数学教学的实际需要，人民教育出版社、课程教材研究所小学和中学数学课程教材研究开发中心以《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《课标（2011 年版）》）为依据，在现有的六・三学制《义务教育教科书・数学》（一～九年级）的基础上，对教科书体系进行了适当变动整合，对教科书内容进行了相应调整改编，编写了这套适合五・四学制需要的教科书. 全套书分为八册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体，其中对于“综合与实践”领域的内容，以“课题学习”和“数学活动”等形式分散地编排于各章之中.

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1. 每章开始均用反映本章主要内容的章前图和引言引入本章内容，使学生了解本章内容的概貌，了解本章的主要思想方法和学习方法，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 正文中设置了“思考”“探究”“归纳”等栏目，栏目中以问题、留白或填空等形式引导学生通过观察、分析、猜想、试验、推理、反思、交流等活动获取数学知识，积累学习经验.

3. 适当安排了“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”等选学栏目，为加深学生对相关内容的认识，扩大学生的知识面，运用现代信息技术手段学习等提供资源.

4. 正文的边空设有“小贴士”和“云朵”，“小贴士”介绍与正文内容相关的背景知识，“云朵”中是一些有助于理解正文的问题.

5. 每章安排了几个有一定综合性、实践性、开放性的“数学活动”，体现数学知识的综合应用，可供教师结合相关知识的教学或全章复习时选用.

6. 每章安排了“小结”，包括本章的知识结构图和对本章内容的回顾与思考. “本章知识结构图”体现了本章知识要点、发展脉络和相互联系；“回顾与思考”对本章主要内容及其反映的思想方法进行提炼与概括，并通过在重点、难点和关键环节上提出的有思考力度的具体问题，深化学生对本章核心内容及其反映的数学思想方法的理解.

7. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习题供复习全章时选用. 其中习题、复习题按照习题的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三类.

这套教师教学用书与《义务教育教科书（五・四学制）・数学（六～九年级）》相对应，供教师教学时参考使用. 全套书分为八册，每册书按章编排，每章内容与相应教科书内容对应. 教师教学用书的每一章主要包括以下六部分：

第一部分是总体设计，包括本章学习目标、本章知识结构框图、内容安排、课时安排、编

写本章时考虑的问题、对本章教学的建议等内容.

第二部分是教材分析，这部分含有教科书相应章节的正文，正文旁有教科书正文的注释及教科书中练习的答案和说明，正文下部按小节分条阐述各小节的编写意图，说明本节内容的知识结构、知识点及其发生发展过程（逻辑关系）、重点、学生学习过程中可能出现的困难和问题等.

第三部分是本章习题的参考答案.

第四部分提供了几个教学案例，供教师教学时参考. 每一个教学案例是一个课时的课堂教学设计，内容包括内容和内容解析、目标和目标解析、教学问题诊断分析、教学支持条件分析、教学过程设计、目标检测设计等几方面.

第五部分是拓展资源. 根据每章的教学内容，为教师提供相应的拓展资料，包括知识的拓展延伸与相关史料、拓展性问题等.

第六部分是评价建议与测试题. 评价建议从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度等几方面为教师提出本章评价建议，提供了一套测试题供参考，并说明了每道测试题的设计意图.

本书是九年级下册的教师教学用书，内容包括“相似”“锐角三角函数”“投影与视图”三章，各章授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第三十三章　相似	16 课时
第三十四章　锐角三角函数	14 课时
第三十五章　投影与视图	12 课时

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢.

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2014 年 11 月

目　录

第三十三章　相似 1

Ⅰ　总体设计 1
Ⅱ　教材分析 6
　33.1　图形的相似 7
　33.2　相似三角形 12
　33.3　位似 30
　数学活动 37
　小结 39
　复习题 33 40
Ⅲ　习题解答 43
Ⅳ　教学设计案例 45
　33.2.1　相似三角形的判定（第 2 课时） 45
　33.2.1　相似三角形的判定（第 3 课时） 49
　33.2.2　相似三角形的性质 53
　33.3　位似（第 2 课时） 56
Ⅴ　拓展资源 60
Ⅵ　评价建议与测试题 64

第三十四章　锐角三角函数 69

Ⅰ　总体设计 69
Ⅱ　教材分析 75
　34.1　锐角三角函数 76
　34.2　解直角三角形及其应用 87
　数学活动 96
　小结 98

复习题 34 99
Ⅲ 习题解答 101
Ⅳ 教学设计案例 103
34.1 锐角三角函数（第 1 课时） 103
34.2 解直角三角形及其应用（第 1 课时） 109
Ⅴ 拓展资源 113
Ⅵ 评价建议与测试题 117

第三十五章 投影与视图 121

Ⅰ 总体设计 121
Ⅱ 教材分析 125
35.1 投影 126
35.2 三视图 133
35.3 课题学习 制作立体模型 144
数学活动 146
小结 147
复习题 35 148
Ⅲ 习题解答 151
Ⅳ 教学设计案例 153
35.1 投影（第 1 课时） 153
35.2 三视图（第 1 课时） 158
35.3 课题学习 制作立体模型（第 1 课时） 162
Ⅴ 拓展资源 165
Ⅵ 评价建议与测试题 171

第三十三章　相似

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 通过具体实例认识图形的相似，了解相似多边形和相似比的含义.

2. 掌握基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

3. 了解相似三角形的判定定理：两角分别相等的两个三角形相似；两边成比例且夹角相等的两个三角形相似；三边成比例的两个三角形相似.

4. *①了解相似三角形判定定理的证明.

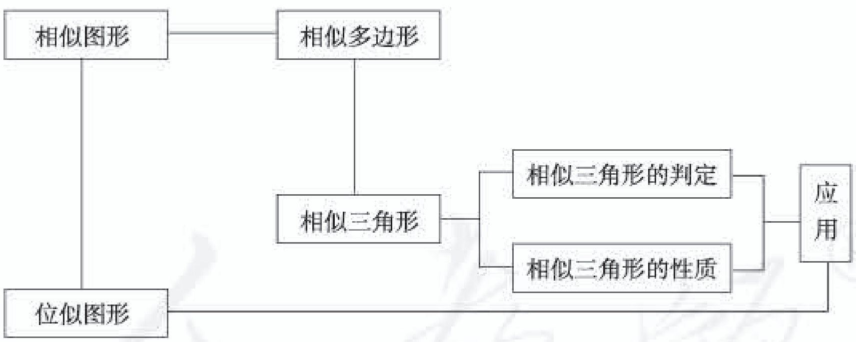
5. 了解相似三角形的性质定理：相似三角形对应线段的比等于相似比；面积比等于相似比的平方.

6. 了解图形的位似，知道利用位似可以将一个图形放大或缩小.

7. 在直角坐标系中，探索并了解将一个多边形的顶点坐标（有一个顶点为原点、有一条边在横坐标轴上）分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形是位似的.

8. 会利用图形的相似解决一些简单的实际问题.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

在《课标（2011 年版）》中，图形的相似是“图形的变化”的主要内容之一，研究的主题是图形形状之间的关系，而图形的位似还涉及图形的位置关系. 全等是一种特殊的相似，本章将在前面对全等形研究的基础上，借鉴全等形研究的基本套路对相似图形进行研究. 首先，教科书从现实世界中形状相同的物体谈起，然后把研究对象确定为形状相同的图形——相似图形，举例说明了放大、缩小两种操作与相似图形之间的关系. 接着教科书把研究对象缩小为特殊的相似图形——相似

---

① 标有 * 的内容为选学内容，不作考试要求.

多边形，由相似多边形的定义推出相似多边形的性质. 对于相似多边形的判定，教科书以三角形为载体进行研究，此外，还研究了相似三角形的其他性质和应用. 最后，教科书研究了一种具有特殊位置关系的相似图形——位似图形. 本章的知识不仅将在后面学习“锐角三角函数”和“投影与视图”时得到应用，而且对于建筑设计、测量、绘图等实际工作也具有重要价值.

本章共有三节内容. “33.1 图形的相似”主要介绍相似图形、相似多边形的概念，并给出了相似多边形的性质；“33.2 相似三角形”主要研究相似三角形的判定和性质，以及相似三角形在测量中的应用；“33.3 位似”研究了一种特殊的相似图形——位似图形的画法，以及如何在平面直角坐标系中用坐标表示位似变换.

在“33.1 图形的相似”中，教科书首先列举了生活中具有形状相同形象的物体（汽车与它的模型、大小不同的足球、不同尺寸的照片、不同字号的印刷字），接着把形状相同的图形定义为相似图形，然后指出放大和缩小这两种操作与相似图形之间的关系. 接下来，教科书给出了特殊的相似图形——相似多边形的定义，并由定义得到判定两个边数相同的多边形是相似多边形的方法，以及相似多边形对应角相等、对应边成比例的性质.

“33.2 相似三角形”分为相似三角形的判定、性质及应用三部分. 在“33.2.1 相似三角形的判定”中，教科书介绍了五种判定方法. 其中，为了得到第一种判定方法“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”，教科书先在探究的基础上介绍了平行线分线段成比例的基本事实，然后将这个基本事实应用到三角形上得到一个推论，最后利用这个推论并通过在三角形中平移线段证明了两个三角形相似. 接下来的三种判定方法（“三边”“两边及其夹角”“两角”）都是利用第一种判定方法证明的. 最后，教科书利用勾股定理证明了判定两个直角三角形相似的方法.

在“33.2.2 相似三角形的性质”中，教科书首先证明了相似三角形对应高的比等于相似比，然后由相似三角形对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比，推广到更一般的结论——相似三角形对应线段的比等于相似比，接着推出了相似三角形的面积比与相似比之间的关系. 相似三角形的判定和性质在实际生活中应用很多，教科书接下来在“33.2.3 相似三角形应用举例”中安排了 3 个例题：测量金字塔高度、测量河宽、测量特殊条件下的距离，举例说明相似三角形在测量方面的应用.

在本章最后一节“33.3 位似”，位似图形作为一种特殊的相似图形被引入. 教科书首先指出日常生活中存在与原图形相似且与原图形的对应顶点的连线交于一点的图形（幻灯机、照相机成像），给出位似图形的概念. 然后从定义出发，得到画一个多边形的给定位似比的位似图形的方法. 接下来，与用变换前后两个多边形对应顶点的坐标之间的关系表示平移、轴对称和旋转类似，教科书研究了用坐标之间的关系表示位似变换的方法. 最后教科书对学生学过的四种变换进行了总结，让学生在一个设计图案中辨析这些变换.

相似三角形的判定和性质是本章的重点，相似三角形判定定理的证明是本章的难点. 此外，综合应用相似三角形的判定和性质，以及前面学过的平行线、全等三角形、平行四边形等知识解决问题（包括实际问题）也是本章的难点. 为了降低学生在推理论证方面的难度，本章加强了证明思路的引导，或者用分析法分析出由条件到结论必需的转化，或者提示证明的关键环节；为了降低学生在解决实际问题中的难度，本章专门设置了“33.2.3 相似三角形应用举例”，从不同角度为解决实际问题做出示范.

四、课时安排

本章教学时间约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

33.1　图形的相似	3 课时
33.2　相似三角形	8 课时
33.3　位似	3 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 强调研究几何图形的基本思路和方法，体现公理化思想

本套教科书对于几何内容的编写自始至终强调研究几何图形的基本思路和方法，体现公理化思想. 如在七年级下册“相交线与平行线”一章中，教科书介绍了图形的判定和图形的性质的含义及相互关系，让学生认识到它们是研究几何图形的两个重要方面；对于三角形、全等三角形、平行四边形等几何图形，教科书都重点研究了它们的定义、性质和判定方法. 本章对相似图形的研究仍然以公理化思想为指导，强调研究几何图形的基本思路和方法，具体表现为以下几方面：首先，本章按照“相似形的现实模型→相似图形→相似多边形→相似三角形→位似图形”的顺序，从一般到特殊呈现研究对象，展开研究. 其中，以最简单而典型的封闭图形——三角形为载体研究相似图形的基本内容——概念、性质和判定方法. 其次，上一版教科书按照“判定→应用→周长与面积”的顺序呈现相似三角形的内容，本次修订后的教科书先介绍相似三角形的判定方法，接着给出相似三角形的性质，最后在“相似三角形应用举例”中应用判定方法和性质. 这样编排使研究几何图形的“判定→性质→应用”的主线更清晰，突出了研究的主要问题. 再次，为了研究相似多边形对应角相等、对应边成比例的性质，教科书改变了上一版教科书依次对相似正三角形、正六边形和一般的相似三角形、四边形进行观察、度量，猜想对应角、对应边的关系，然后从特殊到一般归纳结论的方式，直接给出相似多边形的定义，并由定义直接得到相似多边形对应角相等、对应边成比例的性质. 这样做使图形性质的获得更直接，也符合九年级学生的认知水平. 最后，在第 33.2.2 小节研究相似三角形的性质之前，教科书先提出问题“三角形中有各种各样的几何量，例如三条边的长度，三个内角的度数，高、中线、角平分线的长度，以及周长、面积等. 如果两个三角形相似，那么它们的这些几何量之间有什么关系呢?”，这实际上是让学生在“什么是性质”的思想的指导下自己发现相似三角形的性质，改变以往教学中“给一条性质，证明一条性质”的做法.

2. 重视培养学生的推理论证能力

按照整套教科书对推理能力培养的循序渐进的目标，“相似”处于最后一章，所包含的问题的综合性强、证明难度大. 教科书一方面继续运用直观操作和逻辑推理相结合的方式研究几何图形，让学生经历“实验→猜想→证明”的过程，即先让学生在实验操作中感受几何命题的合理性，再在分析、思考的基础上提出猜想，最后通过证明确认几何命题正确. 这样的过程有利于提高学生独立发现问题、解决问题的能力. 另一方面，教科书加强证明思路的引导，让学生在理解、感悟、实践证明思路的基础上提高推理论证能力. 例如，在用平行线分线段成比例的基本事实的推论证明定理“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”时，教科书引导学生思考解决问题的关键是证明“$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$”，而“除 DE 外，AE，AC，BC 都在$\triangle ABC$ 的边上”，

为了利用结论“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”，就得到了通过作平行线将 DE 也平移到 $\triangle ABC$ 的边上的证明思路. 又如，在证明“三边成比例的两个三角形相似”的过程中，教科书提炼出了作一个“中介三角形”使之与要证的三角形相似，再利用相似三角形对应边成比例和已知条件证明“中介三角形”与原三角形全等的思路，利用这个思路，让学生自己证明“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”和“两角分别相等的两个三角形相似”.

3. 加强知识间的联系

相似图形与全等图形之间是一种一般与特殊的关系，教科书在编排相似内容时将其看成全等内容的拓展与延伸，并利用类比来展现两者的关系. 例如，章引言类比“全等三角形”一章研究的主要内容，提出本章要研究的主要问题——“在‘全等三角形’一章中，我们研究了形状和大小完全相同的两个三角形的性质和判定方法. 类似地，两个形状相同、大小不同的三角形，它们的边和角有什么关系？……”又如，类比存在判定两个三角形全等的简便方法，教科书提出问题“判定两个三角形相似时，是不是也存在简便的判定方法呢”，接着类比判定三角形全等的“SSS，SAS，HL”方法，让学生分别从三边、两边和夹角、斜边和一条直角边的角度寻求答案. 在章小结中，教科书对这种研究思路进行了总结“全等形是相似比为 1 的相似图形，因此全等是特殊的相似. 利用从特殊推广到一般的方法，由研究全等三角形的思路，可以提出相似三角形的问题和研究方法.”此外，教科书以平行线分线段成比例的基本事实为起点证明相似三角形的判定定理，就是利用这一基本事实与相似三角形定义中边对应成比例之间的联系. 将平行线分线段成比例的基本事实应用到三角形中，得到推论“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”，进一步证明“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”，而这个定理可以作为证明其他判定定理的引理.

4. 注意联系实际

相似是生活中常见的现象，日常生活中到处存在着相似的例子，相似图形的性质在实际中有着广泛的应用，能直接应用相似三角形判定和性质的实例也很多. 为了让学生认识到这一点，并增强学生发现问题、解决问题的能力，教科书结合具体内容融入了大量实际背景和问题. 如在概念引入环节，为了让学生建立对相似图形的直观认识，教科书不仅在章头图呈现了两张不同尺寸同底版的万里长城照片，还在第 33.1 节给出了汽车和它的模型、大小不同的足球等形象，并通过放映电影、复印机复印等实例让学生感受相似图形与放大、缩小两种操作的关系；在概念的应用环节，教科书给出了一些利用相似三角形的性质和判定方法解决生活中不能直接测量的物体长度的问题，在练习、习题中也编排了应用相似三角形知识的实例.

六、对本章教学的建议

1. 强调研究几何图形的基本问题、思路和方法

学生通过前面对平行线、三角形、全等三角形、平行四边形等几何图形的学习，对于研究几何图形的基本问题、思路和方法已经形成了一定的认识. 本章教学中要充分利用学生已有的研究几何图形的经验，用研究几何图形的基本问题、思路和方法贯穿全章的教学. 例如，在教授本章之前，可以让学生类比对全等三角形研究的主要内容，提出对形状相同、大小不同的三角形应研究的主要问题和研究方法，构建本章内容的基本线索，使他们对将学习的内容做到心中有数. 又如，过去对图形性质的教学一般是教师先给出性质，然后引导学生证明，而通过前面对几何图形的学习，学生

已经了解了性质要研究的是几何图形的基本量之间的关系，因此本章在教学相似三角形的性质之前，可以先让学生自己发现性质，再给出证明.

2. 进一步培养学生的推理论证能力

本章证明涉及的问题不仅包含相似的知识，还有很多与三角形、全等、平行、勾股定理、平面直角坐标系等知识融合在一起，例如相似三角形判定定理的证明中利用了三角形全等，性质的证明借助了代数运算，因此推理论证的难度提高了. 教学时应注意帮助学生复习已有知识，做到以新带旧、新旧结合；同时注意以具体问题为载体，加强证明思路的引导，帮助学生确定证明的关键环节，指导学生写出完整的证明过程. 同时注意根据教学内容及时安排相应的训练，让学生逐步达到独立分析、完成证明.

3. 注意把握好教学要求

与《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》相比，《课标（2011 年版）》突出了以三角形为载体对相似图形的判定和性质的研究，学习要求也由“探索”变成了“证明”. 因此教学中应该注意把握好不同内容的教学要求，突出本章的重点内容. 例如，本章中比例和成比例线段的相关内容是为相似多边形的定义服务的，教学中只需在小学数学的基础上给出线段成比例的概念，让学生理解它的基本含义即可. 又如，尽管平行线分线段成比例的基本事实是研究相似三角形判定的基本理论，但教学中不应过多涉及这个基本事实的应用，而是主要由它推出判定相似三角形的第一种判定方法. 而对于本章的重点内容，不应该满足于“探索”，应该让学生证明相似三角形的性质定理，让学有余力的学生证明相似三角形的判定定理.

Ⅱ 教材分析

［1］形状相同是相似的本质属性，大小不同不是相似的本质属性．这里提到大小不同是为了与全等区别．全等是相似的特例，教学时应注意强调这一点．

［2］教学时可以先让学生思考对于两个形状相同、大小不同的三角形，应该研究哪些问题，再介绍本章要研究的主要问题．

［3］本章将继续使用实验操作和推理论证相结合的方式研究几何图形，与前面章节相比，推理论证使用得更多．

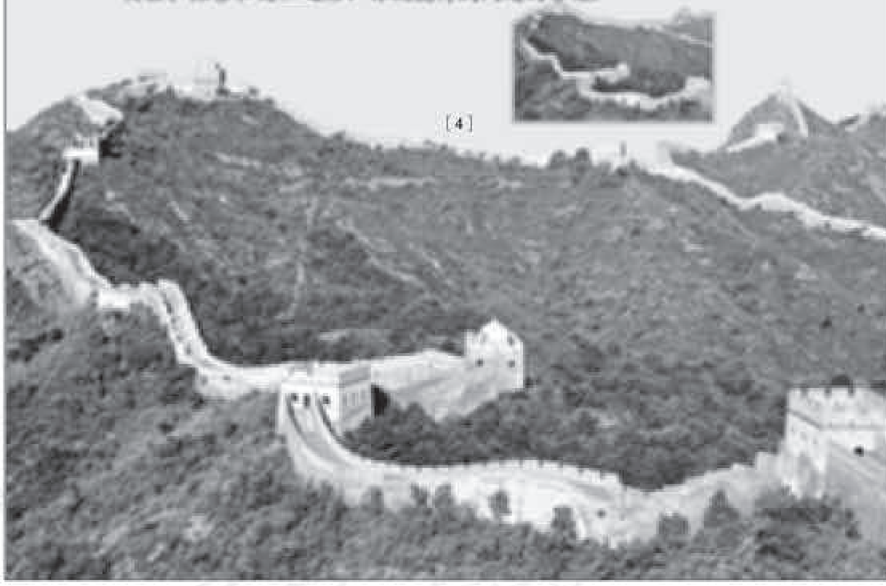
［4］章头图中两张大小不同的万里长城图片是用PhotoShop软件的等比例缩放功能制作的．

第三十三章　相似

在现实生活中，我们经常见到形状相同的图形，如国旗上大小不同的五角星、不同尺寸同底版的相片等．下图中两张大小不同的万里长城图片，它们的各部分都是按一定比例对应的．

在“全等三角形”一章中，我们研究了形状和大小完全相同的两个三角形的性质和判定方法．类似地，两个形状相同、大小不同[1]的三角形，它们的边和角有什么关系？对应线段（如高、中线和角平分线等）和面积有什么关系？如何判断两个三角形的形状是否相同？如何按要求放大或缩小一个图形呢？[2]

要回答上面的问题，就进入这一章的学习吧！在实验、探索和论证[3]之后，你就能得到问题的答案．



［4］

1. 中学阶段重点研究的两个平面图形间的关系是全等和相似，全等是一种特殊的相似．本章将在全等形研究的基础上，借鉴全等三角形的学习经验对相似图形进行研究．

2. 章引言首先举例说明相似图形在生活中广泛存在．接着，回顾了“全等三角形”一章研究的主要内容——全等三角形的性质和判定方法，与此类比，提出相似图形要研究的主要问题——性质（边、角、对应线段和面积的关系）、判定方法、按要求放大或缩小一个图形的方法．这实际上是让学生经历面对一个新的研究对象，确定它的主要研究问题的过程．最后，简要说明了本章主要的研究方法——实验、探索和论证．

33.1 图形的相似

图 33.1-1 中有汽车和它的模型，也有大小不同的足球，还有同一张底版洗出的不同尺寸的照片，以及排版印刷时使用不同字号排出的相同文字.[1] 所有这些，都给我们以形状相同的形象. 我们把形状相同的图形叫做**相似图形**[2] (similar figures).

你能再举出一些相似图形的例子吗？[3]

图 33.1-1

两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形放大或缩小得到. 例如，放映电影时，投在屏幕上的画面就是胶片上图形的放大；用复印机把一个图形放大或缩小后所得的图形，都与原来的图形相似. 图 33.1-2 中有 4 对图形，每对图形中的两个图形相似. 其中较大（小）的图形可以看成是由较小（大）的图形放大（缩小）得到的.

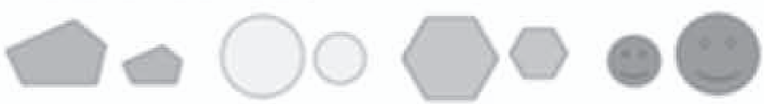


图 33.1-2

2　第三十三章　相似

[1] 这里举出了四种形状相同、大小不同的实物，其中有的是立体的、有的是平面的.

[2] 这里的相似图形指的是形状相同的平面图形.

[3] 学生举出的例子应该是关于平面图形的.

1. 本节主要内容分为两部分，一是介绍相似图形的概念，并将放大、缩小两种操作与相似图形联系起来；二是给出相似多边形的概念.

2. 本章按照从一般到特殊的顺序呈现研究对象，即“相似图形的现实模型→相似图形→相似多边形→相似三角形→位似图形”. 本节首先从现实世界中形状相同的物体谈起，然后把研究对象确定为形状相同的图形，接着再把研究对象聚焦到相似多边形.

3. 教科书没有从相似变换的角度给出相似图形的确切定义，而是在让学生感受实物模型所具有的“形状相同的形象”的基础上，直接将相似图形定义为形状相同的图形.

4. 将一个图形放大或缩小所得到的图形，与原来的图形是相似的；反过来，两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形放大或缩小得到. 因此，放大或缩小与相似图形之间是操作与操作结果的关系. 教科书举了放映电影、

［1］平面镜是表面平整的镜子，它所成像的形状和大小与物体完全相同．

［2］哈哈镜是表面凹凸不平的镜子，它能使所成的像产生奇异变形．

练习答案

1. 相似．
2. d 与（1）相似，e 与（2）相似．

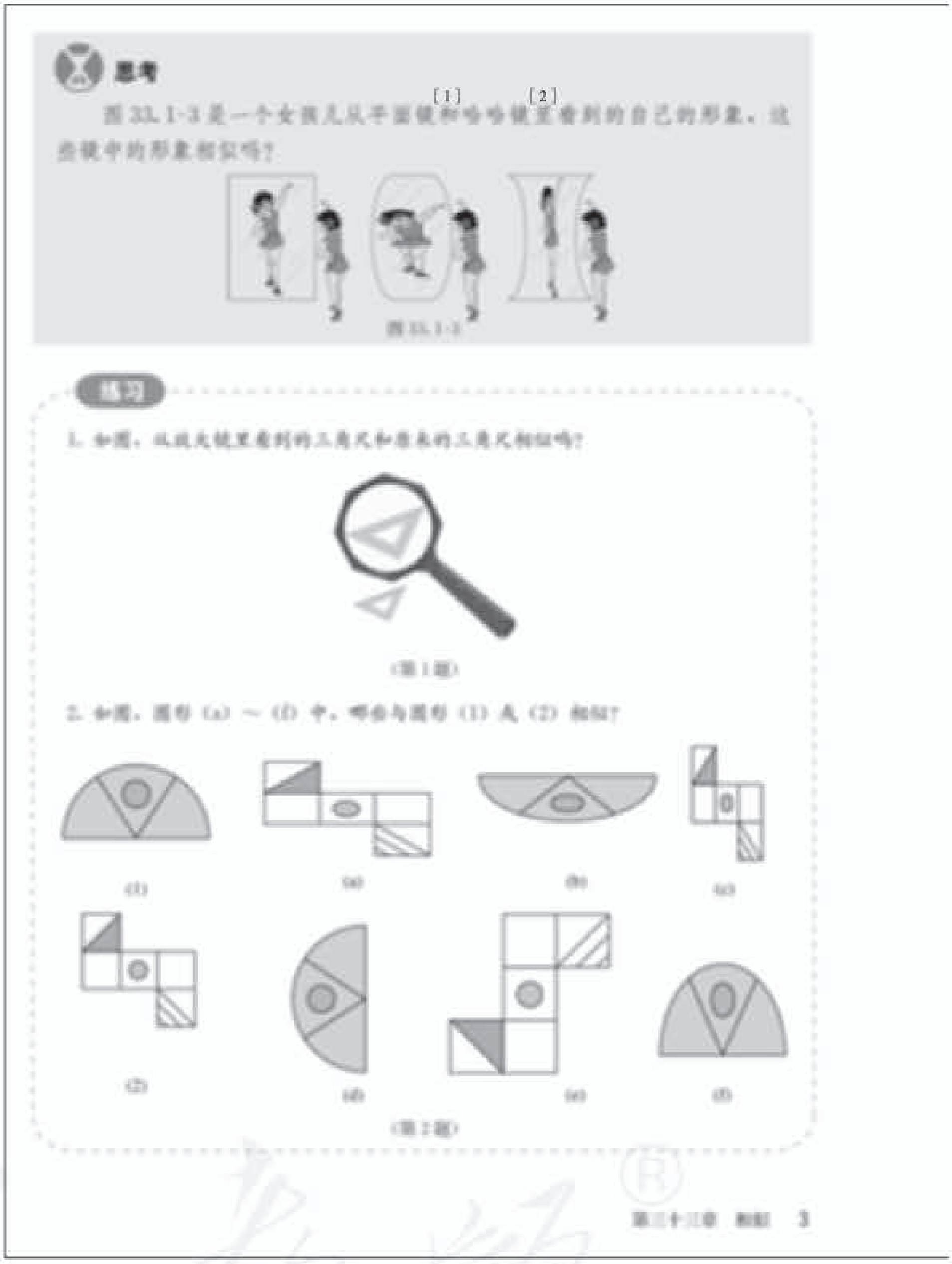

思考

图 33.1-3 是一个女孩儿从平面镜[1]和哈哈镜[2]里看到的自己的形象，这些镜中的形象相似吗？

图 33.1-3

练习

1. 如图，从放大镜里看到的三角尺和原来的三角尺相似吗？

（第 1 题）

2. 如图，图形（a）～（f）中，哪些与图形（1）或（2）相似？

（1） （a） （b） （c）

（2） （d） （e） （f）

（第 2 题）

第三十三章 相似 3

使用复印机的例子说明现实生活中对图形缩放的应用．事实上，一般的图形处理软件中的等比例缩放功能都能将图形放大或缩小．

5. 在介绍了相似图形的定义后，教科书设置了一个“思考”栏目，通过一个女孩儿照镜子的情境，让学生初步应用刚建立起来的对相似形象的认识．这个问题的预设答案是：平面镜所成的像保持人体的形象不变，哈哈镜所成的像使人体的形象产生变形，所以这些镜中的形象不相似．此外，学生解答这个问题还需要一定的生活经验，包括平面镜和哈哈镜所成的像都可以看成平面的，以及两种镜子的成像特点等．必要时，教师可以通过展示实物或图片帮助学生理解．

6. 在这部分之后，教科书编排了 2 道练习题，目的是加深对相似图形概念的理解．其中第 1 题需把三角尺近似看成一个平面图形．

7. 本节的第二部分首先以描述图形特征的方式给出相似多边形的概念．这样做的目的，是


下面我们研究特殊的相似图形——相似多边形．两个边数相同的多边形，如果它们的角分别相等，边成比例，那么这两个多边形叫做**相似多边形**（similar polygons）．相似多边形对应边的比叫做**相似比**[2]（similarity ratio）．

对于四条线段 a，b，c，d，如果其中两条线段的比（即它们长度的比）与另两条线段的比相等，如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（即 $ad=bc$），我们就说这四条线段成比例．[1]

例如，图 33.1-4 中的两个大小不同的四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，

$\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$，$\angle D=\angle D_1$，

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DA}{D_1A_1},$$

因此四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似．

两个大小不同的正方形相似吗？为什么？[3]

图 33.1-4

由相似多边形的定义可知，相似多边形的对应角相等，对应边成比例．

例 如图 33.1-5，四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 相似，求角 α，β 的大小和 EH 的长度 x．

图 33.1-5

解：因为四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 相似，所以它们的对应角相等，由此可得

$$\alpha=\angle C=83^\circ，\angle A=\angle E=118^\circ．$$

在四边形 $ABCD$ 中，

$$\beta=360^\circ-(78^\circ+83^\circ+118^\circ)=81^\circ．$$

因为四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 相似，所以它们的对应边成比例，由此可得

4 第三十三章 相似

［1］根据定义，只要四条线段满足其中两条线段的比与另两条线段的比相等，就说这四条线段成比例．反之，当四条线段中找不到两条线段的比与另两条线段的比相等时，就说这四条线段不成比例．

［2］相似比的实质是把一个图形放大或缩小的倍数，这一点还可以在作图时向学生强调．

［3］两个大小不同的正方形是相似的，因为它们的角分别相等，边成比例．

让学生能够从概念中直接得到相似多边形的性质和判定方法．教学中，可以让学生根据相似多边形的概念，判断图 33.1-4 中的两个四边形是否相似，以及从概念出发推出相似多边形的性质．

8．对于线段成比例，教科书是在旁注中给出的．教学中要将数的比及比例的概念推广到线段的比及比例的概念．学生在小学时已经学过数的比、比的前项、后项，比例的项、外项、内项等概念，也已经学习了比例的基本性质：若 $a:b=c:d$，则 $ad=bc$．学习本章内容，掌握上述比例的内容就可以了．对于比例的合比、等比等性质，容易由比例的基本性质，经过运算推出，用到的时候可以向学生介绍，不作基本教学要求．

9．接下来，教科书设置了一道应用相似多边形的性质求相似四边形中某些边和角的例题．教学中需要引导学生观察图形，确定相似四边形的对应边和对应角．

[1] 地图上的比例尺一般表示地图上 1 cm 所代表的实地距离，例如 1∶10 000 000表示地图上 1 cm 代表实地距离 100 km.

练习答案

1. 3 000 km.
2. 相似. 由已知条件可知它们的角分别相等，边成比例.
3. $a=3$，$b=4.5$，$c=4$，$d=6$.

[2] 学生的答案可能各种各样. 教学中要要求他们用相似多边形的定义判定画出的图形与原图形相似.

$$\frac{EH}{AD}=\frac{EF}{AB}，即\frac{x}{21}=\frac{24}{18}.$$

解得 $x=28.$

练习

1. 在比例尺为[1] 1∶10 000 000 的地图上，量得甲、乙两地的距离是30 cm，求两地的实际距离.
2. 如图所示的两个三角形相似吗？为什么？

（第 2 题）　（第 3 题）

3. 如图所示的两个五边形相似，求 a，b，c，d 的值.

习题 33.1

复习巩固

1. 两地的实际距离是 2 000 m，在地图上量得这两地的距离为 2 cm，这幅地图的比例尺是多少？
2. 任意两个矩形相似吗？为什么？
3. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，求 x，y 的值.

（第 3 题）

综合运用

4. 如图，试着在方格纸中画出与原图形相似的图形. 你用的是什么方法[2]？与同学交流一下.

（第 4 题）

5

10. 对于相似多边形的概念，教科书设置了 3 道练习题. 其中，第 1 题复习比例尺的概念和比例的基本性质，第 2 题应用相似多边形的概念判定两个三角形相似，第 3 题应用相似多边形的性质求相似图形中的边长.

习题 33.1

1. 本节设置了 8 道习题. “复习巩固”中的 3 道题复习比例尺的概念，以及应用相似多边形的概念.

2. “综合运用”有 4 道题.

第 4 题的设计意图是让学生综合应用相似多边形的概念以及平行线的性质等知识画图，并判定画出的图形是否与原图形相似.

第 5 题也将平行线的知识与相似多边形的概念结合起来，需要学生先用平行线的性质得到判定两个三角形相似所需的边成比例、角分别相等的条件.

5. 如图，DE∥BC. (1) 求$\frac{AD}{AB}$，$\frac{AE}{AC}$，$\frac{DE}{BC}$的值；(2) 证明△ADE与△ABC相似.

（第5题）　（第6题）[1]

6. 如图，矩形草坪长30 m，宽20 m，沿草坪四周有1 m宽的环行小路，小路内外边缘形成的两个矩形相似吗？说出你的理由.

7. 如果两个多边形仅有角分别相等，它们相似吗？如果仅有边成比例呢？若不一定相似，请举出反例.

拓广探索

8. 如图，将一张矩形纸片沿较长边的中点对折，如果得到的两个矩形都和原来的矩形相似，[2]那么原来矩形的长宽比是多少？将这张纸如此再对折下去，得到的矩形都相似吗？

（第8题）

[1] 这个图有一定的迷惑性. 从图中看，小路内外边缘形成的两个矩形似乎相似. 教学中要提醒学生，判定相似问题不能只靠眼睛，要靠数学推理.

[2] 书籍印刷中为了使不同开本的书的形状相似，一般采用长、宽比约为1.414∶1的纸张，并且采用这种对半裁切的方法来裁切纸张.

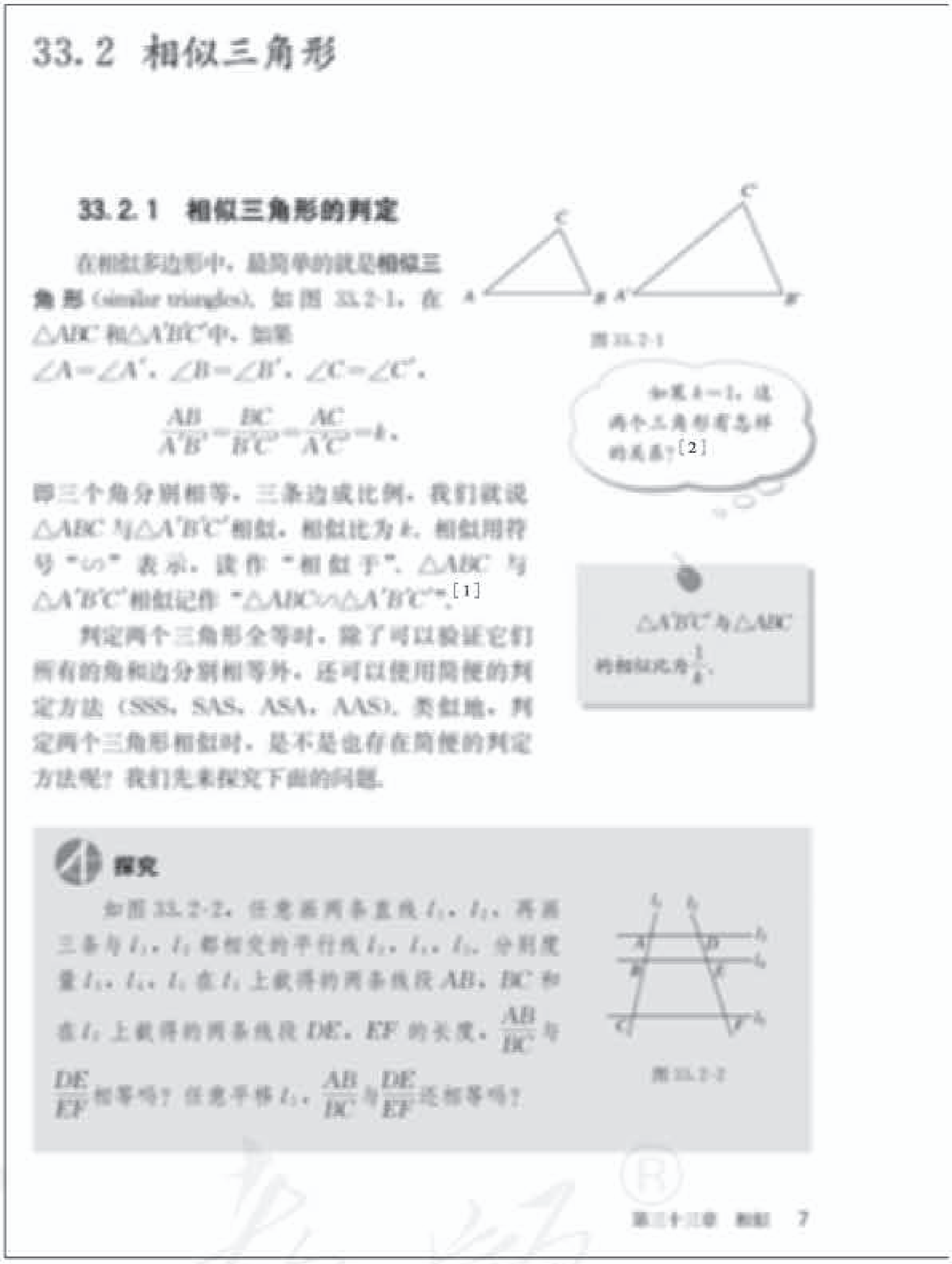
第6题需要学生理解“四条线段不成比例”的含义.

第7题要求学生熟悉已学过的多边形的性质.

3.“拓广探索”的第8题需要学生确定对折前后矩形的对应边.

[1] 与表示两个三角形全等类似，表示两个三角形相似时，经常把表示对应角顶点的字母写在对应的位置上，这样可以一目了然地知道它们的对应角和对应边. 相似多边形的记法也类似.

[2] 当 $k=1$ 时，这两个三角形是全等三角形.



33.2 相似三角形

33.2.1 相似三角形的判定

在相似多边形中，最简单的就是**相似三角形**(similar triangles). 如图 33.2-1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果

$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k,$$

即三个角分别相等，三条边成比例，我们就说 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，相似比为 k. 相似用符号“∽”表示，读作“相似于”. $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似记作“$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$”.[1]

图 33.2-1

如果 $k=1$，这两个三角形有怎样的关系？[2]

$\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\frac{1}{k}$.

判定两个三角形全等时，除了可以验证它们所有的角和边分别相等外，还可以使用简便的判定方法（SSS，SAS，ASA，AAS）. 类似地，判定两个三角形相似时，是不是也存在简便的判定方法呢？我们先来探究下面的问题.

探究

如图 33.2-2，任意画两条直线 l_1，l_2，再画三条与 l_1，l_2 都相交的平行线 l_3，l_4，l_5. 分别度量 l_3，l_4，l_5 在 l_1 上截得的两条线段 AB，BC 和在 l_2 上截得的两条线段 DE，EF 的长度，$\frac{AB}{BC}$ 与 $\frac{DE}{EF}$ 相等吗？任意平移 l_5，$\frac{AB}{BC}$ 与 $\frac{DE}{EF}$ 还相等吗？

图 33.2-2

第三十三章 相似 7

1. 本节研究相似三角形的判定、性质和应用，它们是全章的重点内容.

2. 类比三角形全等的判定方法，教科书介绍了五种判定三角形相似的方法. 教科书按照下面的顺序展开内容：首先，给出根据定义判定三角形相似的方法，也就是满足三个角分别相等，三条边成比例的两个三角形相似；接着，类比判定三角形全等存在简便方法，提出判定三角形相似是否存在简便方法的问题；接下来，给出了平行线分线段成比例的基本事实，利用这个基本事实的推论，得到了判定三角形相似的第一个定理（平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似）；然后，由这个判定定理，推出了第二、三、四个判定定理（三边成比例、两边成比例且夹角相等、两角分别相等的两个三角形相似）；最后，类比判定两个直角三角形全等的“HL”方法，证明了判定两个直角三角形相似的特殊方法.

可以发现，当 $l_3 \parallel l_4 \parallel l_5$ 时，有 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，$\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{DE}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$，$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$等．

一般地，我们有平行线分线段成比例的基本事实：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例．

把平行线分线段成比例的基本事实应用到三角形中，[1]会出现下面两种情况（图 33.2-3）．

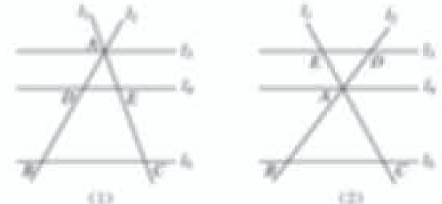


图 33.2-3

在图 33.2-3（1）中，把 l_4 看成平行于△ABC 的边 BC 的直线；在图 33.2-3（2）中，把 l_3 看成平行于△ABC 的边 BC 的直线，那么我们可以得到结论：

平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例．

思考

如图 33.2-4，在△ABC 中，$DE \parallel BC$，且 DE 分别交 AB，AC 于点 D，E．△ADE 与△ABC 有什么关系？

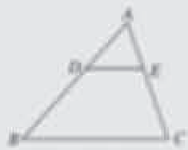


图 33.2-4

直觉告诉我们，△ADE 与△ABC 相似．我们通过相似的定义证明它，即证明 $\angle A=\angle A$，$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$．由前面的结论可得，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$．而$\frac{DE}{BC}$中的 DE 不在△ABC 的边 BC 上，不能直接利用前面的结论．但从要证的$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$可以看出，除 DE 外，AE，AC，BC 都在△ABC 的边上，因此

8　第三十三章　相似

[1] 要把这个基本事实应用到三角形中，必须有一条平行线与三角形的一边重合，一条平行线过该边所对的顶点．

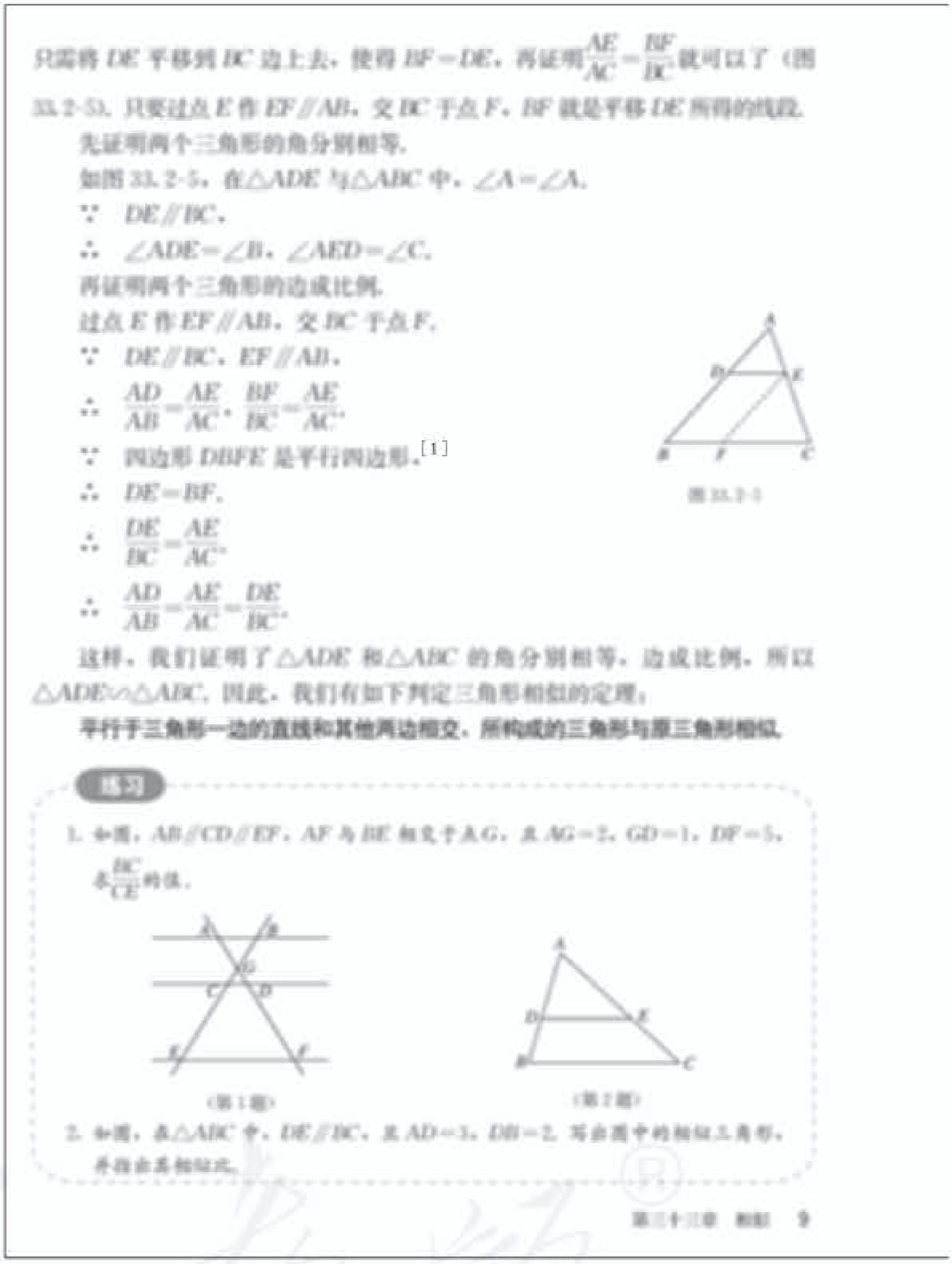
3. 引入平行线分线段成比例的基本事实，是为了利用它的推论证明判定三角形相似的第一个定理．因此，教科书对这个基本事实进行了“淡化”处理——在让学生通过画图、测量、猜想感知结论的基础上，直接给出基本事实；并将基本事实应用到三角形中，直接得出推论；不强调基本事实在判定线段成比例的应用．

4. “平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”的证明是本章的一个难点．为了降低难度，教科书加强了证明思路的引导．教学中可以引导学生按教科书上的思路思考：要用相似的定义证明△ADE 与△ABC 全等，关键是证明$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$，而除 DE 外，AE，AC，BC 都在△ABC 的边上，因此为了利用结论“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”，需要作平行线，将 DE 也平移到△ABC 的

［1］这里构造了一个平行四边形，目的是利用平行四边形对边相等的性质，把两条线段的比“转化”为另两条线段的比.

练习答案

1. $\frac{3}{5}$.
2. $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\frac{3}{5}$.



只需将 DE 平移到 BC 边上去，使得 $BF=DE$，再证明$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$就可以了（图 33.2-5）. 只要过点 E 作 $EF\parallel AB$，交 BC 于点 F，BF 就是平移 DE 所得的线段.

先证明两个三角形的角分别相等.

如图 33.2-5，在$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle A$.

$\because$ $DE\parallel BC$，

$\therefore$ $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

再证明两个三角形的边成比例.

过点 E 作 $EF\parallel AB$，交 BC 于点 F.

$\because$ $DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$，

$\therefore$ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$.

$\because$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形.[1]

$\therefore$ $DE=BF$.

$\therefore$ $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$.

$\therefore$ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

图 33.2-5

这样，我们证明了$\triangle ADE$ 和$\triangle ABC$ 的角分别相等，边成比例，所以$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$. 因此，我们有如下判定三角形相似的定理：

平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似.

练习

1. 如图，$AB\parallel CD\parallel EF$，$AF$ 与 BE 相交于点 G，且 $AG=2$，$GD=1$，$DF=5$，求$\frac{BC}{CE}$的值.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，且 $AD=3$，$DB=2$，写出图中的相似三角形，并指出其相似比.

第二十七章　相似　9

边上. 从这个定理的证明过程可以看出，教科书借助结论“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”，把两条线段的比“转移”为另两条线段的比，这个结论在证明过程中发挥了关键作用.

证明了这个判定定理，就可以利用它来证明其他的判定定理，因此它可以看成证明其他判定定理的引理.

5. 在随后的“练习”中，教科书安排了 2 道题目. 第 1 题先应用平行线分线段成比例的基本事实判定线段成比例，然后求值；第 2 题先利用“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”判定两个三角形相似，然后求相似比.

6. 接下来，教科书选择了与七年级下册“全等三角形”中相同的顺序呈现其他判定定理，即“三边”→“两边和夹角”→“两角”. 对于“三边”的情况，教科书安排了较完整的学习过

类似于判定三角形全等的 SSS 方法，我们能不能通过三边来判定两个三角形相似呢？

探究

任意画一个三角形，再画一个三角形，[1]使它的各边长都是原来三角形各边长的 k 倍，[2]度量这两个三角形的角，它们分别相等吗？这两个三角形相似吗？与同学交流一下，看看是否有同样的结论。

可以发现，这两个三角形相似. 我们可以利用上面的定理进行证明.

如图 33.2-6，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，求证 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

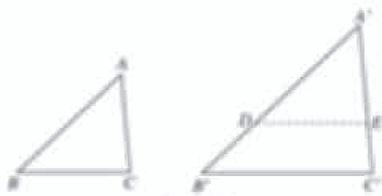


图 33.2-6

***证明**：在线段 $A'B'$（或它的延长线）上截取 $A'D=AB$，过点 D 作 $DE \parallel B'C'$，交 $A'C'$ 于点 E，根据前面的定理，可得 $\triangle A'DE \backsim \triangle A'B'C'$.

$\therefore \dfrac{A'D}{A'B'}=\dfrac{DE}{B'C'}=\dfrac{A'E}{A'C'}$.

又 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，$A'D=AB$，

$\therefore \dfrac{DE}{B'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$，$\dfrac{A'E}{A'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\therefore DE=BC$，$A'E=AC$.

$\therefore \triangle A'DE \cong \triangle ABC$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

$\triangle A'DE$ 是证明的中介，它把 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 联系起来.

* 相似三角形判定定理的证明都是选学内容.

10 第三十三章 相似

[1] 这里可以让学生用已知三边作三角形的尺规作图方法作三角形. 有条件的话，也可以利用信息技术作图.

[2] 这样画出的三角形的三条边与原三角形的对应边的比相等，都为 k.

程，包括通过类比判定三角形全等的“SSS”方法发现结论，通过画图、度量验证结论，证明结论，用图形、符号和文字表示结论. 这样做的目的是让学生再次经历几何结论的发现、验证和证明过程. 而对于“两边和夹角”以及“两角”的情况，考虑到学生可以用类似的方法学习，教科书采用了简洁的呈现方式——直接表示结论，然后让学生自己证明.

7. 依据《课标（2011 年版）》的要求，相似三角形判定定理的证明是选学内容，供学有余力的学生学习. 教科书采用了对“三边”“两边和夹角”“两角”三种情况都适用的证明方法，而且以“三边”情况为例进行证明，让学生仿照证明其他两种情况.

如图 1，在证明通过三边判定三角形相似的方法时，为了利用定理“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”，教科书在 $\triangle A'B'C'$ 中作了一条平行于 $B'C'$

[1] [2] 这两个判定定理和后面的用两角判定两个三角形相似的定理都是用图形、符号和文字三种方式描述的，目的是让学生明确定理中的对应边、对应角.

[3] 这里给出了证明这个判定定理的思路，可以让学生仿照证明“三边成比例的两个三角形相似”的方法证明.

由此我们得到利用三边判定三角形相似的定理（图 33.2-7）：

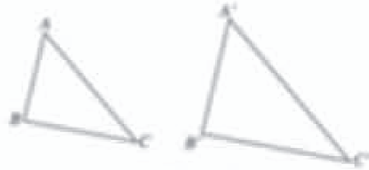


图 33.2-7

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$
$$\Downarrow$$
$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

三边成比例的两个三角形相似.[1]

类似于判定三角形全等的 SAS 方法，能不能通过两边和夹角来判定两个三角形相似呢？事实上，我们有利用两边和夹角判定两个三角形相似的定理（图 33.2-8）：

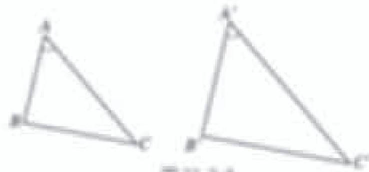


图 33.2-8

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}，\angle A=\angle A'$$
$$\Downarrow$$
$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.[2]

怎样证明这个定理呢？它的证明思路与证明前面定理的思路类似．先用同样的方法作一个与△$A'B'C'$相似的三角形，再用相似三角形对应边成比例和已知条件证明所作三角形与△ABC 全等.[3]

思考

对于△ABC 和△$A'B'C'$，如果 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，$\angle B=\angle B'$，这两个三角形一定相似吗？试着画画看.

例 1 根据下列条件，判断△ABC 与△$A'B'C'$是否相似，并说明理由：

(1) $AB=4$ cm，$BC=6$ cm，$AC=8$ cm，
$A'B'=12$ cm，$B'C'=18$ cm，$A'C'=24$ cm；

(2) $\angle A=120°$，$AB=7$ cm，$AC=14$ cm，

第三十三章 相似 11

且与 $A'B'$，$A'C'$ 都相交的线段 DE，这样可以得到△$A'DE\backsim$△$A'B'C'$．于是，只要△$A'DE$ 与△ABC 全等，就证明了△$ABC\backsim$△$A'B'C'$．为此在作 DE 时，可以在 $A'B'$（或它的延长线）上截取 $A'D=AB$，利用相似三角形对应边成比例和已知条件证明△$A'DE\cong$△ABC．从整个证明过程可以看出，△$A'DE$ 发挥了中介的作用，把△ABC 和△$A'B'C'$联系起来了．教学中可以在完成证明之后，帮助学生总结证明思路，以便他们能够把证明方法迁移到后面两种情况的证明中去.

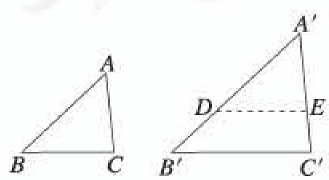


图 1

8. 与全等三角形没有“边边角”判定方法类似，不能通过两边成比例，并且其中一边的对角相等来判定两个三角形相似．对于这一点，教

$\angle A'=120°$，$A'B'=3$ cm，$A'C'=6$ cm.

解：(1) ∵ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$，

$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$，

$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$，

∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(2) ∵ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{7}{3}$，$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$，

∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

又 $\angle A=\angle A'$，

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

这两个三角形的相似比是多少？[1]

练习

1. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是否相似，并说明理由：
   (1) $\angle A=40°$，$AB=8$ cm，$AC=15$ cm，
   $\angle A'=40°$，$A'B'=16$ cm，$A'C'=30$ cm；
   (2) $AB=10$ cm，$BC=8$ cm，$AC=16$ cm，
   $A'B'=16$ cm，$B'C'=12.8$ cm，$A'C'=25.6$ cm.
2. 图中的两个三角形是否相似？为什么？

（第2题）

3. 要制作两个形状相同的三角形框架，其中一个三角形框架的三边长分别为4 cm，5 cm和6 cm，另一个三角形框架的一边长为2 cm，它的另外两条边长应当是多少？你有几种制作方案？

12 第二十三章 相似

［1］(1) 中$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比是$\dfrac{1}{3}$，(2) 中$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比是$\dfrac{7}{3}$.

练习答案

1. (1) 相似，因为两边成比例，夹角相等；(2) 相似，因为三边成比例.
2. (1) 相似，因为三边成比例；(2) 相似，因为两边成比例，夹角相等.
3. 三种制作方案. 另外两条边长分别是：$\dfrac{5}{2}$ cm，3 cm；$\dfrac{8}{5}$ cm，$\dfrac{12}{5}$ cm；$\dfrac{4}{3}$ cm，$\dfrac{5}{3}$ cm.

科书安排了一个“思考”栏目，让学生通过画图、思考，独立得出结论. 教学时可以举出如下反例. 如图 2，在$\triangle ABD$与$\triangle ABC$中，$BD=BC$，$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AB}{BC}$，$\angle A$是公共角，显然$\triangle ABD$与$\triangle ABC$不相似.

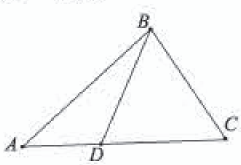
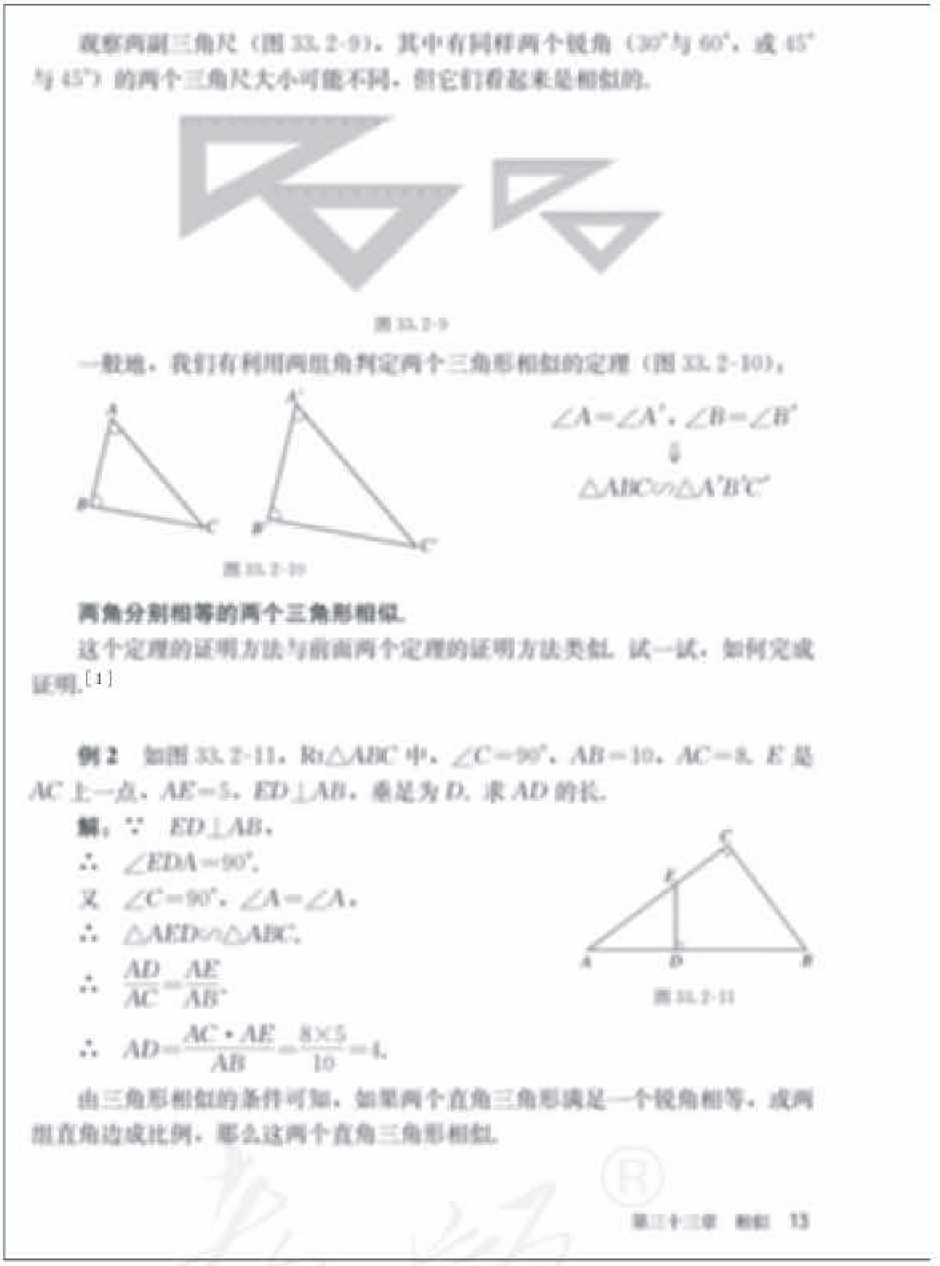


图 2

9. 教科书为这三个判定定理编排了例题和“练习”. 其中，例 1 和第 12 页“练习”的第 1，2 题直接应用判定定理“三边成比例的两个三角形相似”和“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”，让学生判断给定条件的两个三角形是否相似. 第 12 页“练习”的第 3 题实际上是利用相似三角形对应边成比例的性质解决问题，三种制作方案分别是使另一个三角形长为

［1］具体说，就是先用同样的方法作一个与$\triangle A'B'C'$相似的三角形，再用相似三角形对应角相等和已知条件证明所作三角形与$\triangle ABC$全等.



观察两副三角尺（图 33.2-9），其中有同样两个锐角（30°与 60°，或 45°与 45°）的两个三角尺大小可能不同，但它们看起来是相似的.

图 33.2-9

一般地，我们有利用两组角判定两个三角形相似的定理（图 33.2-10）：

$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$

$\Downarrow$

$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

图 33.2-10

两角分别相等的两个三角形相似.

这个定理的证明方法与前面两个定理的证明方法类似. 试一试，如何完成证明.[1]

例 2 如图 33.2-11，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=10$，$AC=8$，E 是 AC 上一点，$AE=5$，$ED\perp AB$，垂足为 D. 求 AD 的长.

解：∵ $ED\perp AB$，

∴ $\angle EDA=90°$.

又 $\angle C=90°$，$\angle A=\angle A$，

∴ $\triangle AED\backsim\triangle ABC$.

∴ $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$.

∴ $AD=\dfrac{AC\cdot AE}{AB}=\dfrac{8\times5}{10}=4$.

图 33.2-11

由三角形相似的条件可知，如果两个直角三角形满足一个锐角相等，或两组直角边成比例，那么这两个直角三角形相似.

第三十三章 相似 13

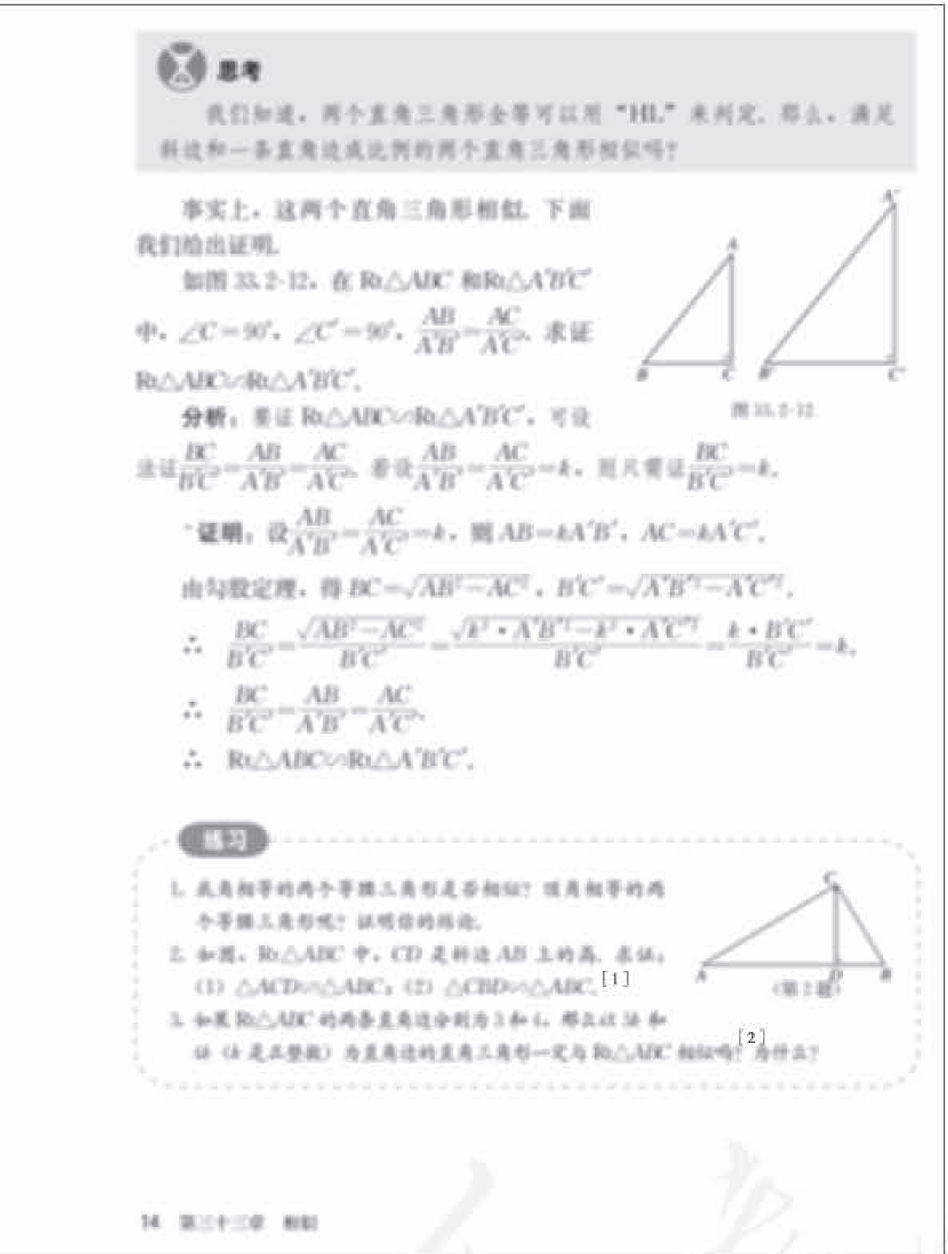
2 的边与第一个三角形长为 4，5，6 的边对应，然后由下列比例求得边长：

$$2:4=x:5=y:6,$$
$$x:4=2:5=y:6,$$
$$x:4=y:5=2:6.$$

例 2 综合应用相似三角形的判定定理和性质求线段的长，需要先根据“两角分别相等的两个三角形相似”判定两个三角形相似，再用相似三角形对应边成比例求线段长. 第 14 页“练习”的 3 道题目都是利用这三个定理判定三角形相似，其中第 1，2 题利用“两角分别相等的两个三角形相似”，第 3 题利用“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”.

教学中可以提示学生，在利用相似三角形的判定定理证明问题时，注意从多方面考虑——有没有角相等，有没有边成比例，再看怎样把已知条件用到要证的两个三角形上.

10. 在例 2 之后，教科书把任意三角形相似



思考

我们知道，两个直角三角形全等可以用"HL"来判定．那么，满足斜边和一条直角边成比例的两个直角三角形相似吗？

事实上，这两个直角三角形相似．下面我们给出证明．

如图 33.2-12，在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$ 中，$\angle C=90°$，$\angle C'=90°$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$．求证 Rt△$ABC$∽Rt△$A'B'C'$．

图 33.2-12

分析：要证 Rt△ABC∽Rt△$A'B'C'$，可设法证 $\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$．若设 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，则只需证 $\frac{BC}{B'C'}=k$．

证明：设 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，则 $AB=kA'B'$，$AC=kA'C'$．

由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$，$B'C'=\sqrt{A'B'^2-A'C'^2}$．

$\therefore\ \frac{BC}{B'C'}=\frac{\sqrt{AB^2-AC^2}}{B'C'}=\frac{\sqrt{k^2\cdot A'B'^2-k^2\cdot A'C'^2}}{B'C'}=\frac{k\cdot B'C'}{B'C'}=k$．

$\therefore\ \frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$．

$\therefore$ Rt△ABC∽Rt△$A'B'C'$．

练习

1. 底角相等的两个等腰三角形是否相似？顶角相等的两个等腰三角形呢？证明你的结论．
2. 如图，Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的高．求证：(1) △ACD∽△ABC；(2) △CBD∽△ABC．[1]
3. 如果 Rt△ABC 的两条直角边分别为 3 和 4，那么以 $3k$ 和 $4k$（k 是正整数）为直角边的直角三角形一定与 Rt△ABC 相似吗？[2] 为什么？

（第 2 题）

14 第三十三章 相似

[1] 这道题说明直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形和原三角形都相似．

[2] 这道题说明以勾股数组（$3k$，$4k$，$5k$）（k 为正整数）为边的直角三角形都是相似的．

练习答案

1. 底角相等的两个等腰三角形相似，顶角相等的两个等腰三角形也是相似的．可以证明它们都有两个角分别相等．
2. 可以证明它们都有两个角分别相等．
3. 相似．因为两边成比例，比值为 k，且夹角相等．

的判定定理应用到直角三角形上，得到了判定直角三角形相似的两种特殊方法：一个锐角相等的两个直角三角形相似，两组直角边成比例的两个直角三角形相似．

接下来，教科书类比判定两个直角三角形全等的"HL"方法，提出并证明了判定两个直角三角形相似的特殊方法——如果两个直角三角形的斜边和一条直角边成比例，那么这两个直角三角形相似．这个定理除了可以通过类似于证明前面三个判定定理的方法证明，还可以通过代数计算的方法，利用勾股定理证明．为了简化计算，教科书令两个直角三角形中斜边（或已知直角边）的比为一个定值，那么只需证明另一条直角边的比也等于这个值就可以了．

11. 平面图形的性质讨论的是平面图形中的几何量之间的关系，在第 33.2.2 节中，教科书介绍了相似三角形的一些性质．为了让学生在学习本部分前对要研究的主要内容做到心中有数，

[1] 相似三角形周长的比等于相似比. 这是因为若 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，则 $AB=kA'B'$，$BC=kB'C'$，$CA=kC'A'$，从而

$$\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\frac{kA'B'+kB'C'+kC'A'}{A'B'+B'C'+C'A'}=k.$$

33.2.2 相似三角形的性质

思考

三角形中有各种各样的几何量，例如三条边的长度，三个内角的度数，高、中线、角平分线的长度，以及周长、面积等. 如果两个三角形相似，那么它们的这些几何量之间有什么关系呢？

根据三角形相似的定义可知，相似三角形的对应角相等，对应边成比例. 下面，我们研究相似三角形的其他几何量之间的关系.

探究

如图 33.2-13，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，它们对应高、对应中线、对应角平分线的比各是多少？

如图 33.2-13，分别作 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应高 AD 和 $A'D'$.

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

∴ $\angle B=\angle B'$.

又 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 都是直角三角形，

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

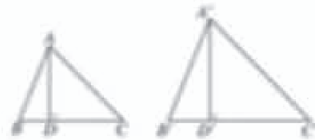


图 33.2-13

类似地，可以证明相似三角形对应中线的比、对应角平分线的比也等于 k.

这样，我们得到：

相似三角形对应高的比，对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比.

一般地，我们有：

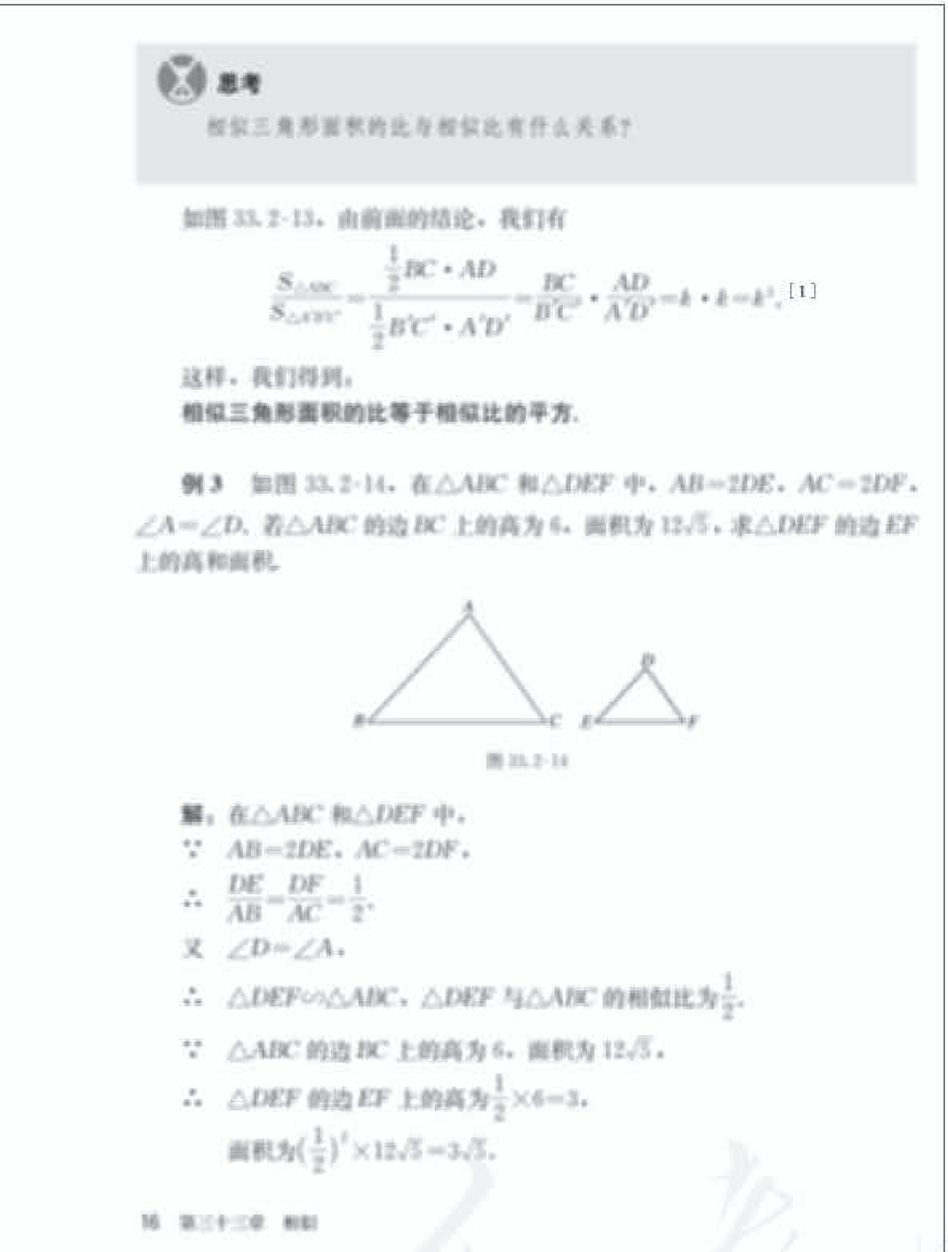
相似三角形对应线段的比等于相似比.

相似三角形的周长有什么关系？[1]

第三十三章 相似 15

教科书设置了一个“思考”栏目，指出本节要研究的是当两个三角形相似时，三角形中各种各样的几何量（包括三条边的长度，三个内角的度数，高、中线、角平分线的长度，周长、面积等）之间的关系，并且让学生思考，这些几何量之间可能存在什么关系.

12. 由于在第 33.1 节已经由相似多边形的定义推出了对应角相等，对应边成比例的性质，教科书在本小节研究的是相似三角形除对应角、对应边外的几何量之间的关系. 首先，教科书在“探究”栏目中让学生探究相似三角形的对应高、对应中线和对应角平分线的比与相似比之间的关系. 接下来，教科书以对应高为例进行了证明，并得出了“相似三角形对应高的比，对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比”的结论，并将这个结论推广到“相似三角形对应线段的比等于相似比”. 最后，教科书探讨了相似三角形面积的比与相似比的关系，并用代数计算方法证



思考

相似三角形面积的比与相似比有什么关系?

如图 33.2-13，由前面的结论，我们有

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AD}{A'D'}=k\cdot k=k^2.$$[1]

这样，我们得到：

相似三角形面积的比等于相似比的平方.

例 3 如图 33.2-14，在△ABC 和△DEF 中，AB=2DE，AC=2DF，∠A=∠D. 若△ABC 的边 BC 上的高为 6，面积为 $12\sqrt{5}$，求△DEF 的边 EF 上的高和面积.

图 33.2-14

解： 在△ABC 和△DEF 中，

∵ AB=2DE，AC=2DF，

∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}=\frac{1}{2}$.

又 ∠D=∠A，

∴ △DEF∽△ABC，△DEF 与△ABC 的相似比为 $\frac{1}{2}$.

∵ △ABC 的边 BC 上的高为 6，面积为 $12\sqrt{5}$，

∴ △DEF 的边 EF 上的高为 $\frac{1}{2}\times 6=3$，

面积为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 12\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

16 第三十三章 相似

[1] 这个推导过程说明几何命题可以用代数计算方法证明.

明了相似三角形面积的比等于相似比的平方.

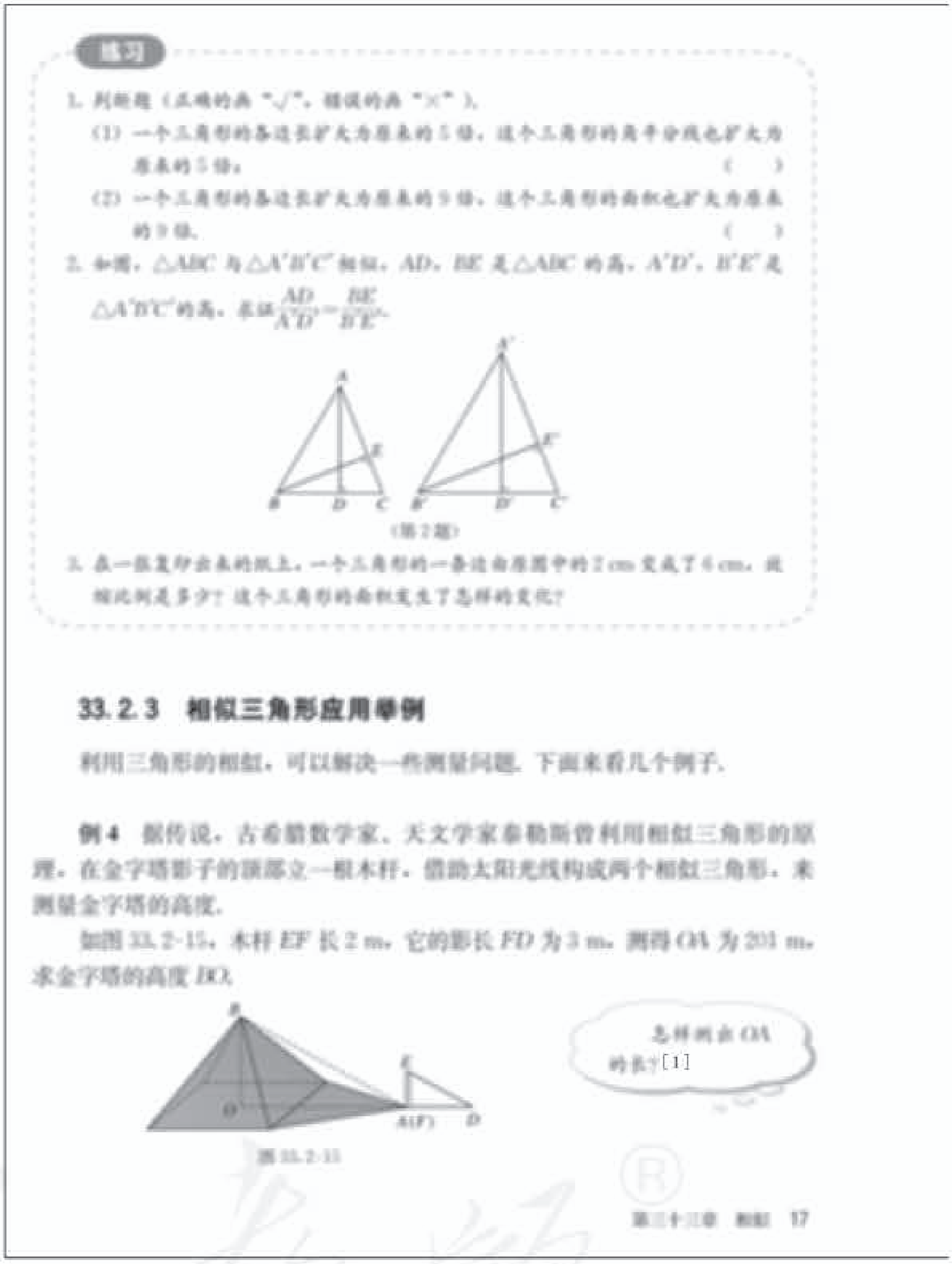
13. 在“全等三角形”一章，学生知道了当遇到证明线段相等或角相等的问题时，可以尝试先判定两个三角形全等，再利用对应边相等或对应角相等来解决问题. 类似地，当遇到证明线段成比例或角相等，或求三角形中的未知几何量的问题，也可以尝试先判定两个三角形相似，再利用相似三角形的性质求解. 本小节例 3 安排了一道求三角形的高和面积的问题，可以先证明两个三角形相似，并求出相似比，然后利用性质，由一个三角形的高和面积求得另一个三角形的高和面积.

14. 本小节安排了 3 道题目，其中第 1，3 题融入了三角形的放大过程，需要学生先根据三角形的边的扩大情况来确定相似三角形的相似比，再根据相似三角形的性质确定三角形其他几何量的变化情况. 第 2 题求证相似三角形的两条对应高成比例. 学生可以直接利用相似三角形的

练习答案

1. (1) √；(2) ×.
2. 利用相似三角形对应线段的比等于相似比，即可得对应高成比例.
3. 放缩比例是 300%，面积扩大为原来的 9 倍.

[1] 金字塔的影子可以看成一个等腰三角形，则 OA 等于这个等腰三角形的高与金字塔的边长一半的和.



练习

1. 判断题（正确的画“√”，错误的画“×”）.
(1) 一个三角形的各边长扩大为原来的 5 倍，这个三角形的角平分线也扩大为原来的 5 倍. (　　)
(2) 一个三角形的各边长扩大为原来的 9 倍，这个三角形的面积也扩大为原来的 9 倍. (　　)
2. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，AD，BE 是 $\triangle ABC$ 的高，$A'D'$，$B'E'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的高，求证 $\frac{AD}{A'D'}=\frac{BE}{B'E'}$.

（第 2 题）

3. 在一张复印出来的纸上，一个三角形的一条边由原图中的 2 cm 变成了 6 cm，放缩比例是多少？这个三角形的面积发生了怎样的变化？

33.2.3 相似三角形应用举例

利用三角形的相似，可以解决一些测量问题. 下面来看几个例子.

例 4 据传说，古希腊数学家、天文学家泰勒斯曾利用相似三角形的原理，在金字塔影子的顶部立一根木杆，借助太阳光线构成两个相似三角形，来测量金字塔的高度.

如图 33.2-15，木杆 EF 长 2 m，它的影长 FD 为 3 m，测得 OA 为 201 m，求金字塔的高度 BO.

图 33.2-15

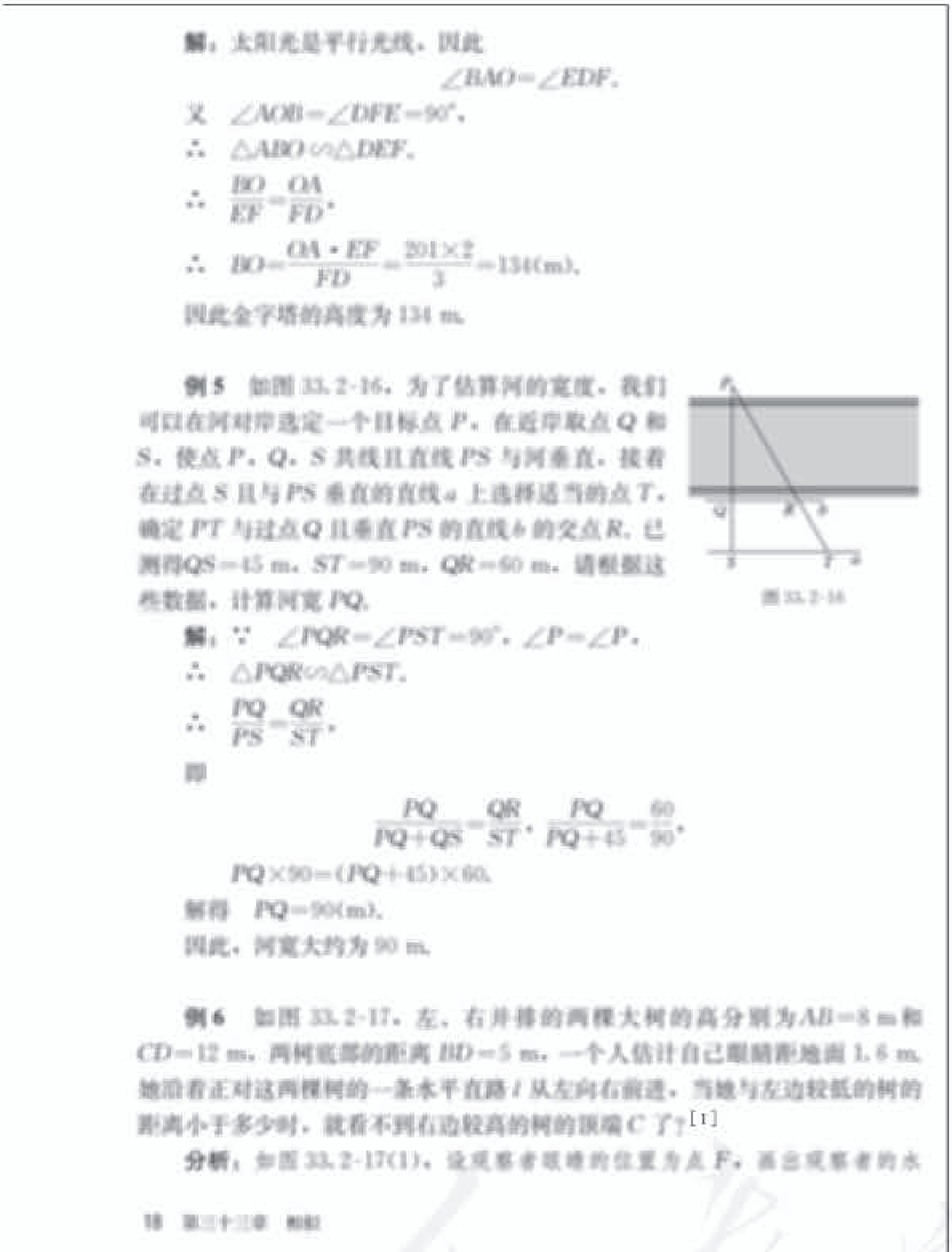
第三十三章　相似　17

性质——相似三角形对应高的比等于相似比，由代数推导得到结论.

15. “33.2.3 相似三角形应用举例”中安排了三个求不能直接测量物体长度的实际问题. 解决问题的思路都是构造两个相似三角形，使要求长度的线段成为其中一个三角形的一条边，使其他的边是可测量的.

16. 例 4 是测量金字塔高度的问题. 这种方法相传是古希腊数学家、天文学家泰勒斯的做法. 有记载称泰勒斯在人身和影子等长的时候去量金字塔的影子，也有记载称他利用例 4 所述立标杆的方法进行测量. 前者避免了比例计算，后者则不受时间的限制. 无论哪种做法，都说明泰勒斯对相似三角形已有初步的认识.

利用太阳光的影子构造相似三角形，实际上是把太阳光近似看成平行光线. 这样在被测物体影子的末端立一个标杆，就可以得到两个相似三角形，分别由被测物体、它的影子、通过被测


解：太阳光是平行光线，因此

$$\angle BAO=\angle EDF.$$

又 $\angle AOB=\angle DFE=90^\circ$，

∴ $\triangle ABO\backsim\triangle DEF$.

∴ $\dfrac{BO}{EF}=\dfrac{OA}{FD}$，

∴ $BO=\dfrac{OA\cdot EF}{FD}=\dfrac{201\times 2}{3}=134(\text{m})$.

因此金字塔的高度为 134 m.

例5 如图 33.2-16，为了估算河的宽度，我们可以在河对岸选定一个目标点 P，在近岸取点 Q 和 S，使点 P，Q，S 共线且直线 PS 与河垂直，接着在过点 S 且与 PS 垂直的直线 a 上选择适当的点 T，确定 PT 与过点 Q 且垂直 PS 的直线 b 的交点 R. 已测得 $QS=45$ m，$ST=90$ m，$QR=60$ m，请根据这些数据，计算河宽 PQ.

图 33.2-16

解：∵ $\angle PQR=\angle PST=90^\circ$，$\angle P=\angle P$，

∴ $\triangle PQR\backsim\triangle PST$.

∴ $\dfrac{PQ}{PS}=\dfrac{QR}{ST}$，

即

$$\frac{PQ}{PQ+QS}=\frac{QR}{ST},\ \frac{PQ}{PQ+45}=\frac{60}{90},$$

$PQ\times 90=(PQ+45)\times 60$.

解得 $PQ=90(\text{m})$.

因此，河宽大约为 90 m.

例6 如图 33.2-17，左、右并排的两棵大树的高分别为 $AB=8$ m 和 $CD=12$ m，两树底部的距离 $BD=5$ m，一个人估计自己眼睛距地面 1.6 m. 她沿着正对这两棵树的一条水平直路 l 从左向右前进，当她与左边较低的树的距离小于多少时，就看不到右边较高的树的顶端 C 了？[1]

分析：如图 33.2-17(1)，设观察者眼睛的位置为点 F，画出观察者的水

18 第三十三章 相似

[1] 这是一个临界状态，再往前走，就看不到较高的树的顶点了.

物体顶端的太阳光线，和标杆、它的影子、通过标杆顶端的太阳光线组成. 然后利用塔高与杆高之比等于二者影长之比，就可以求得金字塔的高度. 但金字塔的底很大，底的中部不能直接到达，所以影长是难以直接测量的. 教科书利用了测量金字塔的边长和塔影构成的等腰三角形的高的方法来估算.

在没有太阳光的时候，也可以用观测的方法，或者利用镜子，这些方法在本章后面的习题和“数学活动”中还会遇到.

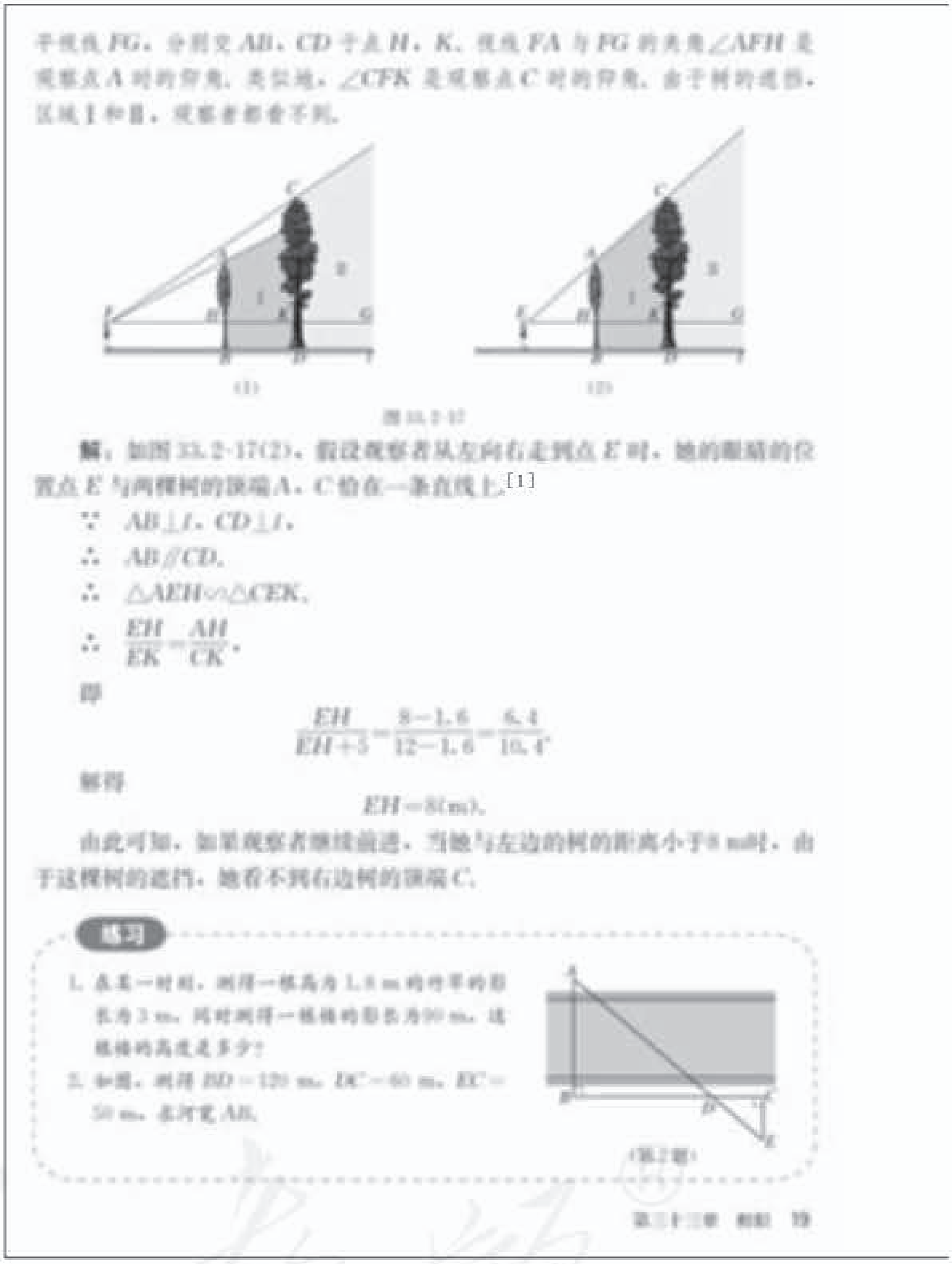
17. 例 5 是一个测量河宽的问题. 测量河宽有很多方法，学生在前面已经学过利用全等三角形来测量河宽，而利用相似测量河宽也可以有不同的方法. 教科书在接下来的练习中就介绍了另一种方法.

本例采用的测量方法是先在河两岸的近岸点各选一点，使这两点的连线与河垂直，然后将这条连线在河的一侧延长到一点，利用这条线段，

[1] 如果观察者从点 E 继续前进，由于左边树的遮挡，她就看不到右边树的顶端 C 了.

练习答案

1. 54 m.
2. 100 m.



平视线 FG，分别交 AB、CD 于点 H、K. 视线 FA 与 FG 的夹角 $\angle AFH$ 是观察点 A 时的仰角. 类似地，$\angle CFK$ 是观察点 C 时的仰角. 由于树的遮挡，区域Ⅰ和Ⅱ，观察者都看不到.

(1)　　(2)

图 33.2-17

解：如图 33.2-17(2)，假设观察者从左向右走到点 E 时，她的眼睛的位置点 E 与两棵树的顶端 A、C 恰在一条直线上.[1]

∵ $AB\perp l$，$CD\perp l$，

∴ $AB\parallel CD$.

∴ $\triangle AEH\backsim\triangle CEK$.

∴ $\dfrac{EH}{EK}=\dfrac{AH}{CK}$.

即

$$\frac{EH}{EH+5}=\frac{8-1.6}{12-1.6}=\frac{6.4}{10.4}.$$

解得

$$EH=8(\mathrm{m}).$$

由此可知，如果观察者继续前进，当她与左边的树的距离小于 8 m 时，由于这棵树的遮挡，她看不到右边树的顶端 C.

练习

1. 在某一时刻，测得一根高为 1.8 m 的竹竿的影长为 3 m，同时测得一栋楼的影长为 90 m，这栋楼的高度是多少？
2. 如图，测得 $BD=120$ m，$DC=60$ m，$EC=50$ m，求河宽 AB.

（第 2 题）

就能构造出两个共线的相似直角三角形. 利用两个三角形的两条直角边成比例就可以求得河宽.

18. 例 6 是一个视线遮挡的问题. 教科书采用的解决方案与例 4 中立标杆的方法是类似的，即把教科书图 33.2-17（2）左边的树看成标杆，右边的树看成要测量的物体，当视线同时看到两棵树的树顶时，就能构造出两个共线的相似直角三角形. 利用两个三角形的一条直角边和斜边成比例，就可以求得当前状态下观察者距离左边树的距离.

19. 本小节的“练习”安排了 2 道题目，都是求不能直接测量的物体的高度（或长度）的. 解决问题的过程都是构造（或找出）两个相似三角形，使要求长度的线段是其中一个三角形的一条边，而其他的边是已知的，然后判定两个三角形相似，最后利用相似三角形的性质求解.

习题 33.2

复习巩固

1. 有一块三角形的草地，它的一条边长为 25 m. 在图纸上，这条边的长为 5 cm，其他两条边的长都为 4 cm，求其他两边的实际长度.[1]

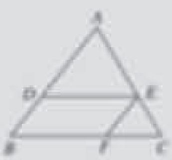
（第 1 题）

2. 根据下列条件，判断△ABC 与△A′B′C′是否相似，并说明理由：
 (1) AB=10 cm，BC=12 cm，AC=15 cm，A′B′=150 cm，B′C′=180 cm，A′C′=225 cm；
 (2) ∠A=70°，∠B=48°，∠A′=70°，∠C′=62°.
3. 如图，(1) 判断两个三角形是否相似；[2] (2) 求 x 和 y 的值.

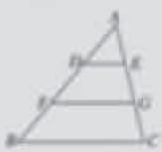
(1) (2)

（第 3 题）

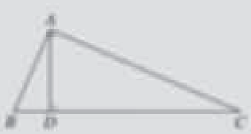
4. 如图，△ABC 中，DE∥BC，EF∥AB，求证△ADE∽△EFC.



（第 4 题）



（第 5 题）



（第 7 题）

5. 如图，△ABC 中，DE∥FG∥BC，找出图中所有的相似三角形.
6. 如果把两条直角边分别为 30 cm，40 cm 的直角三角形按相似比 $\frac{3}{5}$ 进行缩小，得到的直角三角形的两条直角边的长和面积各是多少？

20 第三十三章 相似

[1] 本题隐含的条件是三角形草地和图纸上的三角形是相似的，而且长为 25 m 的边与图纸上长为 5 cm 的边是对应边.

[2] 利用图中信息，可以计算△ABC 和△DEF 的边长分别相当于小正方形边长的多少倍.

习题 33.2

1. 本节共设置了 14 道习题. 其中，第 1～7 题是“复习巩固”层次的题目，都是围绕本节的基础知识设计的.

第 1 题直接应用相似三角形的性质，先求出相似比，再利用一个三角形的边长，求另一个三角形两边的长度.

第 2 题是直接应用已知条件判断三角形相似的问题.

第 3 题在判断三角形相似的基础上，利用相似三角形的性质求出未知的边或角.

第 4，5 题是与平行有关的相似问题，需要用到本节判定三角形相似的第一个定理.

第 6 题是应用相似三角形对应线段的比、面积的比与相似比的关系的计算题.

第 7 题需要先判断三角形相似，再利用对应边成比例求边长. 这些题目难度都不大，应让学

[1] 按照光的反射定律，入射角等于反射角，所以$\angle LMK=\angle SMT$.

[2] 证明矩形相似需要证明它们的所有角分别相等，边成比例.

生掌握.

2. “综合运用”共安排了 5 道题目，其中有的是运用本节的知识解决一些实际问题，有的要解决一些数学问题.

第 8 题涉及一个利用相似三角形制作的画图工具，让学生应用相似三角形的判定和性质解释它的工作原理.

第 9，10 题与本节例 4 类似，也是利用相似三角形测量物体高度的问题.

第 11 题需要利用相似三角形的性质证明相似三角形在运动中一直保持对应角相等、对应边成比例，即一直保持相似，从而证明由两对相似三角形构成的四边形也在运动中保持相似.

第 12 题是一个反向思考的问题，需要学生根据面积比确定相似比，即对应边的比.

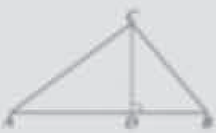
3. “拓广探索”有 2 道题目.

第 13 题要用到相似三角形的判定和性质.

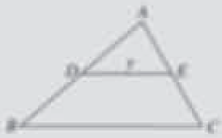
第 14 题要先判断两个三角形相似，再利用

拓广探索

13. 如图，$\triangle ABC$ 中，CD 是边 AB 上的高，且 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$，求 $\angle ACB$ 的大小.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=6$，$BC=9$. 如果动点 D 以每秒 2 个单位长度的速度，从点 B 出发沿边 BA 向点 A 运动，此时直线 $DE \parallel BC$，交 AC 于点 E. 记 x 秒时 DE 的长度为 y，写出 y 关于 x 的函数解析式，[1] 并画出它的图象.

22 第二十三章 相似

［1］可以提示学生：从运动过程来看，随着 BD 长度的变化，DE 的长度相应地变化. 相似三角形对应边成比例建立 x 和 y 之间的函数关系式.

[1] 每一部分经过放大与它整体形状相似.


观察与猜想

奇妙的分形图形

下面是两幅奇妙的图形，你能发现它们有什么共同的特点吗？[1]

图1　　图2

图1叫做谢尔宾斯基地毯，它最早是由波兰数学家谢尔宾斯基这样制作出来的：把一个正三角形分为全等的4个小正三角形，挖去中间的一个小三角形；对剩下的3个小正三角形再分别重复以上做法——将这种做法继续进行下去，就能得到小格子越来越多的谢尔宾斯基地毯（图3）．这种图形中大大小小的三角形之间有什么关系？

图3

图2叫做雪花曲线，它可以从一个等边三角形开始画：把一个等边三角形的每边分成相同的三段，再在每边中间一段上向外画出一个等边三角形，这样一来就做成了一个六角星，然后在六角星的各边上用同样的方法向外画出更小的等边三角形，出现了一个有18个尖角的图形．如此继续下去，就能得到分支越来越多的曲线（图4）．继续重复上面的过程，图形的外边界逐渐变得越来越曲折、越来越长，图案变得越来越细致、越来越复杂，越来越像雪花，越来越美丽了．这种图形的产生过程中大大小小的三角形之间有什么关系？

图4

猜想：上面这样的图形中，存在多种相似关系，例如其中大大小小的三角形是相

第二十七章　相似　23

观察与猜想

1. 自然界中存在许多自相似的现象，如教科书介绍的雪花曲线，还有树木的枝干呈现的造型、土地干旱形成的裂纹图案等. 现代数学中已经有了一个专门的数学分支来研究像雪花曲线这样的自相似图形，这就是 20 世纪 70 年代由美国计算机专家曼德布罗特创立的分形几何.

1967 年，曼德布罗特在美国《科学》杂志发表了题为“英国的海岸线有多长”的论文，指明海岸线在形貌上是自相似的，也就是局部形态和整体形态的相似，他把这种部分与整体以某种方式相似的形体称为分形. 在此基础上，研究分形性质及其应用的分形理论逐渐形成了.

2. 自相似原则和迭代生成原则是分形理论的重要原则. 分形形体中的自相似性可以是完全相同，也可以是统计意义上的相似. 标准的自相似是数学意义上的，如教科书中的雪花曲线、谢

似的.

事实上，上面的图形中都存在自相似性，即图形的局部与它的整体具有一定程度的相似关系，这样的图形叫做分形图形。分形图形具有奇特的性质，例如，如果把上面得到雪花曲线的做法无限地继续下去，雪花曲线的周长可以无限长，但它却可以画在一个小小的格子中；它的尖端可以无限多，无数个尖尖布满了整个曲线，但它们彼此却不会相交。从20世纪70年代起，一个新兴的数学分支——分形几何逐步形成[1]，它的研究对象就是具有自相似性的图形。

再看一个分形图形的例子，画一个大的正五边形，接着画出内嵌的5个小正五边形（如果算上中间的一个小正五边形，则正好是6个）；在每个小正五边形内再画出5个更小的正五边形（图5）；继续下去，不断重复此过程，就可以得到有无穷自相似结构的分形图形（图6）。你愿意试着画画吗？[2]

图5　　　　图6

24 第三十三章 相似

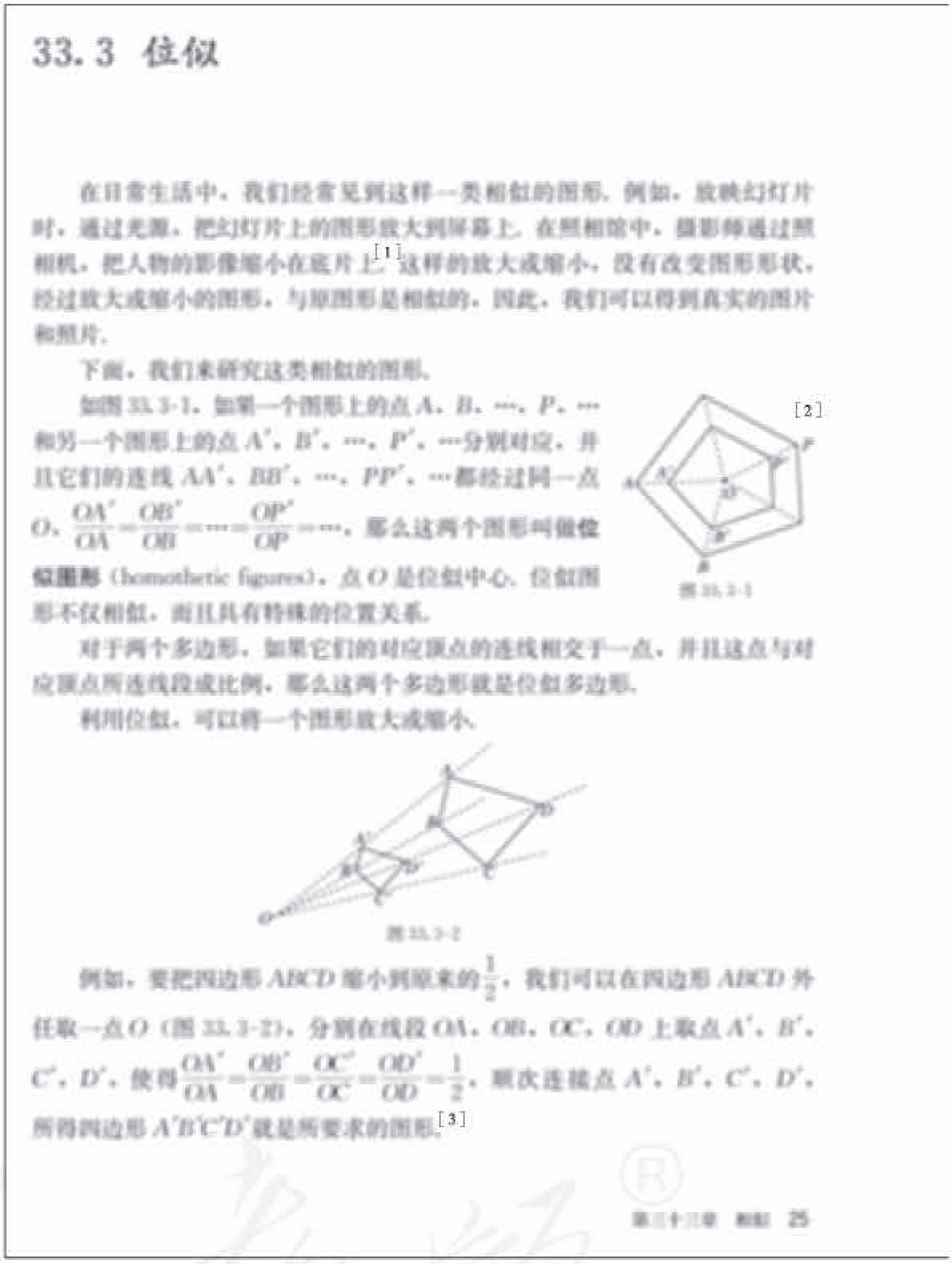
[1] 教科书介绍的雪花曲线、谢尔宾斯基地毯都是规则的分形图形，绝大部分分形是统计意义上的无规则分布.

[2] 有些计算机软件具有迭代功能，利用它们，可以画出奇妙的分形图形，有条件的可以试一试.

尔宾斯基地毯、正五边形的分形等. 大多数的分形存在于自然界中，是统计意义上的自相似.

分形自诞生之日起，就与艺术紧密相关. 分形图中可以体现许多传统的美学标准，如平衡、和谐、对称等. 分形艺术不模仿任何自然对象，但在现实中却能找到它的影子，如树木、叶子、山峦、雪花等. 分形图形中蕴含着无穷的嵌套结构，对分形的画面带来了极大的丰富性——它总是有无穷的重复，每一个局部都有更多的变化在进行.

3. 分形艺术也是计算机图形艺术的一种. 利用计算机的迭代功能，可以由计算机程序生成分形图形. 许多美妙的分形图形都是由最简单的几何图形进行各种变换、迭代产生的. 教学中可以让学生尝试利用一些简单的几何图形，按照某种规则画出一些分形图形，体会其中的美妙.



33.3 位似

在日常生活中，我们经常见到这样一类相似的图形．例如，放映幻灯片时，通过光源，把幻灯片上的图形放大到屏幕上．在照相馆中，摄影师通过照相机，把人物的影像缩小在底片上．[1] 这样的放大或缩小，没有改变图形形状，经过放大或缩小的图形，与原图形是相似的．因此，我们可以得到真实的图片和照片．

下面，我们来研究这类相似的图形．

如图 33.3-1，如果一个图形上的点 A，B，…，P，…和另一个图形上的点 A'，B'，…，P'，…分别对应，并且它们的连线 AA'，BB'，…，PP'，…都经过同一点 O，$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\cdots=\frac{OP'}{OP}=\cdots$，那么这两个图形叫做**位似图形**（homothetic figures），点 O 是位似中心．位似图形不仅相似，而且具有特殊的位置关系．

[2]

图 33.3-1

对于两个多边形，如果它们的对应顶点的连线相交于一点，并且这点与对应顶点所连线段成比例，那么这两个多边形就是位似多边形．

利用位似，可以将一个图形放大或缩小．

图 33.3-2

例如，要把四边形 $ABCD$ 缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，我们可以在四边形 $ABCD$ 外任取一点 O（图 33.3-2），分别在线段 OA，OB，OC，OD 上取点 A'，B'，C'，D'，使得 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$，顺次连接点 A'，B'，C'，D'，所得四边形 $A'B'C'D'$ 就是所要求的图形．[3]

第二十三章　相似　25

[1] 教学中可以通过展示图片让学生了解幻灯机和照相机保持图形形状不变，物、像上对应点连线交于一点的成像特点，而且只要学生能感受到这个特点就可以了，不要求他们精确描述．

[2] 对于位似图形，有外位似和内位似之分．外位似的位似中心在连接两个图形上对应点的线段之外；内位似的位似中心在连接两个图形上对应点的线段上．测量中常用的是外位似．

[3] 对于位似图形的画法，学生会画就可以了，不要求学生证明．

1. 本章最后，教科书介绍了一种具有特殊位置关系的相似图形——位似图形．本节主要内容是让学生了解位似图形，学会利用位似将一个图形按一定比例放大或缩小，以及在平面直角坐标系中用两个图形坐标之间的关系表示位似．

2. 与引入相似图形的方式类似，教科书首先从实际生活中具有位似特征的现象谈起．学生凭借物理学习的经验，能够感受到无论是幻灯机成像，还是照相机成像，都没有改变图形的形状，而且物、像上对应点连线交于一点．接下来，教科书把研究对象定位为平面上的多边形，给出位似图形的概念．只要对应点连线相交于一点，并且这点与对应点所连线段成比例，这两个图形就是位似图形．

3. 在实际生活中，有时需要放大或缩小一个图形，所以学会按要求把图形放大或缩小的方法，具有一定的实际意义．因此，教科书接下来

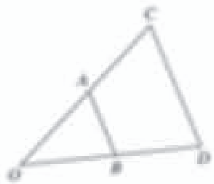
探究

如果在四边形 $ABCD$ 外任取一点 O，分别在 OA，OB，OC，OD 的反向延长线上取点 A'，B'，C'，D'，使得 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$，四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 有什么关系？如果点 O 取在四边形 $ABCD$ 内部呢？

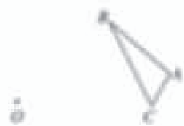
分别画出得到的四边形 $A'B'C'D'$.

练习

1. 如图，$\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 是位似图形，AB 与 CD 平行吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 放大为原来的 3 倍.

我们知道，在直角坐标系中，可以利用变化前后两个多边形对应顶点的坐标之间的关系表示某些平移、轴对称和旋转（中心对称）. 类似地，位似也可以用两个图形坐标之间的关系来表示.

探究

如图 33.3-3(1)，在直角坐标系中，有两点 $A(6,3)$，$B(6,0)$. 以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{3}$，把线段 AB 缩小，观察对应点之间坐标的变化，你有什么发现？

26 第三十三章 相似

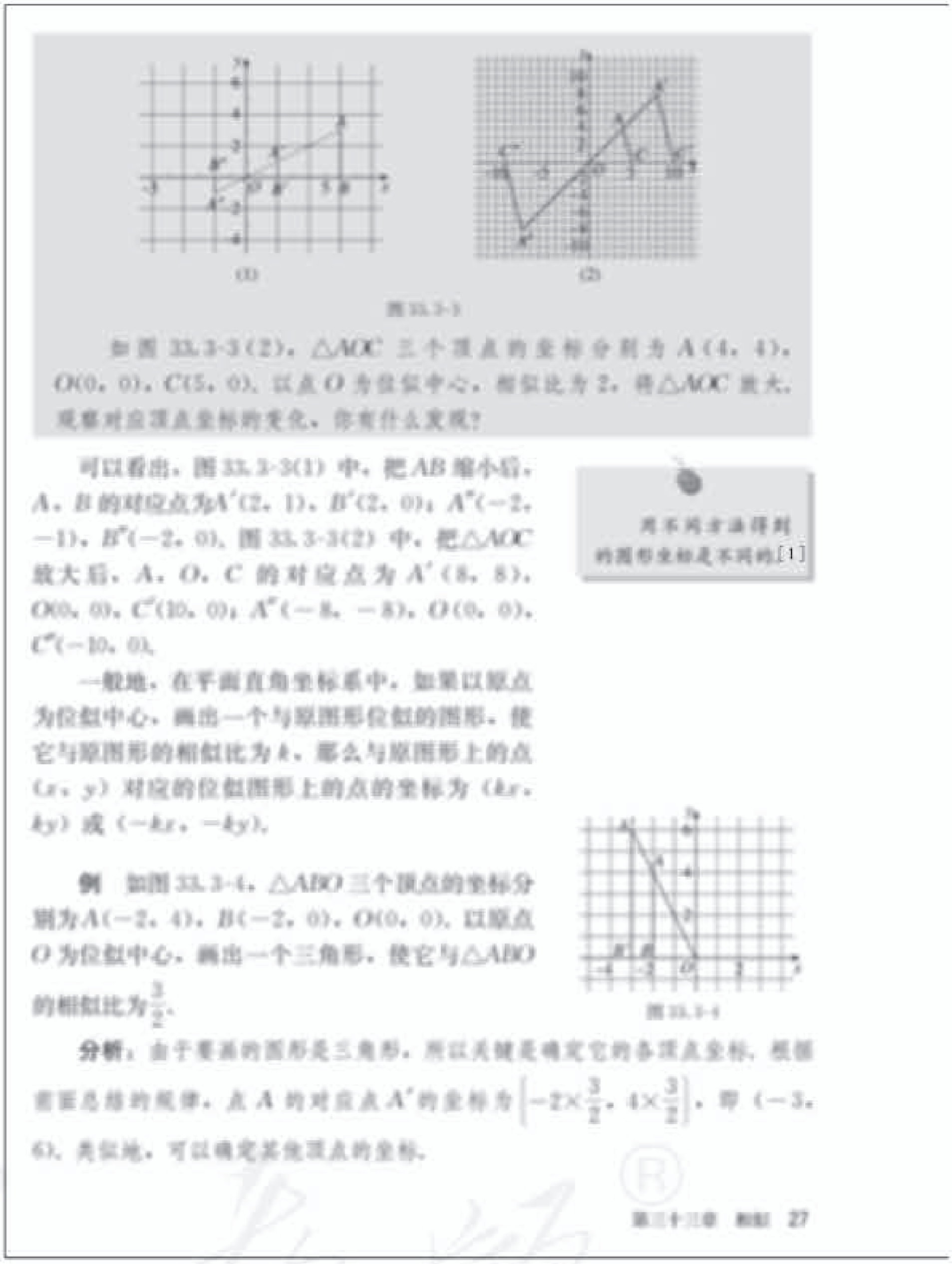
以把一个四边形缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 的过程为例，介绍了利用位似将一个图形放大或缩小的方法.

利用位似将图形放大或缩小时，位似中心的选择可以有很多种，教科书正文是在位似中心和已知四边形的中间作新图形的. 实际上，新图形和已知图形也可以在位似中心的两侧，也可以在已知图形的内部. 教科书在接下来的“探究”栏目中让学生自己画出这两种情形的位似图形，以便学生更好地理解位似变换.

4. 在这部分内容之后，教科书安排了 2 道练习题. 第 1 题让学生明确位似图形是相似图形，从而具有相似图形的性质；第 2 题让学生练习用位似放缩图形的画法.

5. 接下来，教科书研究了平面直角坐标系中两个位似图形的坐标之间的关系. 由于一般的位似变换在平面直角坐标系中的描述比较复杂，教科书重点研究了以原点为位似中心，将有一个

[1] 在平面直角坐标系中，以原点为位似中心，将一个图形按照相似比 k 放大或缩小，有两种方法：一种得到的新图形与原图形在原点的同侧，这时新旧图形上对应点的坐标比为 k；另一种得到的新图形与原图形在原点的两侧，这时新旧图形上对应点的坐标比为 $-k$.



(1)　(2)

图 33.3-3

如图 33.3-3(2)，$\triangle AOC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(4, 4)$，$O(0, 0)$，$C(5, 0)$，以点 O 为位似中心，相似比为 2，将 $\triangle AOC$ 放大，观察对应顶点坐标的变化，你有什么发现？

可以看出，图 33.3-3(1) 中，把 AB 缩小后，A，B 的对应点为 $A'(2, 1)$，$B'(2, 0)$；$A''(-2, -1)$，$B''(-2, 0)$. 图 33.3-3(2) 中，把 $\triangle AOC$ 放大后，A，O，C 的对应点为 $A'(8, 8)$，$O(0, 0)$，$C'(10, 0)$；$A''(-8, -8)$，$O(0, 0)$，$C''(-10, 0)$.

用不同方法得到的图形坐标是不同的[1]

一般地，在平面直角坐标系中，如果以原点为位似中心，画出一个与原图形位似的图形，使它与原图形的相似比为 k，那么与原图形上的点 (x, y) 对应的位似图形上的点的坐标为 (kx, ky) 或 $(-kx, -ky)$.

例 如图 33.3-4，$\triangle ABO$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-2, 4)$，$B(-2, 0)$，$O(0, 0)$，以原点 O 为位似中心，画出一个三角形，使它与 $\triangle ABO$ 的相似比为 $\frac{3}{2}$.

图 33.3-4

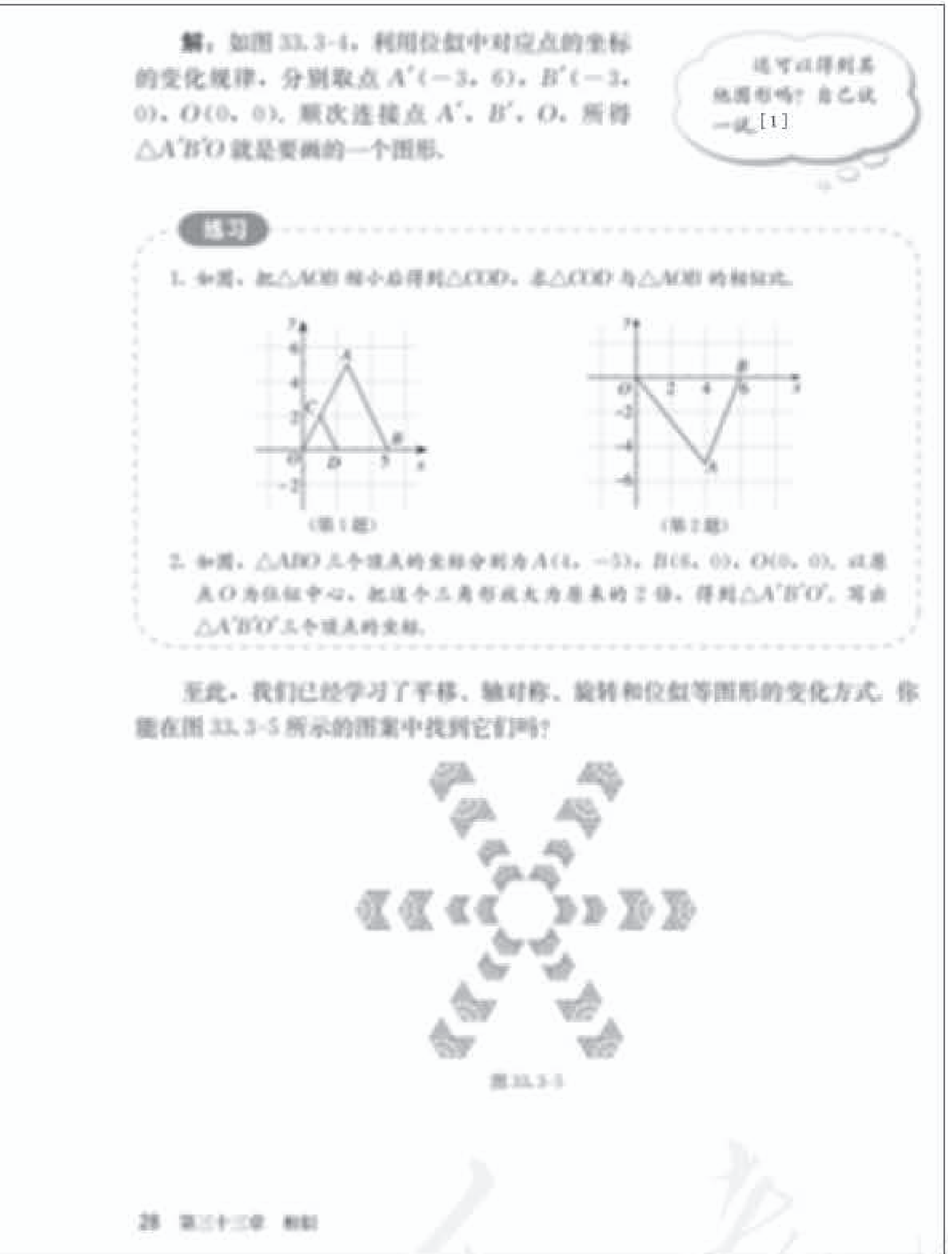
分析： 由于要画的图形是三角形，所以关键是确定它的各顶点坐标. 根据前面总结的规律，点 A 的对应点 A' 的坐标为 $\left(-2\times\frac{3}{2}, 4\times\frac{3}{2}\right)$，即 $(-3, 6)$. 类似地，可以确定其他顶点的坐标.

第三十三章 相似 27

顶点在原点、有一条边在横坐标轴上的多边形放大或缩小的情况. 同时，对于这个问题，教科书重点研究了两方面：一是两个位似图形坐标之间的关系，二是在平面直角坐标系中画出一个图形按一定比例放缩后的图形. 显然，第一方面是第二方面的基础.

对于两个位似图形坐标之间的关系，教科书设置了一个“探究”栏目，分别以线段和三角形为例，探究了以原点为位似中心，把它们放大或缩小一定比例后，与原图形上的点 (x, y) 对应的新图形上的点的坐标是什么. 然后，教科书把这种规律进行了推广，得到了一般情况下，在平面直角坐标系中以原点为位似中心，把一个图形放大或缩小 k 倍时，新旧图形上对应点的坐标之间的关系.

对于在平面直角坐标系中画出一个图形按一定比例放缩后的图形，教科书以一个顶点在原点、一条边在 x 轴上的三角形的放大过程为例说



解：如图 33.3-4，利用位似中对应点的坐标的变化规律，分别取点 $A'(-3,\ 6)$，$B'(-3,\ 0)$，$O(0,\ 0)$，顺次连接点 A'，B'，O，所得 $\triangle A'B'O$ 就是要画的一个图形.

还可以得到其他图形吗？自己试一试.[1]

练习

1. 如图，把 $\triangle AOB$ 缩小后得到 $\triangle COD$，求 $\triangle COD$ 与 $\triangle AOB$ 的相似比.

(第 1 题)　　(第 2 题)

2. 如图，$\triangle ABO$ 三个顶点的坐标分别为 $A(4,\ -5)$，$B(6,\ 0)$，$O(0,\ 0)$，以原点 O 为位似中心，把这个三角形放大为原来的 2 倍，得到 $\triangle A'B'O'$，写出 $\triangle A'B'O'$ 三个顶点的坐标.

至此，我们已经学习了平移、轴对称、旋转和位似等图形的变化方式. 你能在图 33.3-5 所示的图案中找到它们吗？

图 33.3-5

28 第三十三章 相似

［1］放大后的三角形还有可能在第四象限，这时新三角形的顶点坐标分别为 $(3,\ -6)$，$(3,\ 0)$ 和 $(0,\ 0)$.

明画图方法. 事实上，只要根据前面得到的位似变换前后图形对应点坐标之间的关系，就能由原图形顶点的坐标和相似比，得到新图形对应顶点的坐标. 然后，在平面直角坐标系中描出这些点，并连接起来，就得到了新的图形.

6. 在这之后，教科书安排了 2 道练习题. 第 1 题让学生根据位似图形对应点坐标之间的关系写出相似比；第 2 题让学生根据原图形顶点的坐标和放大倍数，写出新图形顶点的坐标.

7. 至此，学生已经学习了四种变换：平移、轴对称、旋转和位似，教科书安排了一个包含四种变换的图案（教科书图 33.3-5），让学生从图中找到这四种变换. 这个活动的设计意图是：让学生在应用中复习四种变换的概念. 教学中，也可以帮助学生总结一下这四种变换的特点，例如平移、轴对称和旋转都是全等变换，变换前后的图形是全等形，而位似变换前后得到的图形一般不是全等的，是相似的.

[1] [2] 第 2，3 题实际上有两种答案，这里只要求学生回答出其中一种.

习题 33.3

复习巩固

1. 如图，如果虚线图形与实线图形是位似图形，求它们的相似比并找出位似中心.

（第 1 题）

2. 如图，以点 P 为位似中心，将五角星的边长缩小为原来的 $\frac{1}{2}$.[1]

（第 2 题）

3. $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(2,\ 2)$，$B(4,\ 2)$，$C(6,\ 4)$，以原点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小得到 $\triangle DEF$，使 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 对应边的比为 $1:2$，这时 $\triangle DEF$ 各个顶点的坐标分别是多少？[2]

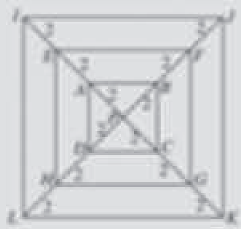
综合运用

4. 如图，正方形 $EFGH$，$IJKL$ 都是正方形 $ABCD$ 的位似图形，点 P 是位似中心.

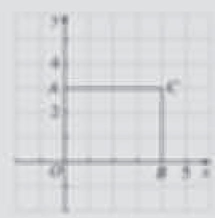
（1）哪个图形与正方形 $ABCD$ 的相似比为 3？

（2）正方形 $IJKL$ 是正方形 $EFGH$ 的位似图形吗？如果是，求相似比.

（3）正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的相似比是多少？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，矩形 $AOBC$ 各点的坐标分别为 $A(0,\ 3)$，$O(0,\ 0)$，$B(4,\ 0)$，$C(4,\ 3)$，以原点 O 为位似中心，将这个矩形缩小为原来的 $\frac{1}{2}$，写出新矩形各顶点的坐标.

第三十三章 相似 29

习题 33.3

1. 习题 33.3 共安排了 7 道习题. 其中“复习巩固”的 3 道题目都是围绕本节的基础内容设计的，即位似图形的概念、利用位似放大或缩小一个图形的画法和平面直角坐标系中两个位似图形的坐标之间的关系.

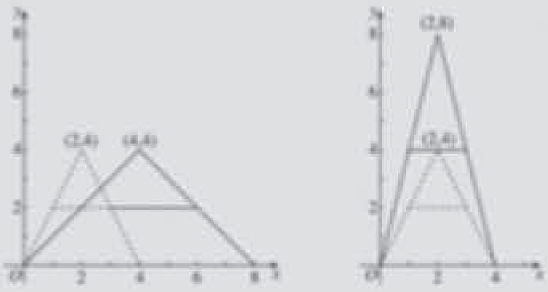
2. “综合运用”的 3 道题也是围绕本节的基础知识设计的，只是难度上稍有提高.

第 4 题中的图形是由三个共心（正方形的中心）的正方形组成的，要求学生判断其中某两个正方形之间的关系，或者根据对角线的长度，求它们的相似比.

第 5 题是应用平面直角坐标系中位似变换前后图形坐标变化规律的题目，只不过对象由三角形变成了矩形.

第 6 题图中的“A”字图案发生的变化不是全等变换，也不是相似变换，而是一种伸缩变换.

6. 如图，图中的图案与“A”字图案（虚线图案）相比，发生了什么变化？[1] 对应点的坐标之间有什么关系？

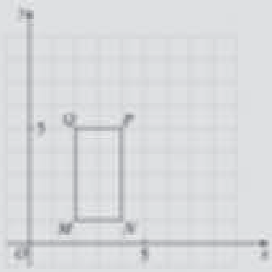


（1）　　　　（2）

（第6题）

拓广探索

7. 如图，以点Q为位似中心，画出与矩形MNPQ的相似比为0.75的一个图形.[2]



（第7题）

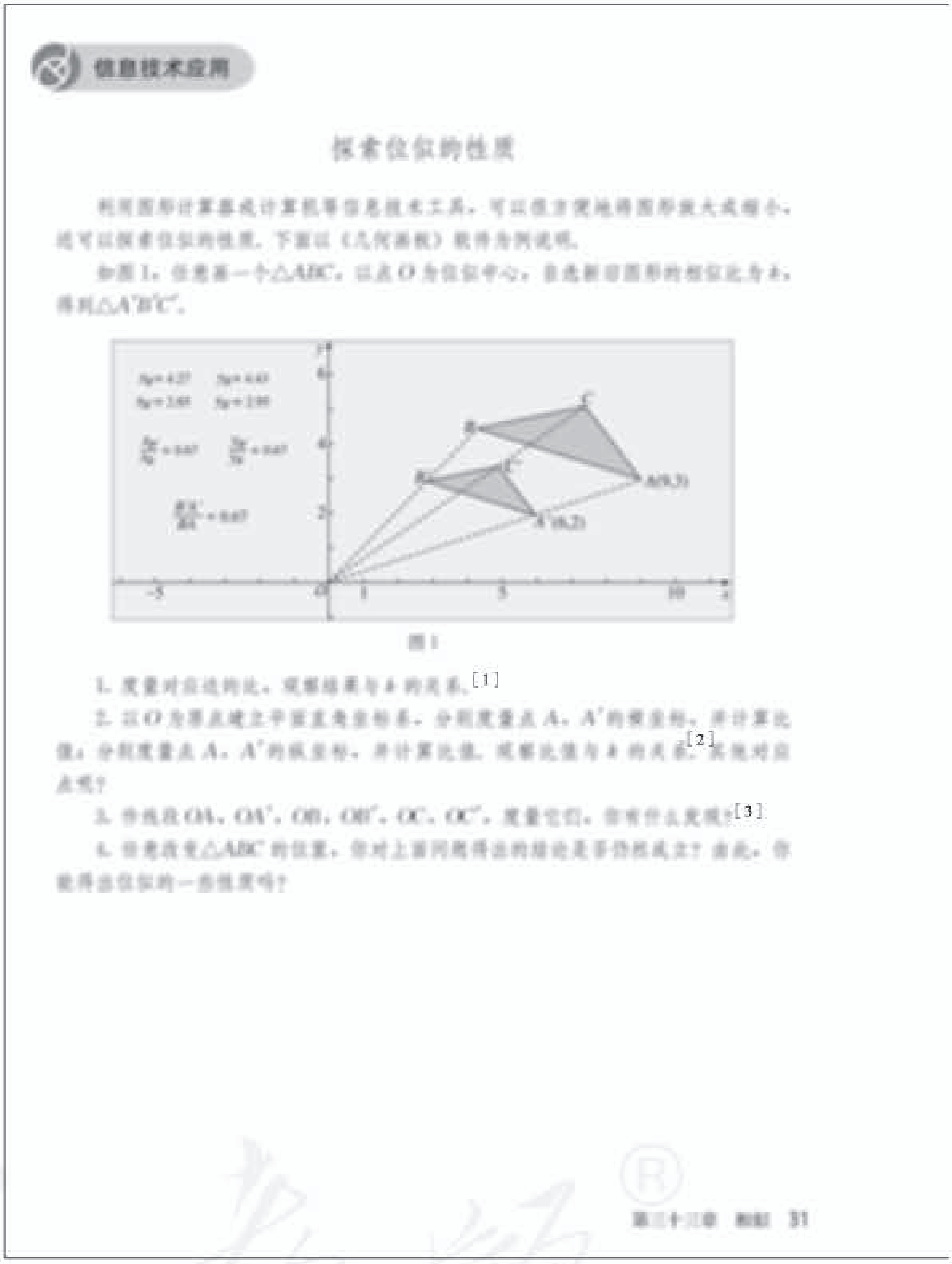
30 第二十三章 相似

[1] 这里的变化是要求学生回答图形在形状上发生了什么改变，例如“变胖了”“长高了”.

[2] 本题有两种答案，只要学生能回答出其中一种即可.

变换前后图形上点的一个坐标保持不变，另一个坐标放大或缩小. 本题的设计意图是，让学生在探究位似图形坐标变化规律的基础上，探究其他变换前后图形的坐标变化规律.

3. “拓广探索”设置了1道画图题，其中的位似中心不在原点处，不能利用本节的位似图形的坐标变化规律，只能利用位似图形的画法作图.



信息技术应用

探索位似的性质

利用图形计算器或计算机等信息技术工具，可以很方便地将图形放大或缩小，还可以探索位似的性质．下面以《几何画板》软件为例说明．

如图1，任意画一个△ABC，以点O为位似中心，自选新旧图形的相似比为k，得到△A′B′C′．

图1

1. 度量对应边的比，观察结果与k的关系．[1]

2. 以O为原点建立平面直角坐标系，分别度量点A，A′的横坐标，并计算比值；分别度量点A，A′的纵坐标，并计算比值．观察比值与k的关系．[2]其他对应点呢？

3. 作线段OA，OA′，OB，OB′，OC，OC′，度量它们，你有什么发现？[3]

4. 任意改变△ABC的位置，你对上面问题得出的结论是否仍然成立？由此，你能得出位似的一些性质吗？

[1] 可以发现，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的对应边的比都等于相似比k.

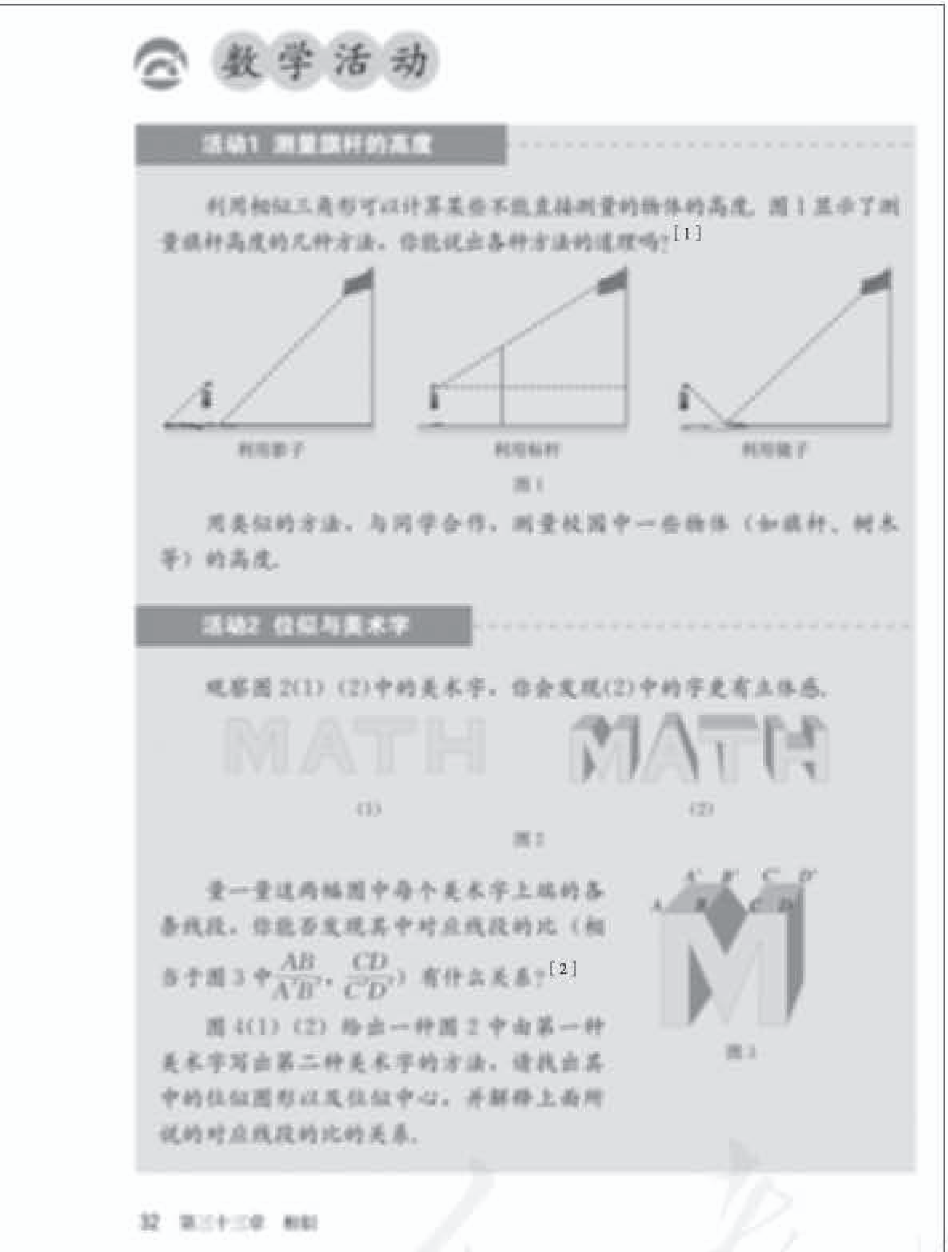
[2] 可以发现，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$上对应点的横、纵坐标的比都等于相似比k.

[3] 可以发现，$\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=k$.

信息技术应用

1. 与前面研究平移、轴对称、旋转类似，信息技术工具在位似的研究中也能发挥重要作用．为此，教科书专门安排了一个“信息技术应用”栏目，用《几何画板》软件研究平面直角坐标系中位似的性质．

2. 在《几何画板》软件中，选定某一点为位似中心、某个数值为把原图形放大或缩小的倍数，就可以得到符合要求的任意一个图形的位似图形．为了验证前面的规律，教科书首先在《几何画板》软件中任意画一个三角形，并选定原点为位似中心，任选一个新旧图形的相似比．然后，教科书提出了三个方面的验证内容：一是新旧图形对应边的比是否等于选定的相似比；二是新旧图形上对应点的横纵坐标的比是否等于选定的相似比；三是新旧图形上对应顶点与位似中心的连线的长度比是否等于选定的相似比．



数学活动

活动1 测量旗杆的高度

利用相似三角形可以计算某些不能直接测量的物体的高度. 图1显示了测量旗杆高度的几种方法. 你能说出各种方法的道理吗?[1]

利用影子　　利用标杆　　利用镜子

图1

用类似的方法，与同学合作，测量校园中一些物体（如旗杆、树木等）的高度.

活动2 位似与美术字

观察图2(1)(2)中的美术字，你会发现(2)中的字更有立体感.

(1)　　(2)

图2

量一量这两幅图中每个美术字上端的各条线段，你能否发现其中对应线段的比（相当于图3中$\frac{AB}{A'B'}$，$\frac{CD}{C'D'}$）有什么关系?[2]

图3

图4(1)(2)给出一种图2中由第一种美术字写出第二种美术字的方法. 请找出其中的位似图形以及位似中心，并解释上面所说的对应线段的比的关系.

32 第三十三章 相似

［1］要让学生回答，怎样分别利用影子、标杆和镜子构造相似三角形，求得旗杆的高度.

［2］对应线段的比相等.

教学中，可以按照教科书提出的问题，用《几何画板》软件验证所画位似图形是否具有上述三方面的性质；还可以任意改变所画图形的位置，或者所选相似比，验证所得结论是否成立；或者让学生提出其他一些位似可能有的性质，用《几何画板》软件验证.

1. “活动1”以图示给出了三种用相似三角形测量物体高度的方法——利用影子、标杆和镜子，这三种方法也是学生在前面的例、习题中遇到过的. 教学中可以让学生解释这三种方法的道理，再选定校园里的一些物体，让他们用类似的方法测量，并解释所使用方法的原理.

2. “活动2”让学生利用位似设计有立体感的美术字. 教学中可以先让学生通过测量，发现教科书图3中美术字上端对应线段比的关系. 然

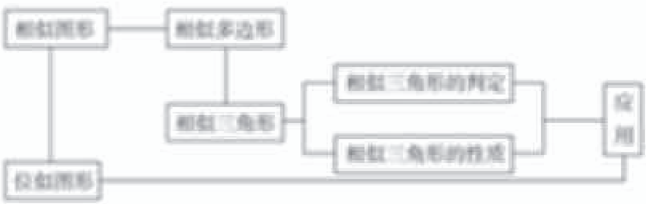
[1] 改变点 O 的位置，平行移动直线 l，可以得到不同效果的美术字.


请你利用位似写出一些立体美术字，并与同学交流.

后，在他们发现这些对应线段比相等的基础上，介绍教科书图 4 中的画法，并让学生仿照这个画法写出一些美术字.

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们先由生活实例认识了相似图形，并了解了相似多边形的特征．然后，重点研究了相似三角形的判定、性质和它在解决实际问题中的应用．最后，利用相似的知识研究了位似图形的特征．

全等形是相似比为 1 的相似图形，因此全等是特殊的相似．利用从特殊推广到一般的方法，由研究全等三角形的思路，可以提出相似三角形的问题和研究方法．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．相似三角形有哪些性质？位似图形呢？

2．三角形的相似与三角形的全等有什么关系？如何判断两个三角形相似？

3．举例说明三角形相似的一些应用．

4．如何利用位似将一个图形放大或缩小？你能说出平移、轴对称、旋转和位似之间的异同，[1]并举出一些它们的实际应用的例子吗？

34 第二十七章 相似

[1] 将一个图形经过平移、旋转后得到的图形，或者与一个图形成轴对称的图形都与原图形全等，而与原图形位似的图形一般都将原图形进行了放大或缩小．

1．“本章知识结构图”展示了本章研究对象及它们之间的关系．本章研究的是相似图形的有关知识，其中相似多边形是主要研究对象．在相似多边形中，重点研究了相似三角形的判定、性质及其应用．位似图形是作为一种特殊的相似图形来研究的．

2．在“回顾与思考”中，教科书首先总结了本章研究的主要内容，然后回顾了本章的主要研究方法——从特殊到一般的方法，最后提出了四方面的问题帮助学生复习全章内容．

[1] 由图中两个四边形的形状可以确定它们的对应边和对应角.

[2] 由两个三角形边长数值的大小可以确定它们的对应边.

[3] 本题可以有不同的方法，学生做出其中一种即可.

复习题 33

复习巩固

1. 如图，四边形 $EFGH$ 相似于四边形 $KLMN$.[1] 求 $\angle E$，$\angle G$，$\angle N$ 的度数以及 x，y，z 的值.

（第 1 题）

2. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 5，12，13，与它相似的 $\triangle DEF$ 的最小边长为 15.[2] 求 $\triangle DEF$ 的其他两条边长和周长.

3. 根据下列图中所注的条件，判断图中两个三角形是否相似，并求出 x 和 y 的值.

(1) (2)

（第 3 题）

4. 李华要在报纸上刊登广告，一块 10 cm×5 cm 的长方形版面要付 180 元的广告费. 如果他要把版面的边长扩大为原来的 3 倍，要付多少广告费（假设每平方厘米版面的广告费相同）?

5. 请把如图所示的图形缩小，使得缩小前后对应线段的比为 2∶1.[3]

（第 5 题）

综合运用

6. 某同学的座位到黑板的距离是 6 m，老师在黑板上要写多大的字，才能使这名同学看黑板上的字时，与他看相距 30 cm 的教科书上的字的感觉相同（教科书上的小四号字大小约为 0.42 cm×0.42 cm）?

7. 如图，已知零件的外径为 a，现用一个交叉卡钳（两条尺长 AC 和 BD 相等）测量零件的内孔直径 AB. 如果 $OA∶OC=OB∶OD=n$，且量得 $CD=b$，求 AB 以

复习题 33

1. 复习题 33 共安排了 12 道题目，供学生复习全章时使用.

2. “复习巩固”第 1，2，4 题都是关于相似多边形性质的题目.

第 1，2 题由一个多边形的边、角或周长求另一个多边形的边、角或周长.

第 3 题综合应用相似三角形的判定和性质，要先判定两个三角形相似，再利用性质求边长和角的大小.

第 4 题需要学生先推导出当长方形的边长扩大到原来的 3 倍时，面积扩大到原来的 9 倍.

第 5 题是利用位似变换缩小给定图形的作图题.

3. “综合运用”共 5 道题目.

第 6 题需要把黑板上的字和教科书上的字看成相似的，而且把它们的相似比定为学生到黑板

及零件厚度 x.

（第 7 题）

（第 8 题）

8. 如图，CD 是⊙O 的弦，AB 是直径，且 $CD\perp AB$，垂足为 P．求证 $PC^2=PA\cdot PB$.

9. 如图，$AD\perp BC$，垂足为 D，$BE\perp AC$，垂足为 E，AD 与 BE 相交于点 F，连接 ED．你能在图中找出一对相似三角形，并说明相似的理由吗？

（第 9 题）

（第 10 题）

10. 如图，$\triangle ABC$ 的三条边与 $\triangle A'B'C'$ 的三条边满足 $A'B'\parallel AB$，$B'C'\parallel BC$，$A'C'\parallel AC$，且 $OB=3OB'$．$\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle A'B'C'$ 的面积之间有什么关系？

拓广探索

11. 如图，一块材料的形状是锐角三角形 ABC，边 $BC=120$ mm，高 $AD=80$ mm．把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上．这个正方形零件的边长是多少？[1]

（第 11 题）

（第 12 题）

36 第二十三章 相似

[1] 假如 $EGHF$ 为加工成的正方形零件，那么 $\triangle AEF$ 的高 AK 可以写成 $AD-KD=AD-EF$，再利用 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，即可找到 EF 与已知条件的关系.

的距离与学生的眼睛到书本的距离比.

第 7 题与教科书习题 33.2 第 8 题类似，介绍了另一种利用相似三角形制作的工具，让学生应用相似三角形的判定和性质解释它的工作原理.

第 8 题是一个圆中的相似问题，要用到直径所对的圆周角是直角的知识.

第 9 题是关于相似三角形判定的题目，需要学生利用已知条件和图中信息确定使三角形相似的条件.

第 10 题中给出了三组边平行，需要学生用平行线分线段成比例的基本事实得到三组边分别成比例，再运用相似三角形的判定和性质解决问题.

4．“拓广探索”编排了 2 道实际应用的题目.

第 11 题求从一个锐角三角形材料中裁下的正方形零件的边长，需要利用正方形对边平行的

[1] 即 $KC=\dfrac{DG}{CG}\cdot AK$，$KE=\dfrac{FH}{FE}\cdot AK$.

12. 如图，为了求出海岛上的山峰 AB 的高度，在 D 处和 F 处树立标杆 CD 和 EF，标杆的高都是 3 丈，D，F 两处相隔 1 000 步（1 丈=10 尺，1 步=6 尺），并且 AB，CD 和 EF 在同一平面内. 从标杆 CD 后退 123 步的 G 处，可以看到顶峰 A 和标杆顶端 C 在一条直线上；从标杆 EF 后退 127 步的 H 处，可以看到顶峰 A 和标杆顶端 E 在一条直线上. 求山峰的高度 AB 及它和标杆 CD 的水平距离 BD 各是多少步？（提示：连接 EC 并延长交 AB 于点 K，用含 AK 的式子表示 KC 和 KE.）[1]

（本题源自我国魏晋时期数学家刘徽所著《重差》，后作为唐代的《海岛算经》中的第一题. 今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直. 从前表却行一百二十三步，人目着地，取望岛峰，与表末参合. 从后表却行一百二十七步，人目着地，取望岛峰，亦与表末参合. 问岛高及去表各几何. 唐代的 1 尺约等于现在的 31 cm.）

第二十七章 相似 37

性质得到相似三角形，再利用正方形的性质和相似三角形的性质得到含正方形边长的方程.

第 12 题是我国古代测量山峰高度的问题，由于山峰底部不能到达，所以立了两个标杆，要利用两组相似三角形中成比例线段之间的关系求解.

Ⅲ 习题解答

习题 33.1

1. 1∶100 000.
2. 不一定相似. 虽然两个矩形的角分别相等，但它们的边不一定成比例.
3. $x=6$，$y=3.5$.
4. （略）.
5. （1）$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{3}$.

   （2）由（1）知，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$. 又因为$\angle A=\angle A$，$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，可知$\triangle ADE$与$\triangle ABC$的边成比例，角分别相等，因此它们相似.
6. 不相似. 小路内外边缘形成的两个矩形的边长分别为 30，20 和 28，18. 因为$\dfrac{30}{28}\neq\dfrac{20}{18}$，$\dfrac{30}{18}\neq\dfrac{20}{28}$，即这两个矩形的边不成比例，所以它们不相似.
7. 如果两个多边形仅有角分别相等，它们不一定相似，例如正方形与长方形；如果仅有边成比例，它们也不一定相似，例如正方形与菱形.
8. 原来矩形的长与宽的比为$\sqrt{2}$. 再折下去，得到的矩形都相似.

习题 33.2

1. 其他两边的实际长度都是 20 m.
2. （1）相似. 原因是$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三边成比例.

   （2）相似. 原因是$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的两角分别相等.
3. （1）相似. 原因是$\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}=\sqrt{2}$.

   （2）由$\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{BC}{DC}$，$\angle ACB=\angle ECD$，知$\triangle ABC\backsim\triangle EDC$. 所以$x=40.5$，$y=98$.
4. 由$DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$，可知$\angle AED=\angle C$，$\angle B=\angle EFC$，从而$\triangle ADE\backsim\triangle EFC$.
5. $\triangle ADE\backsim\triangle AFG\backsim\triangle ABC$.
6. 两直角边的长分别为 18 cm，24 cm，面积为 216 cm^2.
7. 1.6 cm.
8. $AB=3CD$. 原因是$\triangle OCD\backsim\triangle OAB$，且相似比为$\dfrac{1}{3}$.
9. 10.5 m.
10. $\angle LMK=\angle SMT$，楼高为 10 m. 利用$\triangle KLM\backsim\triangle TSM$，可求得$TS=10$.

11. 四边形 $AEFG$ 与四边形 $ABCD$ 一直保持相似. 原因是它们的角分别相等、边成比例.

12. $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $\angle ACB=90°$. 由已知条件可知 $Rt\triangle ACD\backsim Rt\triangle CBD$，从而$\angle A=\angle BCD$，而$\angle A$ 与$\angle ACD$ 互余，所以$\angle ACB=90°$.

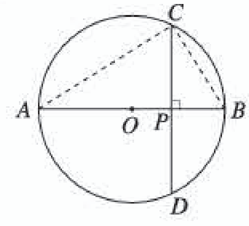
14. $y=-\dfrac{9}{4}x+9$，$0\leqslant x\leqslant 4$，（图略）.

习题 33.3

1. （略）.
2. （略）.
3. $\triangle DEF$ 的顶点 D，E，F 的坐标分别（1，1），（2，1），（3，2）；或（−1，−1），（−2，−1），（−3，−2）.
4. （1）正方形 $IJKL$；（2）是，正方形 $IJKL$ 与正方形 $EFGH$ 的相似比为$\dfrac{3}{2}$；（3）正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的相似比为 2.
5. （0，1.5），（0，0），（2，0），（2，$\dfrac{3}{2}$）；或（0，−1.5），（0，0），（−2，0），（−2，$-\dfrac{3}{2}$）.
6. （1）对应点的横坐标加倍，纵坐标不变；（2）对应点的横坐标不变，纵坐标加倍.
7. （略）.

复习题 33

1. $\angle E=67°$，$\angle G=107°$，$\angle N=43°$，$x=14$，$y=15$，$z=25$.
2. 其他两边长为 36，39，周长为 90.
3. （1）相似，$x=4$，$y=10$；（2）相似，$x=124$，$y=33$.
4. 要付 1 620 元的广告费. 原因是边长扩大为原来的 3 倍，则面积扩大为原来的 9 倍.
5. （略）.
6. 要写大约为 8.4 cm×8.4 cm 大小的字.
7. $AB=nb$，$x=\dfrac{a-nb}{2}$.
8. 如图，连接 AC，BC. 由 AB 是直径，得$\angle ACB=90°$. 由$\triangle CPA\backsim\triangle BPC$，可得$\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{PA}{PC}$，从而 $PC^2=PA\cdot PB$.



（第 8 题）

9. $\triangle ADC\backsim\triangle BEC$，理由是$\angle ADC=\angle BEC$，$\angle ACD=\angle BCE$.（或$\triangle ABC\backsim\triangle DEC$，$\triangle AEF\backsim\triangle BDF$ 等）
10. $\triangle ABC$ 的面积为$\triangle A'B'C'$的面积的 9 倍. 由 $A'B'//AB$，可得$\dfrac{OA'}{OA}=$

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}$，由 $B'C'//BC$，可得 $\frac{B'C'}{BC}=\frac{OB'}{OB}$，由 $A'C'//AC$，可得 $\frac{OA'}{OA}=\frac{A'C'}{AC}$，所以$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{OB'}{OB}=\frac{1}{3}$. 于是$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且相似比为 3，所以$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的面积比为 9.

11. 正方形零件的边长为 48 mm. 由$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，得$\frac{EF}{BC}=\frac{AK}{AD}$，进一步可求得$EF=48$.

12. $AB=1\ 255$ 步，$BD=30\ 750$ 步.

Ⅳ 教学设计案例

33.2.1 相似三角形的判定（第 2 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似.

2. 内容解析

相似三角形的判定是相似三角形研究的重要内容. 定理“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”承接于平行线分线段成比例的基本事实在三角形中的推论，又可用于证明其他的判定方法，即作平行线得到相似三角形. 因此这个结论在三角形相似的判定中处于基础地位，为其他三角形相似的判定的证明作了铺垫.

在平行线分线段成比例的基本事实中，我们关注截后得到的两个三角形，得到“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”，而由平行易得两个三角形的角分别相等，因此很自然地提出了一个问题，即这两个三角形是否相似. 因为比例线段中有一条线段与其他三条线段不在同一个三角形的边上，显然需要转化，将一条线段平移到另一条线段上. 这个过程中蕴含了“提炼图形——提出问题——平移转化——解决问题”的探究思路.

基于以上分析，本节课的教学重点是：判定定理“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”的证明.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）会证明“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”.

（2）能用上述判定定理解决简单问题.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：能够从定义出发分析两个三角形相似的条件，并确定哪些条件是容

易证明的，哪些是需要转化的；能理解转化的原因、方向和途径；能写出部分证明过程，并能理解整个证明过程.

达成目标（2）的标志是：会用“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”判定两个三角形是否相似.

三、教学问题诊断分析

证明“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”时，需证三条边成比例，而有一条边与其他三条边不在同一个三角形的边上，为了利用前面的结论，需作平行线通过平移将其转化到一个三角形中，这样的证明思路学生往往难以想到. 同时，证明过程需要作辅助线，需要利用前面的结论，还需要判定并利用平行四边形的性质，学生难以独立完成.

本节课的教学难点是：结论“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”的证明.

四、教学支持条件分析

用《几何画板》软件做实验，验证两个三角形中第三边的比与另外两边的比相等.

五、教学过程设计

1. 观察猜想，提出问题

大家都知道，我们可以利用定义来证明三角形相似，为了寻找判定三角形相似的更简便方法，我们学习了平行线分线段成比例的基本事实，以及它在三角形中的结论——“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”. 下面我们从这些知识出发来探究判定三角形相似的简便方法.

教师展示图 1，提示学生关注其中的三角形，从而得到图 2，并提出问题.

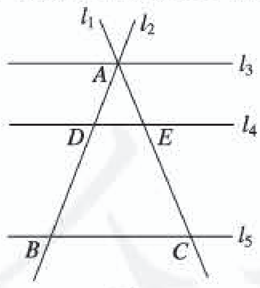


图 1

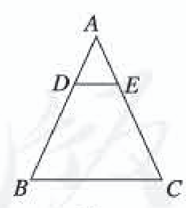


图 2

问题 1 如图 2，在$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，且 DE 分别交 AB，AC 于点 D，E，$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 有什么关系？

师生活动：学生交流想法，易知两个三角形相似.

追问 用定义证明这两个三角形相似，要满足哪些条件？这些条件成立吗？

师生活动：教师让学生找相似的条件. 学生回顾已学过的知识，提出易证的条件：$\angle A=\angle A$，$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$. 同时产生疑惑：第三组对应边之比$\dfrac{DE}{BC}$是否和$\dfrac{AE}{AC}$相等

呢？教师用《几何画板》软件做实验，发现$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$.

设计意图：从一组平行线截两条相交直线的图形中提炼出三角形，有利于培养学生的空间观念，揭示出已知、易证和需证的条件，有利于学生找出思考问题的方向．而用《几何画板》做实验则是化静为动，增强直观感知.

2. 平移转化，推理论证

问题2 如何证明$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$呢？

师生活动：学生思考、交流.

追问1 为什么不能直接由“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”得出$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$？

师生活动：学生分析得出，BC，AE，AC 在$\triangle ABC$ 的边上，而 DE 不在$\triangle ABC$ 的边上，不能直接利用这个结论.

追问2 能否利用我们以前学过的知识，将 DE 转移到$\triangle ABC$ 的边上呢？

师生活动：学生回顾转移线段的方法，如平移、旋转、截取等，并画图研讨．教师巡视指导，哪种方法有利于得到$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$？并展示学生的方法，作出相应的点评.

追问3 我们过点 E 作 $EF\parallel AB$ 交 BC 于点 F，得到 $DE=BF$，从而将线段 DE 转移到了$\triangle ABC$ 的边上．如图3，此时$\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$是否成立呢？

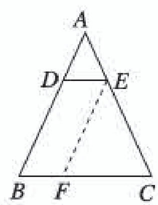


图3

师生活动：学生回答．教师指出，由 $EF\parallel AB$ 得出$\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$，而由 $DE\parallel BC$ 得出$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，因此$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$．师生共同整理出证明过程.

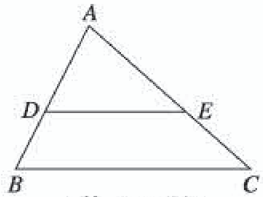
教师板书判定三角形相似的定理：平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似.

设计意图：通过对“平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例”的分析，得出我们要解决的核心问题是将线段转移到一个三角形中．而学生通过对线段转移方法的探究，体会到通过平移，可以把两条线段的比转化为另两条线段的比.

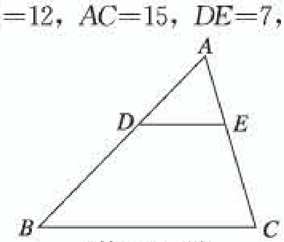
3. 学以致用，巩固新知

(1) 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，且 $AD=3$，$DB=2$，写出图中的相似三角形，并指出其相似比.

(2) 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，且 $AD=8$，$DB=12$，$AC=15$，$DE=7$，求 AE 和 BC 的长.



（第（1）题）



（第（2）题）

设计意图：巩固由平行得到三角形相似的判定方法，并会利用相似三角形的性质求线段的长度.

4. 归纳小结，反思提高

师生一起回顾本节课所学的主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 本节课我们学习了哪种三角形相似的判定方法？这种判定方法的前提条件是什么？

(2) 我们如何证明这种判定方法？

设计意图：引导学生归纳本节课的知识点，疏理证明思路.

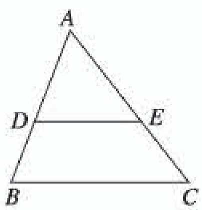
5. 布置作业

教科书习题 33.2 第 4，5 题.

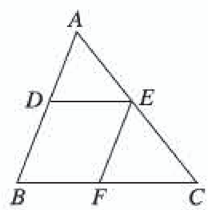
六、目标检测设计

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$DE=6$，$BC=10$，则$\triangle ADE$ 和$\triangle ABC$ 的相似比是______；若 $AE=8$，则 $CE=$______.

设计意图：考查由平行得到相似的知识.



(第 1 题)



(第 2 题)

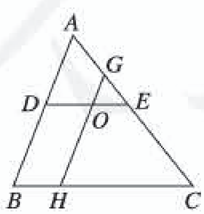
2. 如图，已知 $DE \parallel BC$，$EF \parallel AB$，则下列式子错误的是（　　）.

(A) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$　　(B) $\frac{CE}{EA}=\frac{CF}{FB}$　　(C) $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{BD}$　　(D) $\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{CB}$

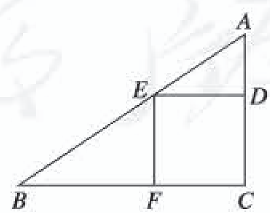
设计意图：考查平行线分线段成比例的基本事实与由三角形相似得到相似比的知识.

3. 如图，$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$GH \parallel AB$，且 DE，GH 相交于点 O，则图中与$\triangle ABC$ 相似的三角形共有多少个？请你写出来.

设计意图：考查相似三角形的判定定理.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，在$\triangle ABC$ 中，正方形 $EDCF$ 的三个顶点 E，D，F 都在三角形的边上，另一个顶点 C 与三角形的顶点重合，且 $AC=4$，$BC=6$，求 ED 的长.

设计意图：考查相似三角形的判定定理，以及用代数方法（列方程）解决几何问题的能力.

33.2.1　相似三角形的判定（第 3 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

三边成比例的两个三角形相似；两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

2. 内容解析

由于全等是相似比为 1 的特殊情形，这为我们提供了一种思路：类比判定两个三角形全等的“SSS”“SAS”方法，发现并提出判定两个三角形相似的简单方法.

在探究“三边成比例的两个三角形相似”的过程中，学生通过度量，发现结论成立；再通过作与$\triangle A'B'C'$相似的三角形，把证明相似的问题转化为证明所作三角形与$\triangle ABC$全等的问题.“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”的证法与前一个判定定理的证明方法类似，再次体现了定理“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似”的基础性作用.

基于以上分析，本节课的教学重点是：判定定理“三边成比例的两个三角形相似”和“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）理解三角形相似的两个判定定理.

（2）会运用三角形相似的两个判定定理解决简单问题.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：理解两个判定定理的含义，能分清条件和结论，并能用文字语言、图形语言和符号语言表示.

达成目标（2）的标志是：会用两个判定定理判断两个三角形相似，并解决简单的问题.

三、教学问题诊断分析

在两个判定定理证明的过程中，教科书作了一个中介三角形，使之与要证的三角形相似，再利用相似三角形对应边成比例和已知条件证明“中介三角形”与原三角形全等，这种转化的方法学生往往难以想到. 其中通过线段的比相等证明线段相等，不同于以往常用的证明线段相等的方法，也会给定理的证明带来一定难度.

本节课的教学难点是：判定定理“三边成比例的两个三角形相似”的证明.

四、教学支持条件分析

利用《几何画板》软件对可能具备的相似条件进行验证.

五、教学过程设计

1. 问题引入，类比猜想

问题1 （1）两个三角形全等有哪些简便的判定方法？

（2）全等是相似比为1的特殊情形. 如图1，类比三角形全等的判定，判定$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似是否有简便的判定方法？你有什么猜想？

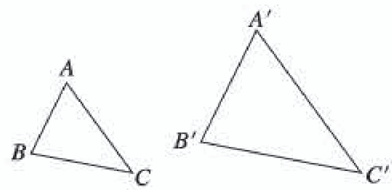


图1

师生活动：问题1（1）由学生口答. 问题1（2）组织学生分小组讨论，然后全班交流. 如果学生对“两角对应相等的两个三角形相似”是否正确存在疑问，可存疑，留在下一节课解决. 对学生提出的判断三角形相似的方法进行归纳整理，指出本节课我们先研究“三边”和“两边及其夹角”的情形.

设计意图：通过全等三角形与相似三角形之间特殊与一般的关系，运用类比的思维方式，让学生猜想得出两个三角形相似的简单判定方法，从而引出下一步要探究的问题.

2. 画图探究，初步感知

问题2 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，如果满足$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，那么能否判断这两个三角形相似？

师生活动：（1）画图探究. 教师引导学生任意画$\triangle ABC$，取一个便于操作的k值（如$\frac{1}{2}$，2等），得到$\triangle A'B'C'$的三边长，再作出$\triangle A'B'C'$. 指导学生把画好的三角形剪下来，比较两个三角形的角是否分别相等，判断它们是否相似.

（2）教师借助《几何画板》软件对k取任意值的情况进行演示，让学生归纳发现的结论. 并说明$k=1$时两个三角形全等，即全等是相似的特殊情况.

设计意图：在教师的指导下，学生通过自己动手，探索新知，并与他人交流探讨，感受探索过程. k取1时，两个三角形全等，取其他值时，两个三角形相似，进一步感受相似与全等的紧密联系.《几何画板》软件的动态演示，有利于学生直观地发现结论.

3. 构造中介，证明定理

问题3 怎样证明“三边成比例的两个三角形相似”呢？

师生活动：（1）学生结合图形写出已知、求证并交流讨论.

（2）当学生感到无处入手时，教师用学生剪出的$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的纸片为模型，用较小的$\triangle ABC$放置于较大$\triangle A'B'C'$上（学生取的k值不同，可能会出现两种图形，但证明的本质是相同的），点A与点A'重合，点B在边$A'B'$上，记为点D，点C在$A'C'$上，记为点E.

追问1 $B'C'$与DE有什么位置关系？为什么？

师生活动：学生直观发现$B'C'\parallel DE$.

追问2 由$B'C'$与DE的位置关系能得到$\triangle A'DE$与$\triangle A'B'C'$相似吗？为什么？

师生活动：学生回答由“平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角

形相似”得到$\triangle A'DE$与$\triangle A'B'C'$相似.

追问3 我们先构造了一个与$\triangle ABC$全等的中介$\triangle A'DE$，得到$\triangle A'DE\backsim\triangle A'B'C'$，从而得到$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. 这为我们证明“三边成比例的两个三角形相似”提供了一种思路：能否在$\triangle A'B'C'$上作一个与$\triangle A'B'C'$相似的$\triangle A'DE$，再证明它与$\triangle ABC$全等呢？如何作？

师生活动：(1) 学生思考交流. 教师展示学生的不同作法，并请学生说明$\triangle A'DE$与$\triangle ABC$全等的原因. (2) 由学生整理出证明思路，教师板书，从而得到三角形相似的判定定理.

设计意图：让学生在操作中发现解决问题的方法：作$DE\parallel B'C'$，证明$\triangle A'DE\backsim\triangle A'B'C'$，从而把证明$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$的问题转化为证明$\triangle ABC\cong\triangle A'DE$的问题.

4. 类比实验，自主探究

问题4 三角形全等有“SAS”的判定方法，类似地，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果满足$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，且$\angle A=\angle A'$，那么能否判断这两个三角形相似？

师生活动：(1) 教师借助《几何画板》软件对k取任意值的情况进行演示，看$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的另一组边的比是否为k，另两组角是否分别相等. 教师提问：图中的$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似吗？为什么？学生提出猜想.

(2) 学生模仿上一个定理的证明，讨论问题4的证明思路，在课后完成证明过程.

(3) 教师小结这个判定定理的内容. 并追问：

对于$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，如果$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$，且$\angle B=\angle B'$，这两个三角形一定相似吗？如果将$\angle B=\angle B'$换成$\angle C=\angle C'$，这两个三角形一定相似吗？为什么？

让学生试着画画看，找出反例即可.

设计意图：学生有前面探究活动的经验，教师提出问题后，利用《几何画板》软件辅助，学生容易获取初步结论，而且仿照上一个定理的证明，容易得到这个命题的证明思路. 最后，学生通过考虑“两边和其中一边的对角”的情形，加强对三角形相似条件的理解与记忆.

5. 运用结论，解决问题

例 根据下列条件，判断$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是否相似，并说明理由：

(1) $AB=4$ cm，$BC=6$ cm，$AC=8$ cm，
$A'B'=12$ cm，$B'C'=18$ cm，$A'C'=24$ cm；

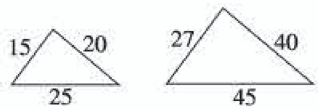
(2) $\angle A=120^\circ$，$AB=7$ cm，$AC=14$ cm，
$\angle A'=120^\circ$，$A'B'=3$ cm，$A'C'=6$ cm.

师生活动：师生共同分析从条件中是否可能得到两个三角形相似的条件，教师提醒学生注意(2)中的角是不是两边夹角.

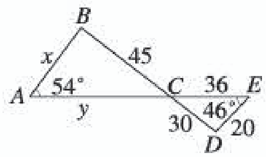
设计意图：让学生学会从现有条件中得到判断三角形相似的条件.

练习 判断图中的两个三角形是否相似，并求出x和y.

(1)



(2)



师生活动：学生自主答题，写出相应的解答过程，并由学生互评.

设计意图：通过练习，熟练运用相似的条件判断两个三角形相似.

6. 回顾小结，布置作业

回顾本节课的学习，回答下列问题：

你学到了哪些判定三角形相似的方法？你认为证明本节课中两个判定定理的思路是什么？

设计意图：引导学生归纳本节课的知识点，以及判定定理的证明思路.

课后作业：

(1) 教科书第 12 页练习 1，3.

(2) 教科书习题 33.2 第 2 (1)，3 题.

(3) 证明判定定理“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”（画图，写出已知、求证，并进行证明）.

六、目标检测设计

(一) 选择题

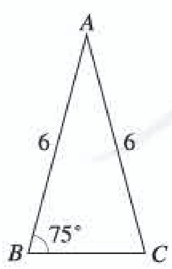
1. 下列条件中可以判定$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$的是（　　）.

(A) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{A'B'}{A'C'}$　　(B) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{A'B'}{A'C'}$，$\angle B=\angle B'$

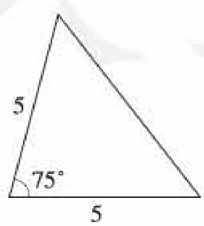
(C) $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$　　(D) $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

设计意图：考查三角形相似的两个判定定理.

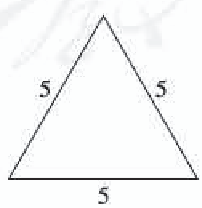
2. 如图，已知$\triangle ABC$，则下列四个三角形中，与$\triangle ABC$相似的是（　　）.



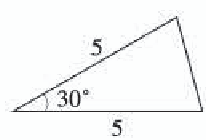
(第 2 题)



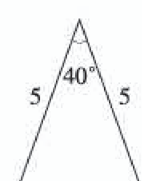
(A)



(B)



(C)



(D)

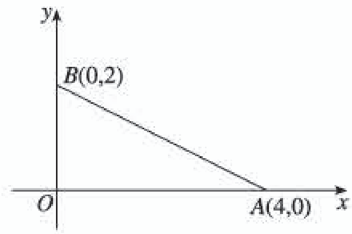
设计意图：考查等腰三角形的性质，以及判定定理“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”.

（二）填空题

3. 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB=6$，$BC=8$，$AC=5$，$A'B'=3$，$B'C'=4$，则当$A'C'=$______时，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

设计意图：考查用“三边成比例的两个三角形相似”判定两个三角形相似.

4. 如图，在平面直角坐标系中，$A(4，0)$，$B(0，2)$，如果点C在x轴的正半轴上（点C与点A不重合），当点C的坐标为________时，$\triangle BOC$与$\triangle AOB$相似.

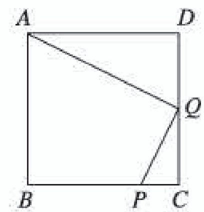


（第 4 题）

设计意图：考查平面直角坐标系的知识，以及用“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”判定两个三角形相似.

（三）解答题

5. 如图，在正方形$ABCD$中，P是BC上的一点，且$BP=3PC$，Q是CD的中点，求证$\triangle ADQ\backsim\triangle QCP$.



（第 5 题）

设计意图：考查勾股定理，以及用“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”判定两个三角形相似.

33.2.2　相似三角形的性质

一、内容和内容解析

1. 内容

相似三角形对应线段的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

2. 内容解析

判定和性质是研究几何图形的两个重要方面，我们已研究了相似三角形的判定，接下来就要对性质进行研究. 与全等三角形一样，相似三角形的性质主要研究相似三角形几何量之间的关系.

由相似三角形的定义可知，相似三角形的对应角相等，对应边成比例. 三角形还有其他的几何量，如高、中线、角平分线的长度，以及周长、面积等. 教科书先对相似三角形的对应高、对应中线、对应角平分线的比进行探究，推广得到对应线段的比等于相似比；以此作为基础，得到相似三角形面积的比与相似比的关系.

基于以上分析，本节课的教学重点是：相似三角形对应线段的比、面积的比与相似比的关系的探究和运用.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）理解相似三角形的性质.

（2）会利用相似三角形的性质解决简单的问题.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：知道相似三角形对应线段的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方，能够通过推理证明这两条性质.

达成目标（2）的标志是：会利用相似三角形的性质求有关线段的长和三角形的面积.

三、教学问题诊断分析

由相似三角形的定义可得到相似三角形的对应角相等，对应边成比例. 但三角形还有其他量，我们可以提出哪些性质？如何提出它们的性质？对学生现有的认知基础来说有一定的难度.

本节课的教学难点是：提出相似三角形性质的猜想.

四、教学支持条件分析

用《几何画板》软件验证“相似三角形对应线段的比等于相似比”.

五、教学过程设计

1. 导出猜想，确定方向

问题 1 对于相似三角形，我们已研究了它的定义与判定. 根据已有的研究几何图形的经验，我们还需研究什么？可以从哪些角度来研究？

师生活动：学生思考交流.

追问 1 相似三角形的性质主要是研究相似三角形几何量之间的关系，三角形有哪些几何量？

师生活动：学生互相补充，列举出几何量.

追问 2 从相似三角形的定义出发，能够得到相似三角形的什么性质？其他几何量可能具有哪些性质？

师生活动：学生回答相似三角形的对应角相等，对应边成比例，并写出猜想的性质. 如果学生列出猜想的性质有难度，教师可再追问：全等三角形可以看作相似比为 1 的三角形，全等三角形对应高的比是多少？相似三角形呢？相似三角形其他对应几何量的比与相似比有什么关系？教师展示，并指出这堂课要研究的问题.

设计意图：对几何图形的研究包括判定和性质两个方面，性质主要研究几何量的相互关系，这样设计体现了几何图形研究的基本套路. 让学生自己提出研究的问题，能激发学生研究的兴趣.

2. 计算探究，归纳新知

问题 2 如果$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 k，证明对应高的比为 k.

追问 $\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的对应高是哪两个三角形的对应边？这两个三角形相似吗？如何证明？

师生活动：学生证明，教师展示学生的证明过程.

设计意图：由于证明过程包含了两组相似三角形，教师需要引导学生认识它们与要证结论之间的关系.

问题 3 如果$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 k，它们的对应中线、角平分线的比是否也等于相似比？

师生活动：学生猜想，证明留到课后完成.

追问 你是如何理解两个相似三角形的对应线段的？试举例说明. 如果$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为$k$，对应线段的比是否也等于$k$？

师生活动：学生猜想，教师利用《几何画板》软件验证.

设计意图：类比相似三角形对应高的比等于相似比，得到对应中线、角平分线的比等于相似比，进而归纳出对应线段的比等于相似比.《几何画板》软件辅助演示，直观形象，有利于学生归纳得出一般结论.

问题 4 如果$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为$k$，它们的周长有什么关系？

师生活动：学生自主探究，教师指导：将$\triangle ABC$中的每条边用$\triangle A'B'C'$中相应的边表示，然后得出结论.

设计意图：求周长的比可以看作相似三角形对应线段的比等于相似比的应用.

问题 5 如果$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为$k$，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的面积比是多少？

师生活动：(1) 教师分析：我们已经知道，相似三角形对应线段的比等于相似比，可将三角形的面积转化为对应线段.

(2) 由学生写出问题 5 的计算过程.

(3) 教师板书：相似三角形面积的比等于相似比的平方.

设计意图：在用代数运算得到相似三角形周长的比等于相似比的基础上，进一步运用代数运算得到相似三角形面积比与相似比的关系.

3. 典例探讨，运用新知

问题 6 如图 1，在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$AB=2DE$，$AC=2DF$，$\angle A=\angle D$，$\triangle ABC$的边BC上的高是 6，面积是$12\sqrt{5}$，求$\triangle DEF$的边EF上的高和面积.

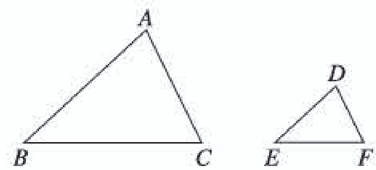


图 1

师生活动：师生一起分析：先判定$\triangle ABC$和$\triangle DEF$相似，再利用相似三角形的性质求解.

设计意图：让学生综合运用相似三角形的判定和性质求三角形线段的长度和面积.

4. 小结反思，自主评价

回顾本节课的学习，回答下列问题：

我们研究了相似三角形哪些几何量之间的关系？它们各是什么关系？我们是如何证明相似三角形对应高的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方的？

设计意图：回顾图形性质的研究套路，以及相似三角形性质的证明方法.

5. 分层作业，着眼发展

必做题：教科书第 17 页练习第 1，2，3.

选做题：如图 2，$\triangle ABC$的面积为 100，周长为 80，$AB=20$，D是AB上一点，$BD=12$. 过点D作$DE /\!/ BC$，交AC于点E.

(1) 求$\triangle ADE$的周长和面积；

(2) 过点E作$EF /\!/ AB$，EF交BC于点F，求$\triangle EFC$和四边形$DBFE$

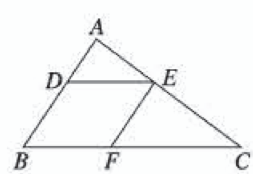


图 2

的面积.

设计意图：必做题巩固运用“三角形对应线段的比等于相似比”“面积的比等于相似比的平方”. 选做题难度有所加大，需要学生先确定相关的相似三角形，再通过周长的比、面积的比与相似比的关系求解.

六、目标检测设计

（一）选择题

1. 已知$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，且$AB : DE = 1 : 2$，则$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线与$\triangle DEF$ 的边 EF 上的中线之比为（　　）.

(A) $1:2$　　(B) $1:4$　　(C) $2:1$　　(D) $4:1$

设计意图：考查相似三角形对应线段的比等于相似比.

2. 在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，$AB = 2DE$，$AC = 2DF$，$\angle A = \angle D$. 如果$\triangle ABC$ 的周长是 16，面积是 12，那么$\triangle DEF$ 的周长、面积分别为（　　）.

(A) 8，3　　(B) 8，6　　(C) 4，3　　(D) 4，6

设计意图：考查相似三角形周长的比等于相似比和相似三角形面积的比等于相似比的平方.

（二）填空题

3. 已知$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 相似，且面积比为 $4 : 25$，则$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的相似比为______.

设计意图：考查相似多边形面积的比等于相似比的平方.

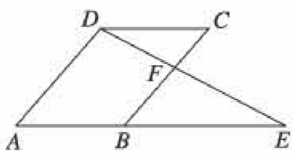
4. 已知两个相似三角形周长的比为 $1 : 2$，它们的面积和为 25，则较大三角形的面积为______.

设计意图：考查相似三角形周长的比等于相似比和相似三角形面积的比等于相似比的平方.

（三）解答题

5. 如图，▱$ABCD$ 中，E 是 AB 延长线上一点，DE 交 BC 于点 F，且 $BE : AB = 3 : 2$，$S_{\triangle BEF} = 4$，求 $S_{\triangle CDF}$.

设计意图：考查平行四边形的性质，以及相似三角形面积的比等于相似比的平方.



（第 5 题）

33.3　位似（第 2 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

在平面直角坐标系中，以原点为位似中心的位似图形（有一个顶点为原点、有一条边在横坐标轴上）的对应点的坐标之间的关系.

2. 内容解析

相似与轴对称、平移、旋转一样，也是图形之间的一种变换，学生在前面学过轴对称、平移的坐标表示. 位似是一种特殊的相似，位似图形对应点的坐标也存在一定的规律. 研究这种规律，可

以借助数加强对形的理解，同时渗透用代数方法研究几何变换的思想.

教科书通过作线段 AB 和 $\triangle AOC$ 的以原点为位似中心的位似图形，总结出了位似图形对应点的坐标之间的关系. 运用这个关系，在平面直角坐标系中可准确地作出一个图形的位似图形，体现数形结合的思想.

基于以上分析，本节课的教学重点是：探究在平面直角坐标系中，以原点为位似中心的位似图形对应点的坐标之间的关系.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 了解平面直角坐标系中，以原点为位似中心的位似图形的对应点的坐标之间的关系.

(2) 利用平面直角坐标系中以原点为位似中心的位似图形的对应点的坐标之间的关系，作位似图形.

2. 目标解析

达成目标 (1) 的标志是：给出一个图形上的一点，会写出它的以原点为位似中心的位似图形的对应点的坐标.

达成目标 (2) 的标志是：能利用位似图形的对应点的坐标之间的关系，用描点法画出以原点为位似中心的已知图形的一个位似图形.

三、教学问题诊断分析

这节课是位似的第二课时，学生不难在平面直角坐标系中画出以原点为位似中心的已知图形的一个位似图形，但可能遗漏了另一种情形. 画出位似图形后，学生可能不容易发现变化前后图形的对应点的坐标之间的关系.

本节课的教学难点是：探究平面直角坐标系中，以原点为位似中心的位似图形的坐标之间的关系.

四、教学支持条件分析

用《几何画板》软件对位似图形对应点坐标之间的关系进行演示，引导学生发现规律.

五、教学过程设计

1. 回顾旧知，类比引入

问题 1 如图 1，$\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(2, 3)$，$B(2, 1)$，$C(6, 2)$.

(1) 将 $\triangle ABC$ 向左平移三个单位长度得到 $\triangle A_1B_1C_1$，写出 A_1，B_1，C_1 三点的坐标；

(2) 写出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称的 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个顶点 A_2，B_2，C_2 的坐标；

(3) 将 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转 $180°$ 得到 $\triangle A_3B_3C_3$，写出 A_3，B_3，C_3 三点的坐标.

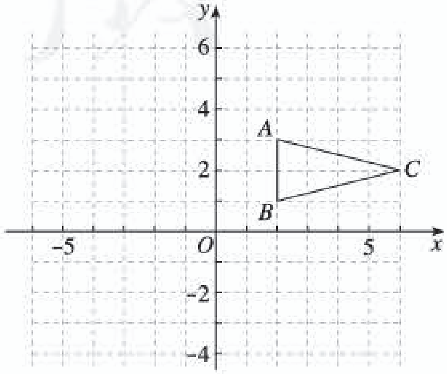


图 1

师生活动：学生自主解答. 教师指出：在前面几册教科书中，我们学习了在平面直角坐标系中，如何用坐标表示某些平移、轴对称、旋转（中心对称）等变换. 相似也是一种图形的变换，一些特殊的相似（如位似）也可以用两个图形坐标之间的关系来表示.

设计意图：通过实例，回顾平移、轴对称、旋转（中心对称）等变换的坐标表示，体会数与形的联系，激发学生探究用坐标的变化规律表示位似的兴趣.

2. 作图观察，发现新知

问题 2 （1）如图 2，在平面直角坐标系中，有两点 $A(6,3)$，$B(6,0)$. 以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{3}$，把线段 AB 缩小. 观察对应点之间坐标的变化，你有什么发现？

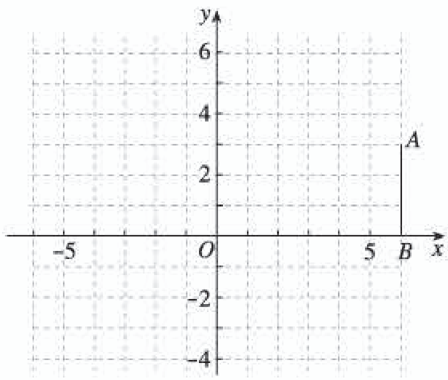


图 2

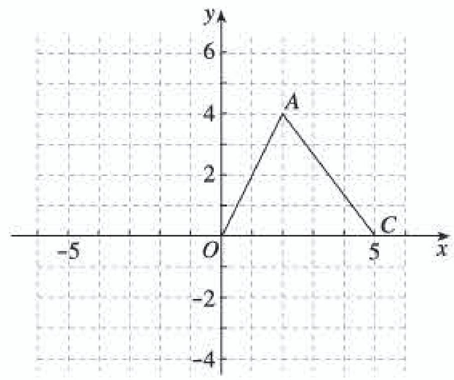


图 3

（2）如图 3，$\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(4,4)$，$O(0,0)$，$C(5,0)$，以点 O 为位似中心，相似比为 2，将 $\triangle AOC$ 放大. 观察对应顶点坐标的变化，你有什么发现？

师生活动：（1）学生先自主探究解答，教师再组织学生交流. 教师及时引导，关注学生能否作出两种情形的图形，能否发现变换前后图形的对应点坐标之间的关系.

（2）教师用《几何画板》软件对相似比取任意 k（$k>0$）时，位似图形对应点坐标之间的关系进行演示，从而引导学生发现规律：在平面直角坐标系中，如果以原点为位似中心，新图形与旧图形的相似比为 k，那么与原图形上的点 (x,y) 对应的新图形上的点的坐标为 (kx,ky) 或 $(-kx,-ky)$.

设计意图：先通过作图，写出对应点的坐标，让学生总结特殊图形发生位似变换后的坐标变化规律；再通过《几何画板》软件的形象演示，引导学生总结更一般化的规律. 整个探究过程体现了从特殊到一般的认知过程.

3. 典例示范，应用新知

例 如图 4，$\triangle ABO$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-2,4)$，$B(-2,0)$，$O(0,0)$. 以原点 O 为位似中心，画出一个三角形，使它与 $\triangle ABO$ 的相似比为 $\frac{3}{2}$.

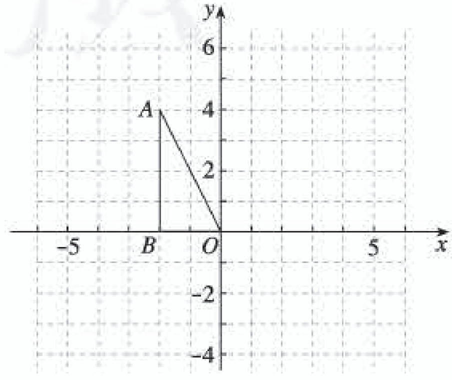


图 4

师生活动：学生自主完成，教师关注学生解答此题的方法，一种是用几何法做，一种是用代数法（即根据规律，找出位似图形各个顶点的坐标，再描点画图）. 教师组织学生

交流两种做法，比较哪一种方法更为简便.

设计意图：通过典型例题，巩固位似图形对应点的坐标之间的关系. 让学生切实感受到运用新知解决问题的简捷性，从而获得成就感.

4. 习题精练，巩固新知

教科书第 28 页练习 1，2.

师生活动：学生自主解答，师生点评.

设计意图：通过练习，进一步巩固运用新知.

5. 反思盘点，整合新知

回顾本节课的学习，回答下列问题：

以原点为位似中心的位似图形对应点的坐标有什么关系？用坐标表示位似图形的对应点时要注意什么？

设计意图：引导学生对本节课的知识进行小结.

6. 课外作业，巩固新知

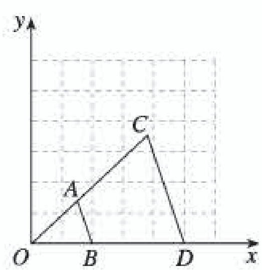
教科书习题 33.3 第 3，5 题.

设计意图：分别求一个三角形和一个四边形位似变换后所得新图形的顶点坐标，以巩固本节课所学的知识.

六、目标检测设计

（一）选择题

1. 如图表示$\triangle AOB$ 和把它放大后得到的$\triangle COD$，则$\triangle AOB$ 与$\triangle COD$ 的相似比为（　　）.



（第 1 题）

(A) 2∶5　　(B) 5∶2　　(C) 2∶3　　(D) 3∶2

设计意图：考查平面直角坐标系中的位似变换.

2. 在平面直角坐标系中，把$\triangle ABC$ 以原点 O 为位似中心放大，得到$\triangle A'B'C'$. 若点 A 和它的对应点 A'的坐标分别为（2，5），（−6，−15），则$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的相似比为（　　）.

(A) 3　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) −3　　(D) $-\frac{1}{3}$

设计意图：考查平面直角坐标系中位似变换坐标的变化规律.

3. 在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 顶点 A 的坐标为（2，3）. 若以原点 O 为位似中心，画$\triangle ABC$ 的位似图形$\triangle A'B'C'$，使$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的相似比等于$\frac{2}{3}$，则点 A'的坐标为（　　）.

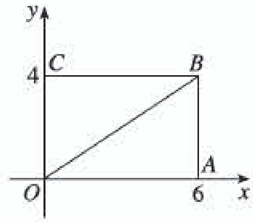
(A) （$\frac{4}{3}$，6）　　(B) （$-\frac{4}{3}$，−6）

(C) （3，$\frac{9}{2}$）或（−3，$-\frac{9}{2}$）　　(D) （$\frac{4}{3}$，6）或（$-\frac{4}{3}$，−6）

设计意图：考查平面直角坐标系中位似变换坐标的变化规律.

（二）填空题

4. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点，边 OA 在 x 轴上，OC 在 y 轴上. 如果 $\triangle OA'B'$ 与 $\triangle OAB$ 关于点 O 位似，且 $\triangle OA'B'$ 的面积等于 $\triangle OAB$ 的面积的 $\frac{1}{4}$，那么点 B' 的坐标是________.



（第 4 题）

设计意图：考查相似三角形面积的比与相似比的关系，位似变换中坐标的变化规律.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 相似符号“∽”的起源

最初的几何知识是从人们对形的直觉中萌发出来的. 史前人大概首先是从自然界本身提取几何形式，然后在器皿制作、建筑设计及绘画装饰中加以再现. 早期人类对几何的兴趣，不只是对圆、三角形、正方形等一系列几何形式的认识，而且还有对全等、相似、对称等几何知识的运用. 几何知识随着人们的实践活动而不断扩展.

数学除了记数外，还需要一套数学符号来表示数和数、数和形的相互关系.

数学符号的发明和使用比数字晚，现在常用的有 200 多个，初中数学书就不下 20 多个，他们都有一段有趣的经历.

十七世纪德国莱布尼兹广泛使用了“=”号，他还在几何学中用“∽”表示相似，用“≌”表示全等，这就是相似符号“∽”的起源.

参考文献

【1】七市高中选修教材编号委员会编著，《数学史话》，生活·读书·新知三联书店.

【2】李文林，《数学史概论》，高等教育出版社.

2. 线段的比与比例的基本性质

如果选用同一单位长度量得两条线段 AB，CD 的长度分别为 m，n，那么就说这两条线段的比 $AB:CD=m:n$，或写成 $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$. 其中，线段 AB，CD 分别叫做这个线段比的前项和后项. 如果把 $\frac{m}{n}$ 表示成比值 k，那么 $\frac{AB}{CD}=k$，或 $AB=k\cdot CD$.

两条线段的比是它们的长度的比，也就是两个数的比. 关于成比例的数具有下面的性质.

(1) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$.

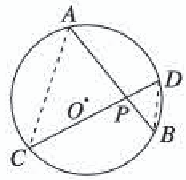
(2) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

(3) 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$ $(b+d+\cdots+n\neq 0)$，那么$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.

3. 相交弦定理、切割线定理

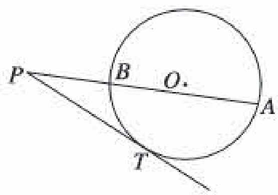
相交弦定理：圆内的两条相交弦被交点分成的两条线段长的积相等（图 33-1）.

切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段的比例中项（图 33-2）.



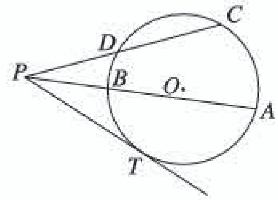
$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

图 33-1



$PT^2=PA\cdot PB$

图 33-2



$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

图 33-3

推论：从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等（图 33-3）.

4. 实用的矩形

(1) 正方形. 如图 33-4，它的长宽之比是 1∶1，是最简单的矩形. 存在许多正方形时，它们之间的位置关系整齐、明确，经常用于装饰中.

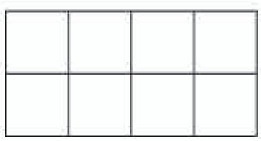


图 33-4

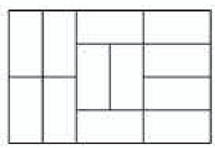


图 33-5

(2) 长宽之比是 2∶1 的矩形. 如图 33-5，它们的相互关系很简单，但在组合时有变化，建筑用砖就是很好的例子.

(3) 长宽之比是$\sqrt{2}$∶1 的矩形. 这类矩形可通过对折分成两个全等的同样比例的矩形. 如图 33-6，将一张长宽之比为$\sqrt{2}$的矩形纸 $ABCD$ 依次不断对折，可以得到矩形纸 $BCFE$，$AEML$，$GMFH$，$LGPN$. 事实上，这些矩形相似，它们长与宽的比始终保持不变. 印刷业经常提及的 2 开、4 开、8 开、16 开……的纸，正是按照上面的方式，将一张称为 1 开的纸依次不断对折得到的. 为了使不同开本的书的形状相似，就要选用长与宽之比接近 1.414∶1 的纸张（如 880 mm×1 230 mm，即长 1 230 mm，宽880 mm），采用对半裁切的方法来裁切纸张.

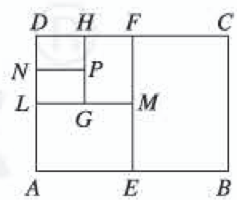


图 33-6

(4) 黄金矩形. 矩形的宽与长之比若等于黄金数 0.618，就称之为黄金矩形. 如图 33-7，在矩形 $ABCD$ 内，再作一个正方形 $CDEF$，则矩形 $BFEA$ 也是黄金矩形. 按照这种方法无限地进行下去，可以得到无数个相似的黄金矩形，形成一个黄金矩形套. 日常生活中，门、窗、桌子、箱子、书本之类的物体常

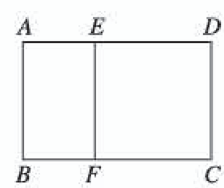


图 33-7

选用 0.618 的宽度与长度之比，这样的物体外形看起来比较美观.

5. 相似变换

我们知道，按一定的方法把一个图形变成另一个图形，叫做几何变换. 几何变换种类很多，初中几何涉及的主要有合同变换和相似变换. 合同变换包括平移变换、旋转变换和反射变换（轴对称）. 下面，我们介绍相似变换的定义和性质.

定义：一个位似变换和一个合同变换的积（即连续变换）称为相似变换. 相似变换的特点是保角，且对应线段成比例. 直观地说，就是把一个图形经过旋转、平移或反射后到某一个位置，再进行位似变换，得到一个放大或缩小了某一个倍数的图形，这个过程就是相似变换.

性质 1：在相似变换下，直线、射线、线段、角、三角形、多边形和圆的像分别为直线、射线、线段、角、三角形、多边形和圆.

性质 2：在相似变换下，不改变一条直线上三个点的简单比（共线三点 A，B，C 所得的比 $(ABC)=\dfrac{AC}{BC}$，其中 A，B 叫做基础点，C 叫做分点）.

性质 3：在相似变换下，不改变角的大小.

性质 4：在相似变换下，平行是图形不变的性质.

6. 位似变换

图 33-8 中大多边形是由小多边形按一定方法变得的，这种变换与合同变换不同，它只保持图形的形状不变，所以是相似变换. 图 33-8 和图 33-9 中的两个多边形不仅相似，而且对应顶点的连线相交于一点，像这样的相似变换叫做位似变换.

图 33-8 中的位似图形叫做外位似，它的位似中心在连接两个对应点的线段之外；图 33-9 中的位似图形叫做内位似，它的位似中心在连接两个对应点的线段上.

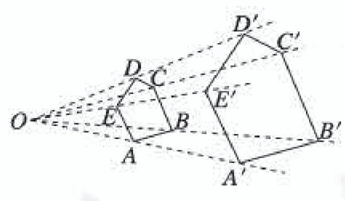


图 33-8

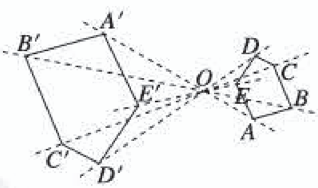


图 33-9

位似变换是特殊的相似变换，一个图形经过位似变换得到另一个图形，这两个图形叫作位似图形. 位似图形的所有对应点的连线所在直线交于一点，该点可在两个图形的同侧（图 33-8），或两个图形之间（图 33-9），或图形内（图 33-10），或边上（图 33-11），也可以是顶点（图 33-12）. 位似图形一定是相似图形，但相似图形不一定是位似图形.

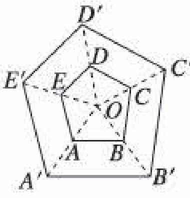


图 33-10

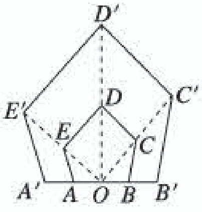


图 33-11

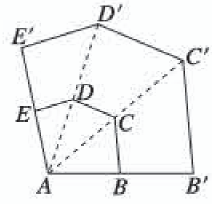


图 33-12

射线法测量的原理就是位似理论，测量中常用的是外位似.

以下是非直线形位似变换（图 33-13），两次或两次以上位似变换（图 33-14）

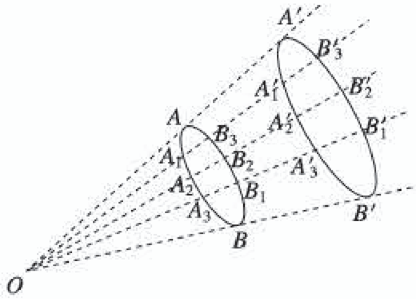


图 33-13

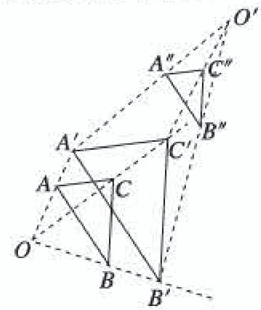


图 33-14

参考文献

【1】《九年义务教育三年制初级中学几何第二册教师教学用书》，人民教育出版社.

【2】关成志，《初中几何教学研究》，教育科学出版社.

二、拓展性问题

1. 利用黄金分割点作正五角星

正五角星是生活中常见的一种美丽图形，试用直尺和圆规作正五角星.

【答案】如图 33-15，

（1）作线段 AB；

（2）经过点 B 作 $BD\perp AB$，使 $BD=\dfrac{1}{2}AB$；

（3）连接 AD，在 DA 上截取 $DE=DB$；

（4）在 AB 上截取 $AC=AE$.

如图 33-16，在以点 A 为圆心，AB 为半径的圆中，按上述方法得到的 AC 长就是圆内接正十边形的边长. 在圆上连续截取弧长等于 AC 长，得到十个点，再把这些点一间一地连接起来，就得到了圆内接正五边形. 圆内接正五边形的五条对角线所围成的图形，就是正五角星.

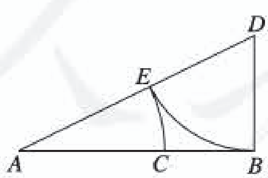


图 33-15

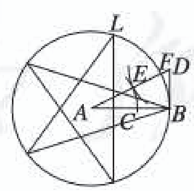


图 33-16

2. 平分住宅

一对黄色的鹦鹉，居住在侧面是一个直角梯形的“别墅”里，一天又来了一对新邻居，这是一对天蓝色的鹦鹉. 为了给新邻居腾出位置，主人要把“别墅”隔成楼上楼下，上下空间一样大，应该怎么分？

【答案】由于鸟笼的宽度不变，所以要使上下空间容积相等，只需把直角梯形的侧面分成等面积的两部分.

一种办法是：如图 33-17，取梯形 $ADCB$ 对角线交点 F，并使两腰的延长线交于点 E，连接 EF，交梯形上下底于 G，H 两点，则 GH 就把鸟笼分为上下相等的两部分.

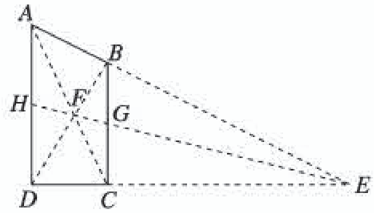


图 33-17

证明：因为 $BC\parallel AD$，

所以$\triangle EBG\backsim\triangle EAH$，$\triangle EGC\backsim\triangle EHD$.

因而有

$$\frac{BG}{AH}=\frac{EG}{EH}, \tag{1}$$

$$\frac{GC}{HD}=\frac{EG}{EH}. \tag{2}$$

由（1）和（2），得 $\frac{BG}{AH}=\frac{GC}{HD}$. （3）

同理，由$\triangle GBF\backsim\triangle HDF$，$\triangle GCF\backsim\triangle HAF$，得 $\frac{BG}{HD}=\frac{GC}{AH}$. （4）

由（3）和（4），得 $BG=GC$，$AH=HD$.

由此，梯形 $ABGH$ 和梯形 $GCDH$ 的上下底分别相等，高也相等，故它们的面积相等.

这种作法不需要用刻度尺或圆规，只需一把直尺或一根细绳就能得到 GH.

参考文献

张润青，《趣味数学游戏》，科学普及出版社.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容是相似多边形的概念，相似三角形的判定方法，相似三角形的性质，相似三角形的应用和位似.

对于相似多边形的概念，应考查学生是否理解相似多边形的概念，是否能用概念判断两个多边形相似，或者推出相似多边形的对应角相等，对应边成比例.

对于相似三角形的判定方法，应考查学生是否掌握“两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例”的基本事实，是否理解相似三角形的判定定理，是否能运用判定定理判定三角形相似.

对于相似三角形的性质，应考查学生是否理解相似三角形的性质，是否能运用性质求线段的长度与面积.

对于相似三角形的应用，应考查学生是否会利用图形的相似解决一些简单的实际问题.

对于位似，应考查学生是否了解图形的位似，是否可以利用位似将一个图形放大或缩小，是否

了解直角坐标系中以原点为位似中心的位似图形（有一个顶点为原点、有一条边在横坐标轴上）的对应点的坐标之间的关系.

2. 本章考查时，应关注以下问题：

(1) 考查相似三角形的概念，应关注学生是否明确相似三角形与全等三角形的区别与联系.

(2) 考查相似三角形的应用时，应关注学生能否找到条件与结论之间的联系，找出问题的突破口.

(3) 考查位似时，应关注学生是否能利用平面直角坐标系中以原点为位似中心的位似图形的坐标变化规律，有效地实现数形之间的转换.

3. 在相似三角形的概念、性质和判定方法的考查中，要关注学生能否通过作图、思考、探究、归纳、推理主动地进行学习，能否体会研究几何图形的基本方法.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 若$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，且 $AB=10\text{cm}$，$BC=12\text{cm}$，$DE=5\text{cm}$，则 EF 的长度为（　　）.

(A) 4 cm　　(B) 5 cm　　(C) 6 cm　　(D) 7 cm

2. 已知$\triangle ABC$与$\triangle DEF$相似，且对应边的比为$\sqrt{2}:1$，则$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的面积比为（　　）.

(A) $1:2$　　(B) $2:1$　　(C) $\sqrt{2}:1$　　(D) $1:\sqrt{2}$

3. 中午 12 点，身高为 165 cm 的小冰的影长为 55 cm，同学小雪此时在同一地点的影长为 60 cm,那么小雪的身高为（　　）.

(A) 185 cm　　(B) 180 cm　　(C) 170 cm　　(D) 160 cm

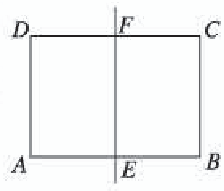
4. 下列两个图形：①两个等腰三角形；②两个直角三角形；③两个正方形；④两个矩形；⑤两个菱形；⑥两个正五边形，一定相似的有（　　）.

(A) 2 组　　(B) 3 组　　(C) 4 组　　(D) 5 组

5. 两个相似三角形的最短边分别是 5 cm 和 3 cm，它们的周长之差为 12 cm，那么小三角形的周长为（　　）.

(A) 14 cm　　(B) 16 cm　　(C) 18 cm　　(D) 30 cm

6. 如图，一张矩形报纸 $ABCD$ 的长 $AB=a$，宽 $BC=b$，E，F 分别是 AB，CD 的中点. 将这张报纸沿着直线 EF 对折后，矩形 $AEFD$ 的长与宽的比等于矩形 $ABCD$ 的长与宽的比，则 $a:b$ 等于（　　）.



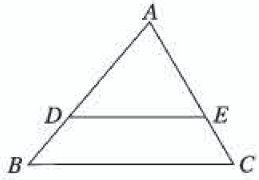
（第 6 题）

(A) $\sqrt{2}:1$.　　(B) $1:\sqrt{2}$.　　(C) $\sqrt{3}:1$.　　(D) $1:\sqrt{3}$.

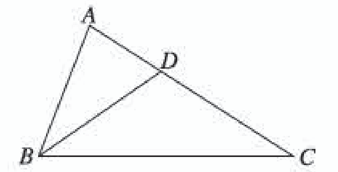
（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. 如图，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$AD=6$ cm，$DB=3$ cm，$BC=9.9$ cm，$\angle A=70^\circ$，$\angle B=50^\circ$，那么$\angle AED=$________，$DE=$________.

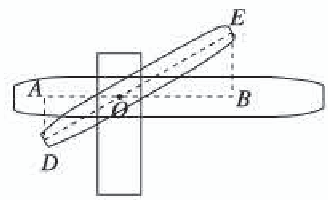
8. 如图，在$\triangle ABC$中，$AC>AB$，点 D 在 AC 边上（点 D 不与 A，C 重合）. 若再增加一个条件就能使$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$，则这个条件可以是________________.



（第 7 题）



（第 8 题）



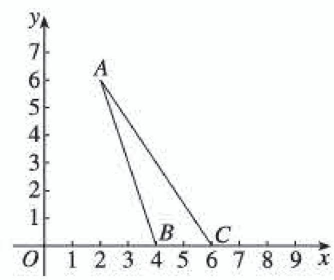
（第 10 题）

9. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\angle A=30^{\circ}$，$CD\perp AB$ 于点 D，那么$\triangle ACD$ 与$\triangle BCD$ 的面积之比为__________.

10. 如图，铁道口栏杆的短臂 OD 长为 1.25 m，长臂 OE 长为 16.5 m，当短臂端点下降 0.85 m时，长臂端点升高了______________m（不计杆的宽度）.

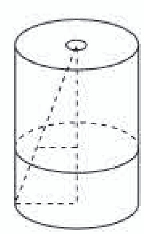
（三）解答题（第 11 题 10 分；第 12，13 题，每题 15 分，共 40 分）

11. 如图，$\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别为 $A(2, 6)$，$B(4, 0)$，$C(6, 0)$. 在第一象限内，画出以原点为位似中心，相似比为$\dfrac{1}{2}$，将$\triangle ABC$ 缩小得到的$\triangle A_1B_1C_1$，并写出$\triangle A_1B_1C_1$ 各点的坐标.



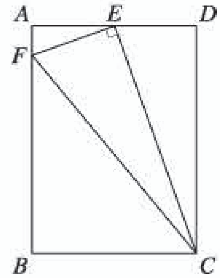
（第 11 题）

12. 如图，一个油漆桶高 1 m，桶内还有剩余的油漆，一根木棒长 1.5 m. 小明将木棒从桶盖小口斜插入桶内，一端触到桶底边缘时，另一端恰好与桶盖小口相齐. 抽出木棒，量得木棒上没沾油漆的部分长 0.75 m，那么桶内油漆面的高度是多少？



（第 12 题）

13. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 为 AD 的中点，$EF\perp EC$，垂足为 E，并与 AB 交于 F，连接 FC（$AB>AE$）. $\triangle AEF$ 与 $\triangle ECF$ 相似吗？若相似，证明你的结论；若不相似，请说明理由.



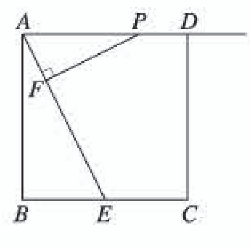
（第 13 题）

附加题：（10 分）

14. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 是 BC 的中点，点 P 在射线 AD 上，过点 P 作 $PF\perp AE$，垂足为 F.

（1）求证 $\triangle PFA\backsim\triangle ABE$.

（2）当点 P 在射线 AD 上运动时，设 $PA=x$，是否存在实数 x，使以 P，F，E 为顶点的三角形也与 $\triangle ABE$ 相似？若存在，求出 x 的值；若不存在，说明理由.



（第 14 题）

参考答案

1. C. 本题考查相似三角形的性质.
2. B. 本题考查相似三角形面积的比等于相似比的平方的简单应用.
3. B. 本题考查相似三角形的简单应用.
4. A. 本题考查相似多边形的判定.
5. C. 本题考查相似三角形周长的比等于相似比.
6. A. 本题考查相似多边形的性质.
7. 60°，6.6 cm. 本题考查相似三角形的性质.

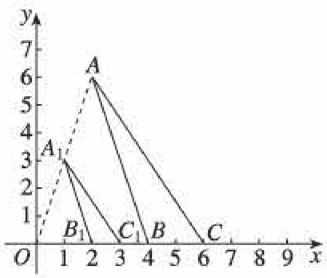
8. （略）. 本题考查相似三角形的判定条件.

9. 3∶1. 本题考查相似三角形面积的比与相似比的关系.

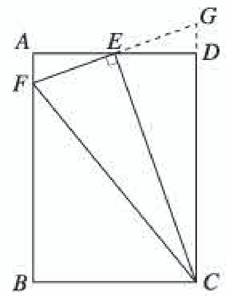
10. 11.22. 本题考查相似三角形的性质.

11. 如图，$A_1(1,3)$，$B_1(2,0)$，$C_1(3,0)$.

本题考查位似变换的画法和位似变换中坐标变化规律.



（第 11 题）



（第 13 题）

12. 设油漆面高度为 x m，根据题意，有$\frac{0.75}{1.5}=\frac{1-x}{x}$，解得 $x=0.5$.

本题考查相似三角形的判定和应用.

13. 相似. 提示：如图，延长 FE，交 CD 的延长线于点 G. 先证 $\mathrm{Rt}\triangle AEF\cong\mathrm{Rt}\triangle DEG$，可得 $EF=EG$，而 $CE\perp FG$，可证 $CF=CG$，进一步可证$\angle FCE=\angle GCE=\angle AEF$. 又$\angle FAE=\angle FEC=90°$，可得$\triangle AEF\backsim\triangle ECF$.

本题考查三角形相似的判定以及等腰三角形的性质.

14. (1)（略）.

(2) 满足条件的 x 的值为 2 或 5. 分两种情况：①若$\triangle EFP\backsim\triangle ABE$，则$\angle PEF=\angle EAB$，$PE\parallel AB$. 此时四边形 $ABEP$ 为矩形，$x=BE=2$. ②若$\triangle PFE\backsim\triangle ABE$，则$\angle PEF=\angle AEB$，可证得 $PE=PA$. 因此 $AF=\frac{1}{2}AE=\sqrt{5}$. 由$\triangle PFA\backsim\triangle ABE$，得$\frac{PA}{AE}=\frac{AF}{BE}$，即$\frac{x}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，因此$x=5$.

本题考查相似三角形的判定以及勾股定理、正方形、等腰三角形的性质等.

第三十四章　锐角三角函数

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 利用相似的直角三角形，探索并认识锐角三角函数（$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$），能够应用 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 表示直角三角形中两边的比；知道 $30°$，$45°$，$60°$角的正弦、余弦和正切值，并会由一个特殊角的三角函数值说出这个角.

2. 会使用计算器由已知锐角求它的三角函数值，由已知三角函数值求它的对应锐角.

3. 理解直角三角形中边与边之间的关系、角与角之间的关系、边与角之间的关系，能运用勾股定理、直角三角形的两个锐角互余以及锐角三角函数解直角三角形，并能用解直角三角形等有关知识解决简单的实际问题，体会数学在解决实际问题中的作用.

二、本章知识结构框图

直角三角形中的边角关系 → 锐角三角函数 → 解直角三角形 → 实际问题

三、内容安排

本章在前面已经研究了直角三角形中三边之间关系、两个锐角之间关系的基础上，进一步研究其边角之间的关系. 主要内容包括正弦、余弦和正切等锐角三角函数的概念，以及运用锐角三角函数等知识解直角三角形等. 本章内容与“相似三角形”“全等三角形”“勾股定理”等内容联系紧密，相似三角形的性质是建立锐角三角函数概念的基础和关键，三角形全等的判定定理是解直角三角形的理论依据，解直角三角形时需要综合运用锐角三角函数、勾股定理等知识. 通过本章的学习，使学生全面掌握直角三角形的组成要素（边、角）之间的关系，并综合运用已学知识解决与直角三角形有关的度量问题，进一步培养学生的推理能力、运算能力和数学建模能力，同时为高中数学中任意角三角函数等知识的学习做准备.

本章分两节：34.1 锐角三角函数和 34.2 解直角三角形及其应用. 第一节主要学习锐角的正弦、余弦和正切等锐角三角函数的概念，第二节主要研究与解直角三角形有关的内容. 第一节内容是第二节的基础；第二节是第一节的应用，并对第一节的学习有巩固和提高的作用.

“34.1 锐角三角函数”先研究锐角的正弦概念，然后在锐角的正弦概念的基础上给出锐角的余弦、正切概念. 教科书安排了从特殊到一般给出锐角的正弦概念的过程，聚焦锐角的正弦概念的核心，即发现对于形状相同、大小不同的直角三角形，一个锐角的对边与斜边之比为定值的规律. 具体地，先引导学生认识“无论直角三角形的大小如何，$30°$角所对的边与斜边的比总是常数

（$\frac{1}{2}$）”. 接着，引导学生利用等腰三角形的性质和勾股定理，探究出“无论直角三角形的大小如何，45°角所对的边与斜边的比也总是常数（$\frac{\sqrt{2}}{2}$）”. 有了上述两个特例的铺垫，教科书进入对一般情况的讨论：在直角三角形中，一个锐角取任意确定的度数时，它的对边与斜边的比是否也是常数？利用相似三角形对应边成比例的性质，得到一般结论：无论直角三角形的大小如何，这个锐角的对边与斜边的比是一个定值. 由此引出锐角的正弦概念. 这样引出锐角的正弦概念的方式和过程，能使学生体会到当锐角的大小确定后，相应边的比也随之确定，而且不同的角度对应不同的比值，既解决了锐角的正弦定义的“合理性”问题，又渗透了函数思想. 在引出锐角的正弦概念之后，教科书引导学生类比锐角的正弦的定义方式和过程，自主探究直角三角形中，当一个锐角确定时，其他边之间的比的规律，并给出锐角的余弦、正切的概念. 教科书还在旁白中分析了锐角三角函数给出了角与数值之间的对应关系，点出了函数的思想. 一些特殊角的三角函数值经常用到，教科书借助于学生熟悉的两种三角尺研究了 30°，45°，60°角的正弦、余弦和正切值，并以例题的形式介绍了由特殊锐角三角函数值求特殊锐角的问题. 本节最后，教科书介绍了如何使用计算器求非特殊角的三角函数值以及如何根据三角函数值求对应的锐角等.

“34.2 解直角三角形及应用”研究与直角三角形有关的度量问题. 教科书首先解决章引言中的确定比萨斜塔倾斜程度的问题，即已知直角三角形的斜边和一个锐角的对边，求这个锐角；进而将其一般化并加以推广，给出解直角三角形的内涵，即它是由直角三角形中已知元素（边、角），求出其余未知元素（边、角）的过程. 接着，教科书引导学生全面梳理直角三角形中边角之间的关系，即反映三边关系的勾股定理，反映锐角之间关系的互余关系，以及反映边角之间关系的锐角三角函数，进而直接指出利用这些关系，根据除直角以外的两个已知条件（其中至少有一个是边）就可以解直角三角形了，并通过典型例题对如何解直角三角形进行示范；而将解直角三角形的理论依据的讨论、解直角三角形的各类方法的梳理安排在章节小结中进行. 最后，教科书安排了三个实际问题，介绍解直角三角形等知识在实际中的应用，其解决过程均为先将实际问题抽象为数学问题——直角三角形中的度量问题，再通过解直角三角形得出实际问题的答案；在此基础上，教科书归纳出利用解直角三角形的知识解决实际问题的一般过程.

锐角三角函数是初中数学中的重要概念，它反映了直角三角形中锐角与两边的比之间的关系，也是解直角三角形的基础；锐角三角函数定义的合理性，以及用含有几个字母的符号 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 表示函数等，学生过去没有接触过；其定义过程既体现了从特殊到一般的方法，又以理性思考为主，对学生来说有一定难度. 因此，锐角三角函数的概念既是本章的重点，也是难点. 解直角三角形彻底解决了与直角三角形的有关度量问题，是初中数学中的重要内容；同时解直角三角形具有较强的综合性，三角形全等的判定定理是解直角三角形的理论依据，解直角三角形时需要综合运用锐角三角函数、勾股定理等知识. 解直角三角形也是本章的重点和难点.

四、课时安排

本章教学时间约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

34.1　锐角三角函数　　7 课时

34.2　解直角三角形及其应用　5课时

数学活动

小结　2课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 创设适当情境，引入核心内容

“数学是自然的”，数学的发展来源于实际需要或数学内部的需要. 为了体现本章核心知识的自然性以及学习的必要性，本章注意从实际问题或数学问题出发，通过创设适当情境加以引入. 例如，章引言从比萨斜塔纠偏的实际问题出发，研究用塔身中心线与垂直中心线所成的角来描述比萨斜塔的倾斜程度的问题. 从数学角度看，这个问题就是：已知直角三角形的某些边长，求其锐角的度数，本质上就是要研究直角三角形中边角之间的关系. 进一步从数学角度对于直角三角形的组成要素——边、角的关系加以梳理，我们知道三边之间的关系——勾股定理，两个锐角之间的关系——互余，边角之间的关系——大边对大角、大角对大边. 为了解决上述问题，需要进一步研究边角之间的关系，从而引出本章研究的主要内容，即通过引进锐角三角函数，建立直角三角形中边角之间的关系，并利用锐角三角函数等知识，解决包括上述问题在内的与直角三角形有关的度量问题. 从什么角度研究直角三角形中边角之间的关系，以及建立边与角之间的何种关系，是引入锐角三角函数时的首要问题，也是关键环节. 为此，教科书在“34.1　锐角三角函数”的开篇，设置了修建扬水站时需要准备多长水管的实际问题. 解决这个问题需要用到“在直角三角形中，30°角所对的边是斜边的一半”，其等价形式为“在直角三角形中，30°角所对的边与斜边的比总是常数$\frac{1}{2}$”，后者反映了直角三角形中，30°角和该角的对边与斜边的比之间的对应关系；由此获得启示，建立直角三角形中边角之间的关系，可以通过研究锐角和它的对边与斜边的比之间的关系进行，从而引出研究直角三角形中边角关系的具体内容和方式. 再如，在“34.2.1 解直角三角形”的开始部分，教科书解决章引言中比萨斜塔的倾斜程度的问题，这个问题实际上是已知直角三角形的两边求其锐角，它属于解直角三角形的范畴，由此自然地引出解直角三角形的内容.

2. 注意加强知识间的联系

锐角三角函数与相似三角形有着密切联系. 相似三角形的性质是锐角三角函数概念的基础，只有利用“相似三角形的对应边成比例”才能得到锐角三角函数定义的合理性，教科书在给出锐角三角函数概念的过程中充分利用了这种联系. 例如，教科书在研究锐角的正弦概念时，虽然由特殊直角三角形的性质得出结论：在一个直角三角形中，如果一个锐角等于30°（或45°），那么不管三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比值都等于$\frac{1}{2}$（或$\frac{\sqrt{2}}{2}$）；但由相似三角形的知识可以得到一般方法. 事实上，有一个锐角等于30°（或45°）的所有直角三角形都相似，它们的对应边成比例，因此不管大小如何，30°（或45°）角的对边与斜边的比都是$\frac{1}{2}$（或$\frac{\sqrt{2}}{2}$）. 对于一般的直角三角形，当一个锐角的度数一定时，那么这样的直角三角形都相似，它们的对应边成比例. 因此，不管直角三角形的大小如何，这个锐角的对边与斜边的比是一个定值，我们把该锐角的对边与斜边的比定义

为这个锐角的正弦. 它只与锐角的大小有关，而与直角三角形的大小无关. 类似地，由相似三角形的知识可以定义其他锐角三角函数.

直角三角形全等的判定定理是解直角三角形的理论依据. 由直角三角形全等的判定定理可知，对于两个直角三角形，如果已知除直角外的两个元素分别相等（其中至少有一个是边），那么这两个直角三角形全等. 从而一个直角三角形的形状和大小由三边和两个锐角中的两个元素（其中至少有一个是边）唯一确定. 因此从理论上说，就可以利用这两个元素求出其余的元素. 有了锐角三角函数知识，结合直角三角形的两个锐角互余以及勾股定理，就可由这两个元素的大小求出其他元素的大小，这就是解直角三角形. 可见，解直角三角形与直角三角形全等的判定定理、勾股定理等知识有着密切的联系. 从联系的角度看待数学知识，对我们更深入地理解相关知识，提高综合应用能力等都很有帮助.

加强数学知识之间的联系，对于养成良好的学习习惯，感悟数学学习、研究方法，培养分析和解决问题的能力，积累数学活动经验有着重要作用. 本章教学中要注意加强知识间的联系，使学生的学习形成正迁移.

3. 加强探究性，发展学生的思维能力

本章编写时，对一些重要知识点或关键环节，通过设置“思考”“探究”“归纳”等栏目，提供学生探索交流的空间，发展学生的思维能力；同时，注意结合本章内容的特点以及学生的年龄特征（学习本章内容的学生已经是九年级），对于其中的一些结论，教科书在设置一些探究性活动栏目后，直接给出探究的结论，而将结论的探索过程完全留给学生，以进一步加大学生思维力度和探索的空间. 例如，教科书在详细研究了锐角的正弦概念后，通过一个“探究”栏目提出问题：“在直角三角形中，当一个锐角确定时，它的对边与斜边的比随之确定. 那么，此时其他边之间的比是否也确定了呢？为什么？”接着，教科书直接给出锐角的余弦、正切的概念，而将“邻边与斜边的比、对边与邻边的比都是确定的”这个结论的探究过程完全留给学生自己完成. 再如，对于30°，45°，60°这几个特殊角的三角函数值，教科书也是首先设置一个“探究”栏目，在栏目中提出问题：“两块三角尺中有几个不同的锐角？这几个锐角的正弦值、余弦值和正切值分别是多少？”然后用一个表格直接给出了这几个特殊角的三角函数值，而将求这些角的三角函数值的过程留给学生完成. 再如，对于解直角三角形，教科书通过一个“探究”栏目提出问题：“（1）在直角三角形中，除直角以外的五个元素之间有哪些关系？（2）知道五个元素中的几个，就可以求其他元素了？”将这个栏目中真正需要探究的第二问的思考过程完全留给学生，而直接给出结论：利用边、角之间的相互关系，知道三边和两个锐角中的两个元素（其中至少有一个是边），就可以求出其余的元素（俗称“知二求三”）；进而给出“知二求三”解直角三角形的例题示范；并安排相当数量的“知二求三”解直角三角形的练习题和习题，使学生对“知二求三”的可行性以及具体求解方法有充分体验，获得较多的感性认识；最后在章小结中提出问题：“两个直角三角形全等，要具备什么条件？为什么已知一条边和一个锐角，或两条边，就能解这个直角三角形？你能根据不同的已知条件（例如，已知斜边和一个锐角），归纳相应的解直角三角形的方法吗？”让学生进一步思考直角三角形中能“知二求三”的理论依据，并对“知二求三”的具体方法进行分类梳理，从而对解直角三角形的认识全面升华为理性的高度.

这种编写方式为学生提供了更加广阔的探索空间，能让学生独立思考，学会思考，有效改进学习方式，发展学生的思维能力和创新意识.

4. 加强与实际的联系，体现建模思想

锐角三角函数和解直角三角形有着紧密联系，锐角三角函数是解直角三角形的基础，解直角三角形的理论又为解决一些实际问题提供了工具，它与实际联系紧密. 因此本章编写时，注意加强与实际的联系. 例如，第 34.1 节利用确定山坡上所铺设的水管的长度问题，引出锐角的正弦的概念；第 34.2 节结合确定萨斜塔倾斜程度问题，引出解直角三角形的内涵和方法等. 再如，教科书通过丰富有趣的具有实际背景的例题和习题，从不同角度展示解直角三角形在实际中的广泛应用. 教科书将锐角三角函数和解直角三角形的内容与实际问题紧密联系，形成“你中有我，我中有你”的格局. 一方面，可以让学生体会锐角三角函数和解直角三角形的理论来源于实际，是实际的需要；另一方面，让学生看到它们在解决实际问题中所起的作用. 再者，通过解决实际问题的过程：先把实际问题抽象出数学问题，再解决数学问题得到数学问题的答案，最后将数学问题的答案回到实际问题，使学生进一步体验数学模型思想和数学建模过程，培养应用意识，发展他们的数学抽象能力，以及分析问题、解决问题的能力. 同时，这种处理方式符合学生的认知规律，有利于调动学生学习数学的积极性，丰富有趣的实际问题也能够激发学生的学习兴趣.

六、对本章教学的建议

1. 加强锐角三角函数概念探究过程，揭示概念的内涵

本章的一个重要教学目标是使学生探究并理解锐角三角函数的概念，教学中应按教科书提供的思路，让学生充分经历“实际问题引入——研究特殊直角三角形——研究一般直角三角形——给出锐角的正弦概念”的过程，在探究直角三角形中锐角的对边与斜边之比的不变性上下足功夫. 这样的探究过程可以帮助学生理解锐角三角函数的内涵：锐角三角函数建立了直角三角形中边与角之间的关系. 具体地，在直角三角形中，对于一个确定的锐角，它的正弦、余弦、正切分别表示这个锐角的对边与斜边之比、邻边与斜边之比、对边与邻边之比，它们都是确定的值. 需要特别指出的是，在理解锐角三角函数的内涵时，不宜突出其“函数味”，只要点出“对于锐角 A 的每一个确定的值，$\sin A$ 有唯一确定的值与它对应，所以 $\sin A$ 是 A 的函数. 同样地，$\cos A$，$\tan A$ 也是 A 的函数”即可.

2. 加强能力培养

应用锐角三角函数等有关知识解直角三角形及其相关的实际问题是锐角三角函数教学的核心任务，也是培养学生分析问题、解决问题能力的重要载体. 解直角三角形时，需要根据已知条件的特点，选择恰当的锐角三角函数，并综合运用勾股定理等直角三角形的有关知识加以解决，具有一定的灵活性和综合性. 初学阶段，学生往往不易找到解决问题的思路，特别是选不准具体的锐角三角函数，且易发生计算错误；应用锐角三角函数等有关知识解决实际问题，对数学建模能力、推理能力、运算求解能力都有较高的要求. 教学中，应注意让学生理解解直角三角形的基本原理；在此基础上，通过例题示范和必要的练习使学生切实提高推理能力、运算能力、数学建模能力；同时把握好度，控制好难度和广度，不能把锐角三角函数的教学变成题型教学.

3. **发挥计算器的作用**

本章教学中，应认真落实课程标准中“会使用计算器由已知锐角求它的三角函数值，由已知三角函数值求它的对应锐角”的要求，使学生掌握用计算器进行计算的技能. 这样，一方面，可以使学生的学习重心更好地集中在理解锐角三角函数的概念、掌握解直角三角形的原理与方法以及建立实际问题的数学模型等核心内容上；另一方面，《课标（2011 年版）》中“解直角三角形”“解决一些简单实际问题”的要求才能真正得到落实.

4. **注意数形结合**

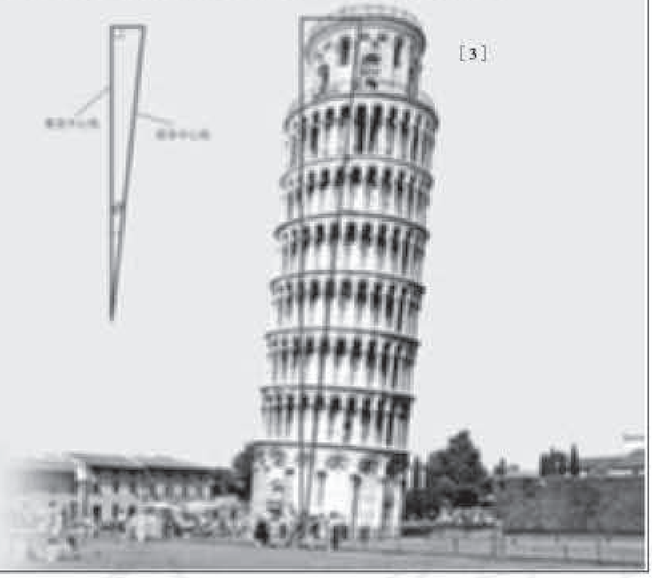
锐角三角函数的一个突出特点是它的概念的产生和应用都与图形有着密切的联系. 锐角三角函数具有鲜明的几何意义，其自变量是锐角，函数值是直角三角形中两条边的比值，因此本章内容是体现数形结合的很好的载体. 例如，对于锐角三角函数的概念，教科书利用学生对直角三角形的认识（在直角三角形中，30°角所对的边等于斜边的一半，有一个锐角为 45°的直角三角形是等腰直角三角形）以及相似三角形的有关知识引入，结合几何图形定义锐角三角函数，将数形结合起来，有利于学生理解锐角三角函数的本质. 再比如，解直角三角形在实际中有着广泛的应用，在将这些实际问题抽象成数学问题，并利用锐角三角函数解直角三角形时，也离不开几何图形. 这时往往需要根据题意，画出几何图形，通过分析几何图形得到边、角的关系，再通过计算、推理等使实际问题得到解决. 因此在本章教学时，注意加强数形结合，在引入概念、推理论证、化简计算、解决实际问题时，画图帮助分析，通过图形帮助找到直角三角形边、角之间的关系，使画图成为本章教学关注的目标之一.

第三十四章　锐角三角函数

意大利比萨斜塔在 1350 年落成时就已倾斜，其塔顶中心点偏离垂直中心线 2.1 m. 1972 年比萨地区发生地震，这座高 54.5 m 的斜塔在大幅度摇摆后仍巍然屹立，但塔顶中心点偏离垂直中心线增至 5.2 m，而且还在继续倾斜，有倒塌的危险. 当地从 1990 年起对斜塔维修纠偏，2001 年竣工，此时塔顶中心点偏离垂直中心线的距离比纠偏前减少了 43.8 cm.

根据上述信息，你能用“塔身中心线与垂直中心线所成的角 θ（如图）”来描述比萨斜塔的倾斜程度吗？[1]

从数学角度看，上述问题就是：已知直角三角形的某些边长，求其锐角的度数. 对于直角三角形，我们已经知道三边之间、两个锐角之间的关系，它的边角之间有什么关系呢？本章将通过锐角三角函数，建立直角三角形中边角之间的关系，并利用锐角三角函数等知识，解决包括上述问题在内的与直角三角形有关的度量问题.[2]



[3]

Ⅱ 教材分析

[1] 解决这个问题要用到锐角三角函数的知识，把它作为解直角三角形的引例，在 34.2.1 中给出解答.

[2] 这里给出本章研究的主要内容.

[3] 章头图是一张比萨斜塔的照片，它是本章引言的背景图.

1. “锐角三角函数”属于三角学，是《课标（2011 年版）》中“图形与几何”领域的重要内容. 中学数学把三角学分成两部分，第一部分安排在义务教育第三学段，研究锐角三角函数的概念和解直角三角形；第二部分安排在高中阶段，主要研究任意角的三角函数、解斜三角形等.

2. 本章在已研究了直角三角形的三边之间关系——勾股定理、两个锐角之间关系的基础上，利用相似三角形的性质进一步讨论直角三角形边角之间的关系. 主要包括正弦、余弦和正切等锐角三角函数的概念，以及运用锐角三角函数等知识解直角三角形等.

3. 章引言通过描述比萨斜塔的倾斜程度的实际问题引出本章主要内容. 根据问题中的数据，我们无法用已学的知识和方法解决这个问题，学习本章内容之后就能解决，从而引起学生的好奇心，激发学生的学习兴趣.

[1] 教学中可以给出几个不同出水口的高度，根据这些高度分别求出水管的长度．让学生充分感受不管直角三角形大小如何，只要一个锐角等于 30°，那么这个锐角的对边与斜边的比都等于$\frac{1}{2}$．

34.1 锐角三角函数

问题 为了绿化荒山，某地打算从位于山脚下的机井房沿着山坡铺设水管，在山坡上修建一座扬水站，对坡面的绿地进行喷灌．现测得斜坡的坡角（$\angle A$）为 30°，为使出水口的高度为 35 m，需要准备多长的水管？

图 34.1-1

这个问题可以归结为，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$BC=35$ m，求 AB（图 34.1-1）．

根据“在直角三角形中，30°角所对的边等于斜边的一半”，即

$$\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2},$$

可得 $AB=2BC=70$(m)，也就是说，需要准备 70 m 长的水管．

思考

在上面的问题中，如果出水口的高度为 50 m，那么需要准备多长的水管？[1]

在上面求 AB（所需水管的长度）的过程中，我们用到了结论：在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么无论这个直角三角形大小如何，这个角的对边与斜边的比都等于$\frac{1}{2}$．

思考

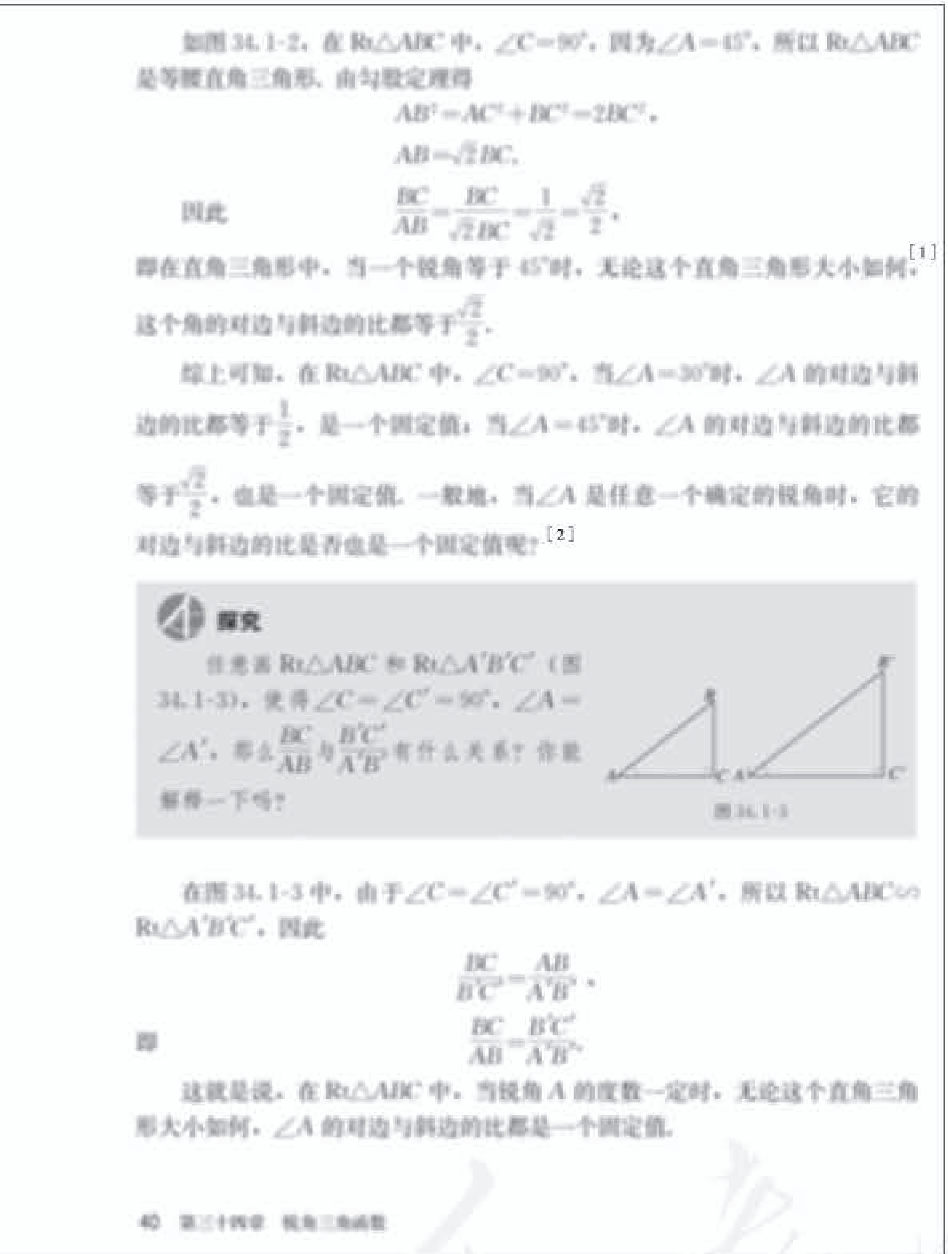
如图 34.1-2，任意画一个 Rt$\triangle ABC$，使 $\angle C=90°$，$\angle A=45°$，计算 $\angle A$ 的对边与斜边的比$\frac{BC}{AB}$，由此你能得出什么结论？

图 34.1-2

1．本节主要研究三种锐角三角函数：锐角的正弦、余弦和正切．通过本节的学习，应使学生经历探索锐角三角函数概念的过程，体会定义的“合理性”，理解锐角三角函数的概念，进一步体会变化与对应的函数思想；认识并熟记特殊角的三角函数值，并能根据这些特殊角的三角函数值说出相应的锐角；会使用计算器求锐角的三角函数值，或根据三角函数值求锐角，体会锐角与锐角三角函数值之间的对应关系．

2．本节首先研究锐角的正弦，在此基础上研究锐角的余弦和正切．

教科书从确定山坡上需要铺设水管的长度的实际问题出发，引出对锐角正弦的讨论．这个实际问题抽象成数学问题是：在直角三角形中，已知一条直角边和这条直角边所对的锐角求斜边．由于这个锐角等于 30°，所以可以利用结论“在直角三角形中，30°角所对的边等于斜边的一半”求出斜边．这个结论等价于“在直角三角形中，



如图 34.1-2，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，因为∠A=45°，所以 Rt△ABC 是等腰直角三角形. 由勾股定理得

$$AB^2=AC^2+BC^2=2BC^2,$$

$$AB=\sqrt{2}BC.$$

因此

$$\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{\sqrt{2}BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即在直角三角形中，当一个锐角等于 45°时，无论这个直角三角形大小如何，[1]这个角的对边与斜边的比都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综上可知，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，当∠A=30°时，∠A 的对边与斜边的比都等于$\frac{1}{2}$，是一个固定值；当∠A=45°时，∠A 的对边与斜边的比都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，也是一个固定值. 一般地，当∠A 是任意一个确定的锐角时，它的对边与斜边的比是否也是一个固定值呢？[2]

探究

任意画 Rt△ABC 和 Rt△A′B′C′（图 34.1-3），使得∠C=∠C′=90°，∠A=∠A′，那么$\frac{BC}{AB}$与$\frac{B'C'}{A'B'}$有什么关系？你能解释一下吗？

图 34.1-3

在图 34.1-3 中，由于∠C=∠C′=90°，∠A=∠A′，所以 Rt△ABC∽Rt△A′B′C′，因此

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'},$$

即

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}.$$

这就是说，在 Rt△ABC 中，当锐角 A 的度数一定时，无论这个直角三角形大小如何，∠A 的对边与斜边的比都是一个固定值.

40 第三十四章 锐角三角函数

[1] 教学时要注意提醒学生，由于“思考”栏目中的 Rt△ABC 是任意画出的，而且$\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$的推导过程与 Rt△ABC 的大小无关，所以这里可以说“无论这个直角三角形中的大小如何”.

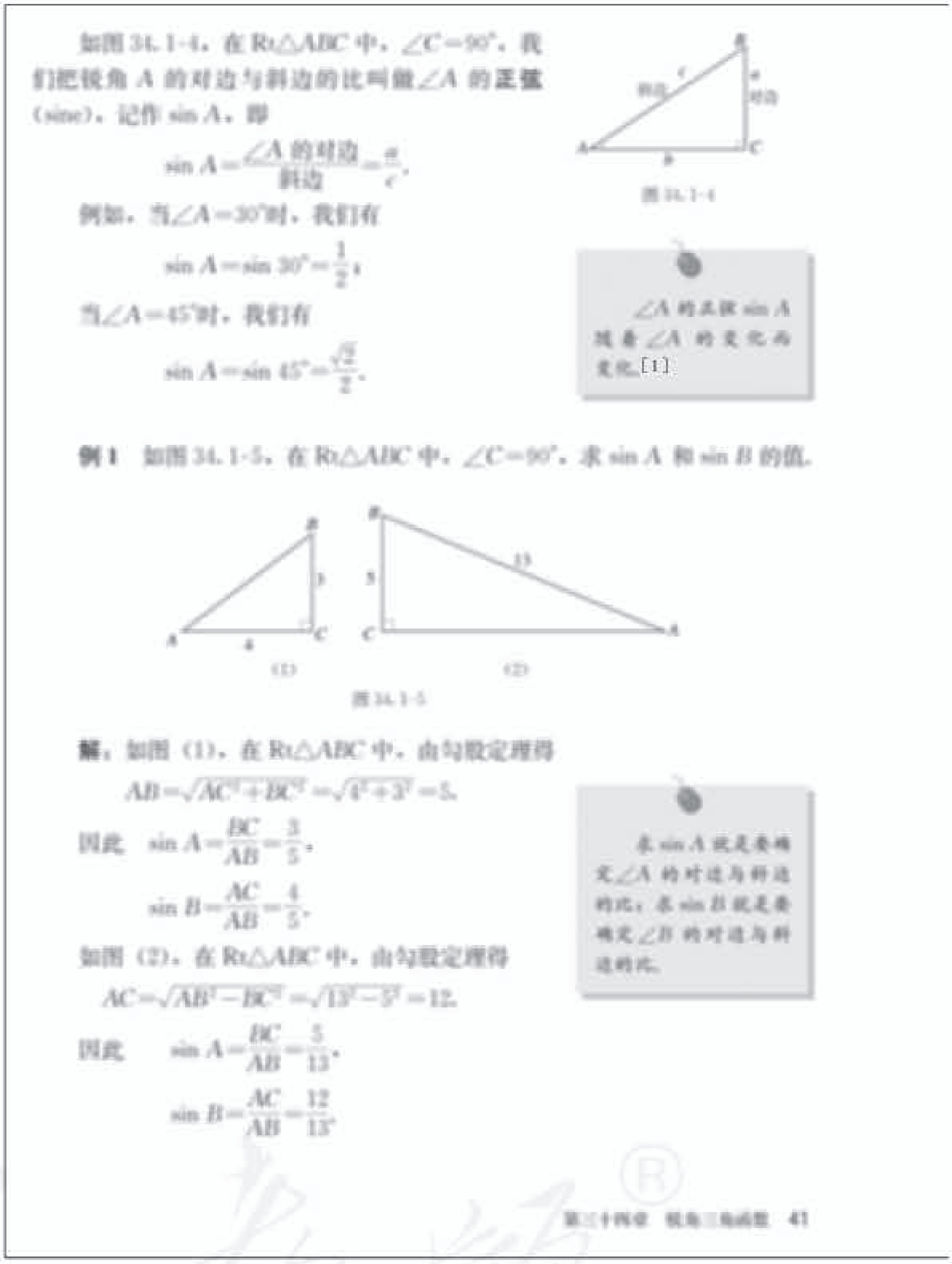
[2] 这里体现了从特殊到一般的认识过程.

如果一个锐角等于 30°，那么无论这个直角三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比都等于$\frac{1}{2}$”. 这实际上是将锐角 30°与它的对边与斜边的比（$\frac{1}{2}$）对应起来，为研究直角三角形中的边角关系提供思路，也为引出锐角的正弦概念打下基础.

3. 在直角三角形中，如果一个锐角为 45°，那么这个三角形是等腰直角三角形，因此可以求出锐角 45°所对的直角边与斜边的比值，从而在直角三角形中，将锐角 45°与它的对边与斜边的比（$\frac{\sqrt{2}}{2}$）对应起来.

4. 在直角三角形中，通过讨论锐角 30°和 45°与其所对的直角边与斜边的比之间的对应关系，有助于学生形成猜想：在一个直角三角形中，如果一个锐角确定，那么这个锐角的对边与斜边的比也就确定下来，并且不同的锐角对应不

[1] 从 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 中，可以直观地感知 $\sin A$ 随着 $\angle A$ 的变化而变化.



如图34.1-4，在Rt△ABC中，$\angle C=90^\circ$，我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的**正弦**（sine），记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

例如，当 $\angle A=30^\circ$ 时，我们有

$$\sin A=\sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$

当 $\angle A=45^\circ$ 时，我们有

$$\sin A=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

图34.1-4

$\angle A$ 的正弦 $\sin A$ 随着 $\angle A$ 的变化而变化.[1]

例1 如图34.1-5，在Rt△ABC中，$\angle C=90^\circ$，求 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值.

(1) (2)

图34.1-5

解：如图（1），在Rt△ABC中，由勾股定理得

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

因此 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$，

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$.

如图（2），在Rt△ABC中，由勾股定理得

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12.$$

因此 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$，

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$.

求 $\sin A$ 就是要确定 $\angle A$ 的对边与斜边的比；求 $\sin B$ 就是要确定 $\angle B$ 的对边与斜边的比.

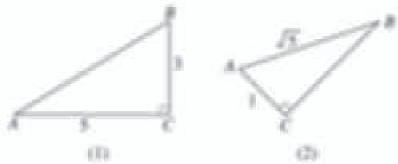
第三十四章 锐角三角函数 41

同的比值. 从而引出对一般情况的讨论，即对于任意一个确定的锐角，它的对边与斜边的比是否也是一个固定值？对于任意一个确定的锐角，教科书利用“相似三角形对应边成比例”的性质，得到对应角的对边与斜边的比值相等. 从而在直角三角形中，当锐角的度数一定时，这个锐角的对边与斜边的比是一个确定值，由此可以给出反映直角三角形中锐角和它的对边与斜边的比值之间对应关系的锐角的正弦概念.

5. 锐角的正弦概念是研究本节内容的起点，同时也是重点、关键和难点. 重点在于它是锐角三角函数的一个代表，教科书详细展开了引入锐角的正弦概念的过程；关键在于它为研究锐角的余弦、正切的概念提供范例；难点在于它是一种函数，它建立了锐角与它的对边与斜边的比之间的对应关系，对学生来说建立这种对应关系有一定的困难. 因此，教学时要充分重视锐角的正弦概念的教学，让学生真正理解它的内涵，为后面

练习

1. 如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，求 sin A 和 sin B 的值.



（第 1 题）

2. 在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠A=60°，求 sin A 的值.

探究

如图 34.1-6，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，当∠A 确定时，∠A 的对边与斜边的比随之确定. 此时，其他边之间的比是否也随之确定呢？为什么？

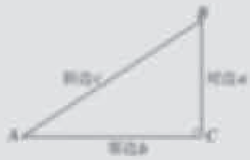


图 34.1-6

类似正弦的情况，利用相似三角形的知识可以证明（请你自己完成证明），在图 34.1-6 中，当∠A 确定时，∠A 的邻边与斜边的比、∠A 的对边与邻边的比都是确定的. 我们把∠A 的邻边与斜边的比叫做∠A 的**余弦**（cosine），记作 cos A，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},$$

把∠A 的对边与邻边的比叫做∠A 的**正切**（tangent），记作 tan A，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

∠A 的正弦、余弦、正切都是∠A 的**锐角三角函数**（trigonometric function of acute angle）.

对于锐角 A 的每一个确定的值，sin A 有唯一确定的值与它对应，所以 sin A 是 A 的函数. 同样地，cos A，tan A 也是 A 的函数.[1]

42 第三十四章 锐角三角函数

练习答案

1. （1）$\sin A=\frac{3\sqrt{34}}{34}$，

$\sin B=\frac{5\sqrt{34}}{34}$；

（2）$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[1] 通过分析锐角 A 与 $\sin A$ 的对应关系，体现它们之间的函数关系. 教学时可以引导学生分析锐角 A 与 $\cos A$，$\tan A$ 之间的函数关系.

的学习打好基础.

6. 对于锐角的正弦概念，教科书采用了从特殊到一般的方法展开讨论，在讨论 30°和 45°角的正弦的基础上，讨论锐角为任意度数的情形. 这种从特殊到一般的过程，可以使学生有较多的机会体验：在直角三角形中，当锐角的度数一定时，这个锐角的对边与斜边的比是一个固定值. 这为认识锐角的正弦概念铺设了必要的台阶，水到渠成地给出锐角的正弦概念.

在给出锐角的正弦概念之后，教科书利用定义分析了 30°和 45°角的正弦值，使学生对锐角的正弦有一个具体认识，加深学生对锐角的正弦的理解.

7. 在给出锐角的正弦概念时，要注意强调在直角三角形中，当锐角的度数确定时，它的对边与斜边的比也就确定下来. 这样对于每一个锐角，都有一个确定的比值与之对应，从而可以合理地定义锐角的正弦概念.

[1] 安排这个例题的目的是让学生巩固锐角三角函数的概念.

练习答案

1. (1)

$\sin A=\frac{5}{13}$，$\sin B=\frac{12}{13}$，

$\cos A=\frac{12}{13}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，

$\tan A=\frac{5}{12}$，$\tan B=\frac{12}{5}$.

(2)

$\sin A=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

$\sin B=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

$\cos A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

$\cos B=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

$\tan A=\frac{3}{2}$，$\tan B=\frac{2}{3}$.

2. 无变化. 因为这些直角三角形相似，对应边的比相等.

例2 如图34.1-7，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AB=10$，$BC=6$，求$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$的值.[1]

解： 由勾股定理得

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

因此 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

图34.1-7

练习

1. 分别求出下列直角三角形中两个锐角的正弦值、余弦值和正切值.

(1) (2)

（第1题）

2. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，如果各边长都扩大到原来的2倍，那么$\angle A$的正弦值、余弦值和正切值有变化吗？说明理由.

探究

两块三角尺（图34.1-8）中有几个不同的锐角？这几个锐角的正弦值、余弦值和正切值各是多少？

图34.1-8

30°，45°，60°角的正弦值、余弦值和正切值如下表：

第三十四章 锐角三角函数 43

8. 例1是已知直角三角形两条边的长求锐角的正弦值，目的是使学生巩固锐角的正弦概念. 教学时要注意让学生体会依据锐角的正弦概念进行计算，为后面学习锐角的余弦、正切做准备.

9. 由于教科书对锐角的正弦概念进行了全面细致的研究，而研究锐角的余弦、正切的思路和方法类似于锐角的正弦，因此，教科书通过"探究"栏目提出问题，引出对锐角的余弦、正切的讨论之后，直接给出锐角的余弦、正切的概念，而把探索这两个锐角三角函数概念的过程略去. 这样编写的目的是希望学生能够仿照研究锐角的正弦的思路和方法，自己完成锐角的余弦、正切的探索过程，更好地理解锐角三角函数的概念.

10. 教科书在引入锐角的正弦、余弦和正切概念之后，转入对30°，45°和60°这几个特殊角的三角函数值的研究，需要根据锐角三角函数的

锐角三角函数 \ 锐角 A	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

设图34.1-8中每块三角尺较短的边长均为1，利用勾股定理和锐角三角函数的定义可以求出这些锐角三角函数值.

例3 求下列各式的值：

(1) $\cos^2 60° + \sin^2 60°$；[1]

(2) $\frac{\cos 45°}{\sin 45°} - \tan 45°$.

$\sin^2 60°$ 表示 $(\sin 60°)^2$，即 $(\sin 60°)\cdot(\sin 60°)$.

解：(1) $\cos^2 60° + \sin^2 60°$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=1$；

(2) $\frac{\cos 45°}{\sin 45°} - \tan 45°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

$=0$.

例4 (1) 如图34.1-9(1)，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AB=\sqrt{6}$，$BC=\sqrt{3}$，求$\angle A$的度数.

(2) 如图34.1-9(2)，AO是圆锥的高，OB是底面半径，$AO=\sqrt{3}OB$，求α的度数.

图34.1-9

44 第三十四章 锐角三角函数

[1] 这里通过具体计算得到
$$\cos^2 60° + \sin^2 60° = 1,$$
教学中不要一般化为
$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

概念求这几个特殊角的三角函数值，可以看成是三角函数概念的巩固、应用. 求这几个特殊角的三角函数值，一方面让学生进一步熟悉锐角的正弦、余弦和正切的概念；另一方面也需要学生熟记这些特殊角的三角函数值，以便利用这些函数值进行一些简单的三角计算.

11. 对于这几个特殊角的三角函数值的探讨，教科书首先设置了一个“探究”栏目，要求学生利用两块三角尺求出它们所包含的锐角30°，45°和60°的正弦、余弦和正切的值，然后教科书直接在表格中给出了结果. 这样设计的目的，是将求特殊角的三角函数值的过程留给学生，让他们通过自主探索，进一步体会角度与比值之间的对应关系，深化对锐角三角函数概念的理解.

12. 利用三角尺求这些特殊角的三角函数值时可以采用不同的方法，比如可以通过度量三角形各边的长度，再根据锐角三角函数的概念求得.

[1] 这里的目的是让学生对锐角三角函数对应关系的特点（即一一对应）有所认识，教学时不要过多强调.

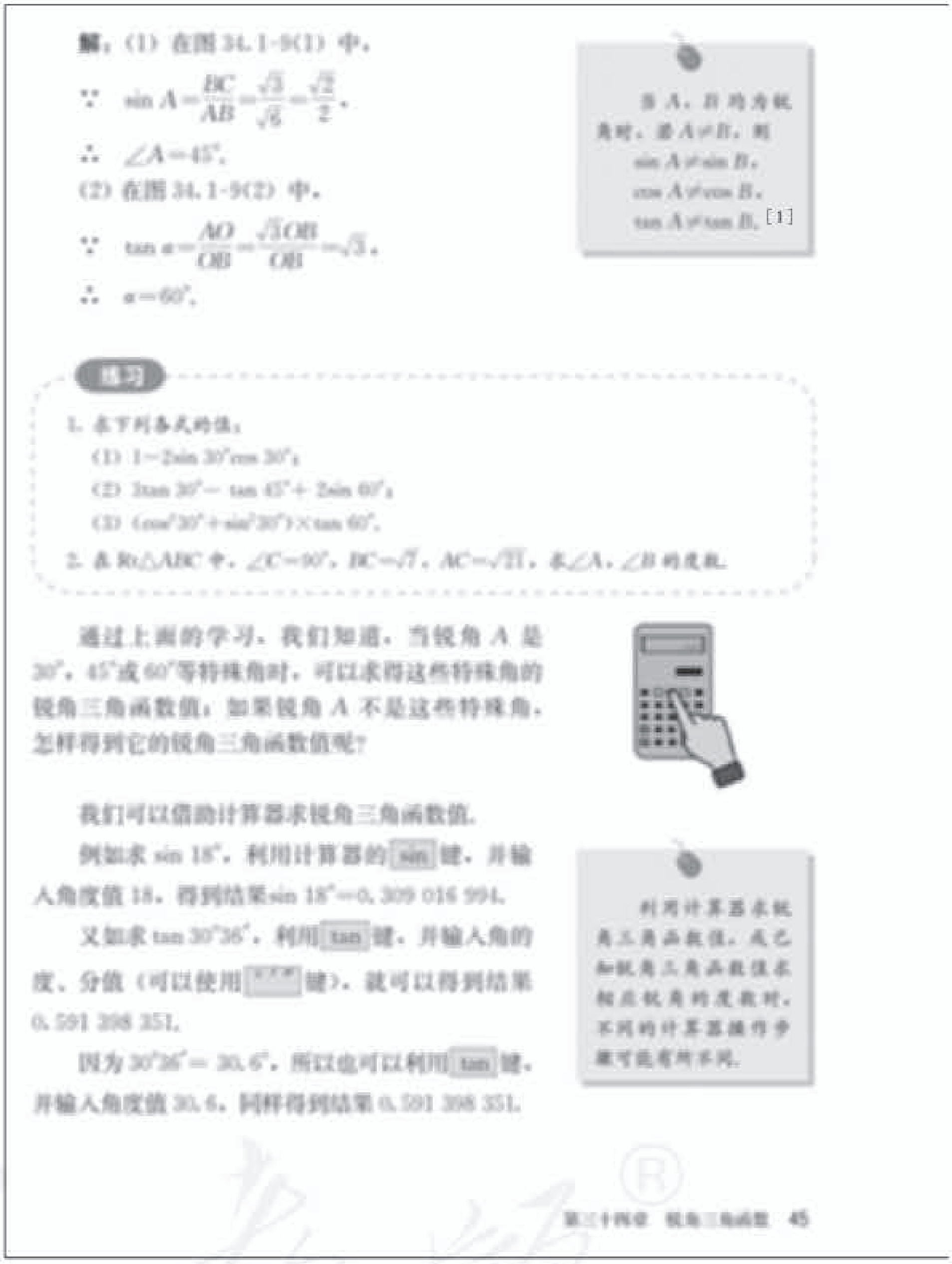
练习答案

1. （1）$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）$2\sqrt{3}-1$；

（3）$\sqrt{3}$.

2. $\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$.



解：（1）在图 34.1-9(1) 中，

∵ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\angle A=45^\circ$.

（2）在图 34.1-9(2) 中，

∵ $\tan\alpha=\frac{AO}{OB}=\frac{\sqrt{3}OB}{OB}=\sqrt{3}$，

∴ $\alpha=60^\circ$.

当 A，B 均为锐角时，若 $A\neq B$，则 $\sin A\neq\sin B$，$\cos A\neq\cos B$，$\tan A\neq\tan B$. [1]

练习

1. 求下列各式的值：

（1）$1-2\sin 30^\circ\cos 30^\circ$；

（2）$3\tan 30^\circ-\tan 45^\circ+2\sin 60^\circ$；

（3）$(\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ)\times\tan 60^\circ$.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=\sqrt{7}$，$AC=\sqrt{21}$，求 $\angle A$，$\angle B$ 的度数.

通过上面的学习，我们知道，当锐角 A 是 30°，45° 或 60° 等特殊角时，可以求得这些特殊角的锐角三角函数值；如果锐角 A 不是这些特殊角，怎样得到它的锐角三角函数值呢？

我们可以借助计算器求锐角三角函数值.

例如求 $\sin 18^\circ$，利用计算器的 sin 键，并输入角度值 18，得到结果 $\sin 18^\circ=0.309\ 016\ 994$.

又如求 $\tan 30^\circ 36'$，利用 tan 键，并输入角的度、分值（可以使用 ° ′ ″ 键），就可以得到结果 0.591 398 351.

因为 $30^\circ 36'=30.6^\circ$，所以也可以利用 tan 键，并输入角度值 30.6，同样得到结果 0.591 398 351.

利用计算器求锐角三角函数值，或已知锐角三角函数值求相应锐角的度数时，不同的计算器操作步骤可能有所不同.

第二十八章　锐角三角函数　45

当然利用这种度量的方法求得的三角函数值只是近似值，不够精确，也不容易得到教科书表格中的锐角三角函数值.

13. 在锐角三角函数中，锐角和锐角三角函数值之间是一一对应关系. 根据锐角的度数可以求对应的锐角三角函数值；反过来，也可以根据锐角三角函数值求得与之对应的唯一的锐角. 例 3 和例 4 就反映了这两方面的问题. 例 3 是根据特殊角的三角函数值进行计算，实际上是已知锐角求锐角三角函数的值. 例 4 是在直角三角形中，已知两边或两边的关系求锐角的度数，最后可化归为由锐角三角函数值求相应的锐角. 教学中要注意引导学生比较这两个例题，看清它们的实质.

14. 对于 30°，45° 和 60° 这些特殊角，可以根据直角三角形中各边之间的特殊关系求得它们的三角函数值. 对于一般的锐角，则可以利用计算器求其三角函数值的近似值. 由于不同品牌的

如果已知锐角三角函数值，也可以使用计算器求出相应锐角的度数.

例如，已知 $\sin A=0.501\ 8$，用计算器求锐角 A 可以按照下面方法操作：

依次按键 2nd F sin ，然后输入函数值 0.501 8，得到 $\angle A=30.119\ 158\ 67°$（这说明锐角 A 精确到 1° 的结果为 30°）.

还可以利用 2nd F °′″ 键，进一步得到 $\angle A=30°07'08.97''$（这说明锐角 A 精确到 1′ 的结果为 30°7′，精确到 1″ 的结果为 30°7′9″）.

练习

1. 用计算器求下列锐角三角函数值.

(1) $\sin 20°$，$\cos 70°$；

$\sin 35°$，$\cos 55°$；

$\sin 15°32'$，$\cos 74°28'$；

(2) $\tan 3°8'$，$\tan 80°25'43''$.

2. 已知下列锐角三角函数值，用计算器求其相应锐角的度数：

(1) $\sin A=0.627\ 5$，$\sin B=0.054\ 7$；

(2) $\cos A=0.625\ 2$，$\cos B=0.165\ 9$；

(3) $\tan A=4.842\ 5$，$\tan B=0.881\ 6$.

分析第 1(1) 题的结果，你能得出什么猜想？你能说明自己的猜想吗？

习题 34.1

复习巩固

1. 分别求出图中 $\angle A$，$\angle B$ 的正弦值、余弦值和正切值.

（第 1 题）

2. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，当 $\angle A$ 确定时，它的正弦值是否随之确定？余弦值呢？正切值呢？为什么？

46 第三十四章 锐角三角函数

练习答案

1. (1) $\sin 20°\approx 0.3420$，
$\cos 70°\approx 0.3420$；
$\sin 35°\approx 0.5736$，
$\cos 55°\approx 0.5736$；
$\sin 15°32'=0.2678$，
$\cos 74°28'=0.2678$.

(2) $\tan 3°8'=0.0548$，
$\tan 80°25'43''=5.9304$.

2.

(1) $A=38°51'57''$，
$B=3°8'8''$；

(2) $A=51°18'11''$，
$B=80°27'2''$；

(3) $A=78°19'56''$，
$B=41°23'58''$.

计算器的操作步骤可能不同，教科书仅就一般的步骤进行了介绍，教学中要引导学生阅读计算器的使用说明，按照操作步骤进行计算.

15. 对于使用计算器进行三角函数值的计算，教科书分别就已知锐角求其三角函数值和已知三角函数值求相应的锐角两个方面进行了介绍. 教学中可以适当增加这两方面的例题和练习，让学生充分体会锐角与其三角函数值之间的对应关系，进一步理解锐角三角函数的概念.

16. 本节最后一个“练习”栏目中的第1(1)题，意在让学生通过探索发现公式

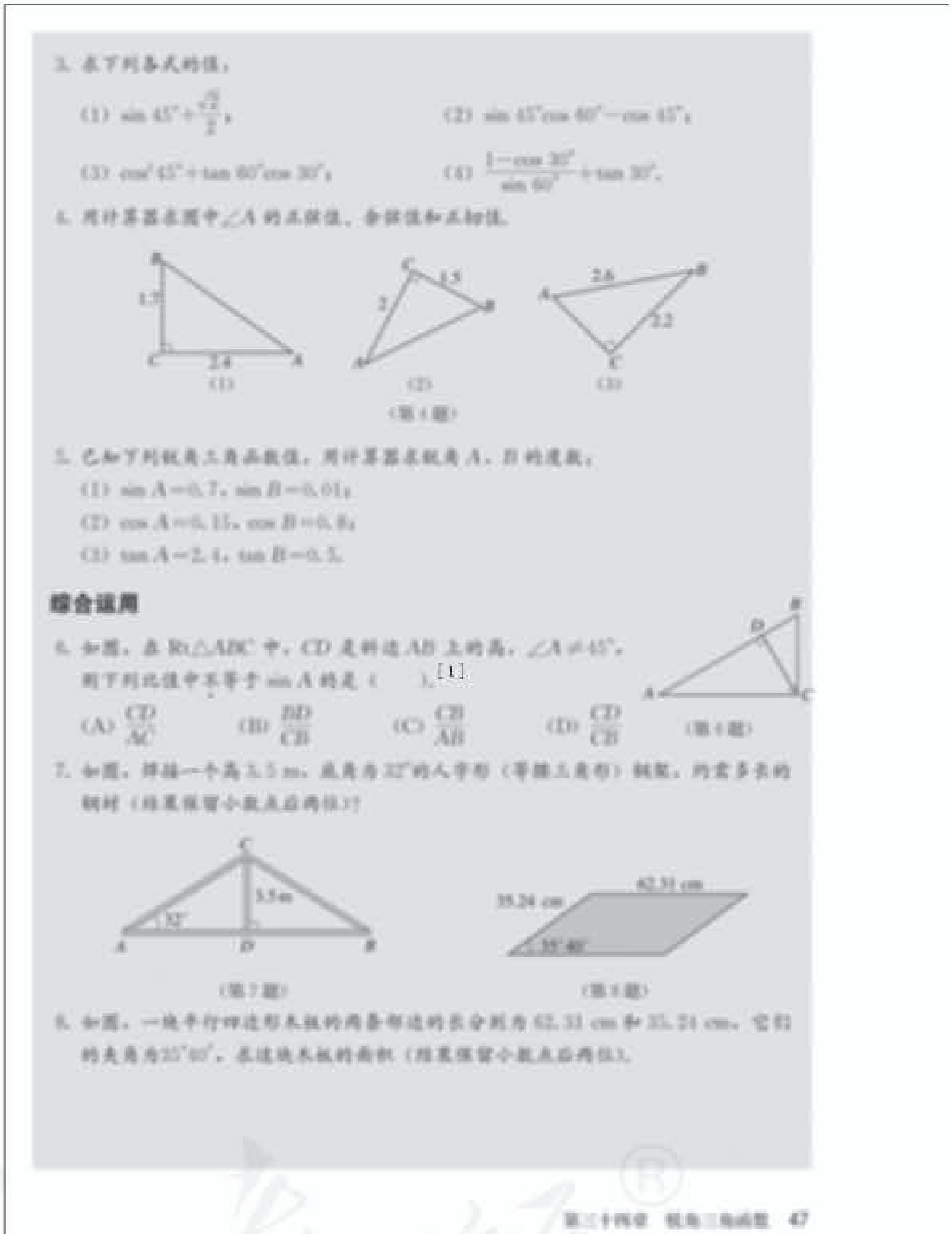
$$\sin A=\cos(90°-A).$$

对于这个公式，让学生有所体会即可，不要求学生记忆，更不要求学生会用，教学中要注意把握教学要求.

习题 34.1

1. “复习巩固”层次的题目，从锐角的正

[1] 本题可以直接求解，也可以采用排除法求解.



3. 求下列各式的值：

(1) $\sin 45°+\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\sin 45°\cos 60°-\cos 45°$；

(3) $\cos^2 45°+\tan 60°\cos 30°$；　　(4) $\frac{1-\cos 30°}{\sin 60°}+\tan 30°$.

4. 用计算器求图中∠A 的正弦值、余弦值和正切值.

（第 4 题）

5. 已知下列锐角三角函数值，用计算器求锐角 A，B 的度数：

(1) $\sin A=0.7$，$\sin B=0.01$；

(2) $\cos A=0.15$，$\cos B=0.8$；

(3) $\tan A=2.4$，$\tan B=0.5$.

综合运用

6. 如图，在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的高，$\angle A\neq 45°$，则下列比值中不等于 $\sin A$ 的是（　　）.[1]

(A) $\frac{CD}{AC}$　　(B) $\frac{BD}{CB}$　　(C) $\frac{CB}{AB}$　　(D) $\frac{CD}{CB}$

（第 6 题）

7. 如图，焊接一个高 3.5 m，底角为 32° 的人字形（等腰三角形）钢架，约需多长的钢材（结果保留小数点后两位）？

（第 7 题）　　（第 8 题）

8. 如图，一块平行四边形木板的两条邻边的长分别为 62.31 cm 和 35.24 cm，它们的夹角为 35°40′，求这块木板的面积（结果保留小数点后两位）.

第二十八章　锐角三角函数　47

弦、余弦和正切的概念，30°，45°和 60°这些特殊角的三角函数值，使用计算器求三角函数值，以及由三角函数值求相应的锐角等方面对本节内容进行了全面复习. 第 1 题是已知直角三角形的两条边（包括已知斜边和直角边，以及已知两条直角边的情形），求直角三角形的两个锐角的三角函数值，这道题主要复习锐角三角函数的概念，结果不必用近似值表示. 第 2 题是从锐角的三角函数值由给定的锐角唯一确定的角度复习锐角三角函数的概念. 第 3 题是利用特殊角的三角函数值进行计算. 第 4 题与第 1 题的类型相同，只是需要利用计算器求锐角三角函数的近似值. 第 5 题是利用计算器，由锐角三角函数值求相应的锐角的度数，结果可以用“××°××′××″”的形式表示.

2. “综合运用”的第 6 题需要利用锐角的正弦概念，分别在 Rt△ABC，Rt△ACD，Rt△CBD（注意 $\angle A=\angle BCD$）中写出 $\sin A$ 的表达式，

拓广探索

9. 用计算器求下列锐角三角函数值，并填入表中。

锐角 A	…	15°	18°	20°	22°	…	80°	82°	84°	…
$\sin A$										
$\cos A$										
$\tan A$										

随着锐角 A 的度数不断增大，$\sin A$ 有怎样的变化趋势？$\cos A$ 呢？$\tan A$ 呢？你能说明自己的结论吗？

10. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A$ 的正弦、余弦之间有什么关系？（提示：利用锐角三角函数的定义及勾股定理。）[1]

阅读与思考

一张古老的“三角函数表”

人们很早就开始研究天文学，以便通过观察天上日月星辰的位置和运行情况，解决有关计时、历法、航海、地理等许多问题。对天体的观察和测量离不开计算，这促进了数学的发展。三角函数的产生和发展与天文学有密切的关系。

保存至今的一张古老的“三角函数表”，是2世纪的希腊天文学家、地理学家、数学家托勒密（Ptolemy）所著的《天文学大成》一书中的一张“弦表”。它对当时的天文计算有重要作用。这张“弦表”和我们现在所用的正弦、余弦表有所不同，它是把半径为60（古代巴比伦人采用60进制记数，这也影响了希腊人）的圆中度数是 θ 的弧（即圆心角 θ 所对的弧）所对的弦长制成了表，其中 θ 从 $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ 到 180° 每隔 $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ 依次取值。

你可能会想，这张“弦表”中的弧、弦长等与锐角三角函数有关吗？

利用我们现在已经学习过的圆和锐角三角函数的知识可知，半径 r、圆心角 θ 及其所对的弦长 l 之间的关系为 $l=2r\sin\frac{\theta}{2}$（图1），从而 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{l}{2r}$。可见，当 r 为固定值，θ、l 在表中对应给出时，就可以得到 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的值。因

图1

48 第三十四章 锐角三角函数

[1] 由正弦、余弦的定义得

$$\sin A=\frac{BC}{AB},$$
$$\cos A=\frac{AC}{AB},$$

由勾股定理得 $AB^2=AC^2+BC^2$，所以 $\sin^2A+\cos^2A=1$.

本题有一定的综合性.

有一定的综合性. 第 7 题是一个实际问题，可以转化为数学问题：“在直角三角形中，已知一个锐角和一条直角边，求斜边和另一条直角边.”本题可以利用锐角的正弦、余弦，以及勾股定理等加以解决. 第 8 题也是实际问题，解决它需要用到锐角的正弦和三角形的面积公式等.

3. “拓广探索”的第 9 题要利用计算器探索规律：随着锐角 A 度数的不断增大，$\sin A$ 和 $\tan A$ 的值不断增大，而 $\cos A$ 的值不断减小. 在解释这个规律时，可以提示学生先限定直角三角形某条边的长度不变，考察当锐角 A 变化时，其他边的变化情况，从而判断锐角 A 的正弦、余弦和正切值的变化趋势. 在本题的探索过程中，学生未必能看出当锐角 A 不断增大，$\sin A$ 趋于 1，$\cos A$ 趋于 0，$\tan A$ 趋近于无穷大等结论，教学时可以根据学生的实际情况进行总结. 第 10 题是让学生利用锐角三角函数的概念以及

[1] 教学中，可以简要介绍三角函数表.

比，这张“弦表”表面上是由弧的度数 θ 对应弦长 l，实际上隐含了与 θ 对应的 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的值，也就是说，它相当于现在的正弦（$\sin\alpha$）表，其中的角 $\alpha\left(=\frac{\theta}{2}\right)$ 从 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 到 90° 每隔 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 依次取值.

托勒密在《天文学大成》一书中还介绍了他利用几何方法推导“弦表”的过程，这需要进行许多严密的推理和仔细的计算. 由于当时既没有现成的计算公式，又没有先进的计算工具，所以制作这张“弦表”要付出艰辛的努力. 这张“弦表”极大地促进了三角学在天文测量等应用方面的发展，人们可以直接利用上述计算结果解决有关问题，这带来很多便利，因此托勒密编制“弦表”在数学史上是值得纪念的一大贡献.


托勒密

随着人们对数学研究的不断深入，正弦、余弦、正切等锐角三角函数进一步发展成三角函数，对数的产生极大地提高了三角函数计算速度，微积分的出现又带来利用级数计算三角函数的方法……后来的三角函数表正是在这些成果的基础上的不断改进，在科学研究、生产实践、军事活动等诸多领域中，这些三角函数表比托勒密编制的“弦表”发挥了大得多的作用，它们成为许多人手中应用极其广泛的计算工具.[1]

勾股定理等发现公式：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，教学中，发现这个结论即可，不要求学生记忆，更不要求学生会用.

阅读与思考

三角函数的产生、发展与天文学有着密切的关系. 教科书在“阅读与思考”中，从托勒密的“弦表”谈起，介绍了这张古老的三角函数表以及三角函数在天文学、数学等各个领域的广泛应用. 教学时可以引导学生查阅资料，了解更多的有关三角函数产生、发展和应用的知识.

34.2 解直角三角形及其应用

[1] 这是一个从特殊到一般的过程.

34.2.1 解直角三角形

我们回到本章引言提出的比萨斜塔倾斜程度的问题.

1972 年的情形，设塔顶中心点为 B，塔身中心线与垂直中心线的夹角为 $\angle A$，过点 B 向垂直中心线引垂线，垂足为点 C（图 34.2-1）．在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=5.2$ m，$AB=54.5$ m，因此

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5.2}{54.5}\approx 0.0954.$$

利用计算器可得 $\angle A\approx 5^\circ 28'$.

类似地，可以求出 2001 年纠偏后塔身中心线与垂直中心线的夹角．你能求出来吗？

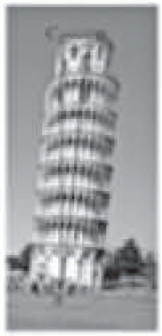


图 34.2-1

如果将上述实际问题抽象为数学问题，就是已知直角三角形的斜边和一条直角边，求它的锐角的度数.[1]

一般地，直角三角形中，除直角外，共有五个元素，即三条边和两个锐角．由直角三角形中的已知元素，求出其余未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

探究

(1) 在直角三角形中，除直角外的五个元素之间有哪些关系？

(2) 知道五个元素中的几个，就可以求其余元素？

如图 34.2-2，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c，那么除直角 $\angle C$ 外的五个元素之间有如下关系：

(1) 三边之间的关系

$$a^2+b^2=c^2\ （勾股定理）；$$

图 34.2-2

50 第三十四章 锐角三角函数

1. 本节主要学习解直角三角形及其在实际问题中的应用．我们知道，在直角三角形中，勾股定理反映了三边之间的关系，三角形的内角和定理反映了三个角之间的关系，而锐角三角函数反映了边与角之间的关系．本节利用锐角三角函数，结合勾股定理、三角形内角和定理等知识解直角三角形．通过本节的学习，学生应全面掌握直角三角形中各个元素之间的关系，并能利用这些关系解直角三角形.

2. 教科书首先解决章引言中比萨斜塔的倾斜程度问题．从数学上看，这个问题实质是已知直角三角形的斜边和一个锐角的对边，求这个锐角．解决这个实际问题的主要目的是引出解直角三角形的内容．教科书在解决了这个问题后，将其一般化并加以推广，给出解直角三角形的内涵，即由直角三角形中的已知元素（边、角），求出其余未知元素（边、角）的过程.

3. “探究”栏目安排的第一个活动是，让学

[1] 求出 a 后，还可以利用勾股定理求 c. 教学时应鼓励学生用不同方法求解，以熟悉直角三角形中各元素之间的关系.

(2) 两锐角之间的关系

$$\angle A+\angle B=90^\circ;$$

(3) 边角之间的关系

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},$$

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

上述 (3) 中的 A 都可以换成 B，同时把 a，b 互换.

利用这些关系，知道其中的两个元素（至少有一个是边），就可以求出其余三个未知元素.

例 1 如图 34.2-3，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{6}$，解这个直角三角形.

图 34.2-3

解：∵ $\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，

∴ $\angle A=60^\circ$，

$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

$AB=2AC=2\sqrt{2}$.

例 2 如图 34.2-4，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=35^\circ$，$b=20$，解这个直角三角形（结果保留小数点后一位）.

图 34.2-4

解：$\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-35^\circ=55^\circ$.

∵ $\tan B=\frac{b}{a}$，

∴ $a=\frac{b}{\tan B}=\frac{20}{\tan 35^\circ}\approx 28.6$.

∵ $\sin B=\frac{b}{c}$，

∴ $c=\frac{b}{\sin B}=\frac{20}{\sin 35^\circ}\approx 34.9$.[1]

生全面梳理直角三角形中元素之间的关系. 教学时应引导学生分别从边与边之间的关系、角与角之间的关系、角与边之间的关系等方面进行总结. 熟练掌握这些关系是准确、迅速解直角三角形的关键.

4. “探究”栏目安排的第二个活动是探究解直角三角形的条件，本质是探究确定直角三角形的条件. 可以从直角三角形全等的判定定理入手，其探究过程可以安排在章、节小结中进行，也可以安排在此处进行. 教学中应根据学生的基础和认知能力灵活安排.

5. 例 1、例 2 对如何解直角三角形作出示范.

例 1 是已知直角三角形的两条直角边解直角三角形. 教科书给出的解法是先利用正切求出锐角，再利用“30°角所对的边是斜边的一半”求出斜边；也可以先利用勾股定理求出斜边，再利用锐角三角函数值求出锐角. 教学中可以引导学

练习

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，根据下列条件解直角三角形：

(1) $c=30$，$b=20$；　(2) $\angle B=72^{\circ}$，$c=14$；　(3) $\angle B=30^{\circ}$，$a=\sqrt{7}$.

34.2.2 应用举例

解直角三角形的应用非常广泛，下面举一些例子.

例 3 2012 年 6 月 18 日，“神舟”九号载人航天飞船与“天宫”一号目标飞行器成功实现交会对接.“神舟”九号与“天宫”一号的组合体在离地球表面 343 km 的圆形轨道上运行，如图 34.2-5，当组合体运行到地球表面 P 点的正上方时，从中能直接看到的地球表面最远的点在什么位置？最远点与 P 点的距离是多少（地球半径约为6 400 km，π 取 3.142，结果取整数）？

图 34.2-5

分析：从组合体中能直接看到的地球表面最远点，是视线与地球相切时的切点.

如图 34.2-5，本例可以抽象为以地球中心为圆心、地球半径为半径的⊙O 的有关问题：其中点 F 是组合体的位置，FQ 是⊙O 的切线，切点 Q 是从组合体中观测地球时的最远点，$\overset{\frown}{PQ}$的长就是地球表面上 P，Q 两点间的距离. 为计算$\overset{\frown}{PQ}$的长需先求出$\angle POQ$（即 α）的度数.

在解决例 3 的问题时，我们综合运用了圆和解直角三角形的知识.

解：设$\angle POQ=\alpha$，在图 34.2-5 中，FQ 是

52 第三十四章 锐角三角函数

练习答案

(1) $a=10\sqrt{5}$，
$\angle A=48^{\circ}11'23''$，
$\angle B=41^{\circ}48'37''$；

(2) $a\approx4.3$，
$b\approx13.3$，
$\angle A=18^{\circ}$；

(3) $b=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，$c=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，
$\angle A=60^{\circ}$.

生采用不同方法解直角三角形，以使学生熟悉直角三角形中的各种关系.

例 2 是已知直角三角形的一个锐角和这个锐角的对边解这个直角三角形. 类似例 1，教学中也要注意引导学生采用不同方法解直角三角形.

6. 解直角三角形在实际中有着非常广泛的应用. 教科书通过 3 道例题，说明它在测量、建筑、航海等方面的应用. 用解直角三角形的有关知识解决实际问题的关键是借助图形，将实际问题转化为解直角三角形的问题，并分析问题中的数量关系，将其归结为直角三角形中元素之间的关系. 因此，教学时，尤其是在开始阶段，教师要注意引导学生画出示意图，将实际问题中的数量关系在图形中反映出来，把数和形结合起来，提高学生分析问题和解决问题的能力.

7. 例 3 以“神舟”九号载人航天飞船与“天宫”一号目标飞行器成功实现交会对接为背景，体现了时代气息. 解决例 3 中的实际问题，

[1] 教学中，应引导学生回顾仰角、俯角的概念.

$\odot O$ 的切线，$\triangle FOQ$ 是直角三角形.

$\because \quad \cos\alpha=\dfrac{OQ}{OF}=\dfrac{6\ 400}{6\ 400+343}\approx 0.949\ 1$，

$\therefore \quad \alpha\approx 18.36^\circ$.

$\therefore \quad \overset{\frown}{PQ}$的长为

$$\frac{18.36\pi}{180}\times 6\ 400\approx\frac{18.36\times 3.142}{180}\times 6\ 400\approx 2\ 051(\text{km}).$$

由此可知，当组合体在 P 点正上方时，从中观测地球表面时的最远点距离 P 点约 2 051 km.

例 4 热气球的探测器显示，从热气球看一栋楼顶部的仰角为 30°，看这栋楼底部的俯角为 60°，热气球与楼的水平距离为 120 m，这栋楼有多高（结果取整数）？[1]

分析：我们知道，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的是仰角，视线在水平线下方的是俯角. 因此，在图 34.2-6 中，$\alpha=30^\circ$，$\beta=60^\circ$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\alpha=30^\circ$，$AD=120$，所以可以利用解直角三角形的知识求出 BD；类似地可以求出 CD，进而求出 BC.

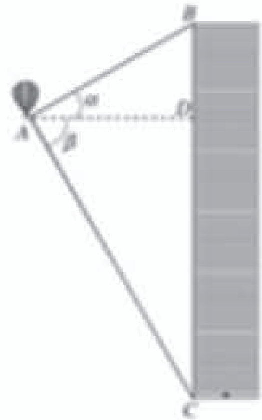


图 34.2-6

解：如图 34.2-6，$\alpha=30^\circ$，$\beta=60^\circ$，$AD=120$.

$\because \quad \tan\alpha=\dfrac{BD}{AD}$，$\tan\beta=\dfrac{CD}{AD}$，

$\therefore \quad BD=AD\cdot\tan\alpha=120\times\tan 30^\circ$

$\qquad =120\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=40\sqrt{3}$，

$\quad CD=AD\cdot\tan\beta=120\times\tan 60^\circ$

$\qquad =120\times\sqrt{3}=120\sqrt{3}$.

$\therefore \quad BC=BD+CD=40\sqrt{3}+120\sqrt{3}$

$\qquad =160\sqrt{3}\approx 277(\text{m})$.

因此，这栋楼高约为 277 m.

需要综合运用圆和解直角三角形的知识. 在圆方面，需要用切线与连接切点与圆心的半径所在直线垂直，以及弧长的计算公式；在解直角三角形方面，需要用锐角三角函数. 教学时，要注意引导学生复习圆的有关知识，体会知识的综合应用.

8. 例 4 是利用热气球测量楼高的问题. 解决这个实际问题要用到已知直角三角形中的一个锐角和一条直角边求另一条直角边的方法. 利用直角三角形的边角关系解决实际生活中的测量问题是解直角三角形的典型应用，在本章的“数学活动”中也有类似的内容. 在测量类似建筑物高度的实际问题中涉及仰角、俯角等概念，这些概念已经学习过，教学中要注意复习.

另外，在例 4 中，由于 $\alpha=30^\circ$，$\beta=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 求楼高就是求 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 BC 的长. 因此求解本例时也可以先利用余弦分别求出 AB 和 AC 的长，再根据勾股定理

练习

1. 如图，建筑物 BC 上有一旗杆 AB，从与 BC 相距 40 m 的 D 处观测旗杆顶部 A 的仰角为 50°，观测旗杆底部 B 的仰角为 45°，求旗杆的高度（结果保留小数点后一位）。

（第1题）

（第2题）

2. 如图，沿 AC 方向开山修路．为了加快施工进度，要在小山的另一边同时施工．从 AC 上的一点 B 取 $\angle ABD=140°$，$BD=520$ m，$\angle D=50°$．那么另一边开挖点 E 离 D 多远正好使 A，C，E 三点在一直线上（结果保留小数点后一位）？

例 5 如图 34.2-7，一艘海轮位于灯塔 P 的北偏东 65°方向，距离灯塔 80 n mile 的 A 处，它沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔 P 的南偏东 34°方向上的 B 处．这时，B 处距离灯塔 P 有多远（结果取整数）？

解：如图 34.2-7，在 Rt△APC 中，

$$PC=PA\cdot\cos(90°-65°)$$
$$=80\times\cos 25°$$
$$\approx 72.505.$$

图 34.2-7

在 Rt△BPC 中，$\angle B=34°$，

$\because\ \sin B=\dfrac{PC}{PB}$，

$\therefore\ PB=\dfrac{PC}{\sin B}=\dfrac{72.505}{\sin 34°}\approx 130$(n mile)．

因此，当海轮到达位于灯塔 P 的南偏东 34°方向时，它距离灯塔 P 大约 130 n mile．

54 第三十四章 锐角三角函数

练习答案

1. 7.7 m.
2. 334.2 m.

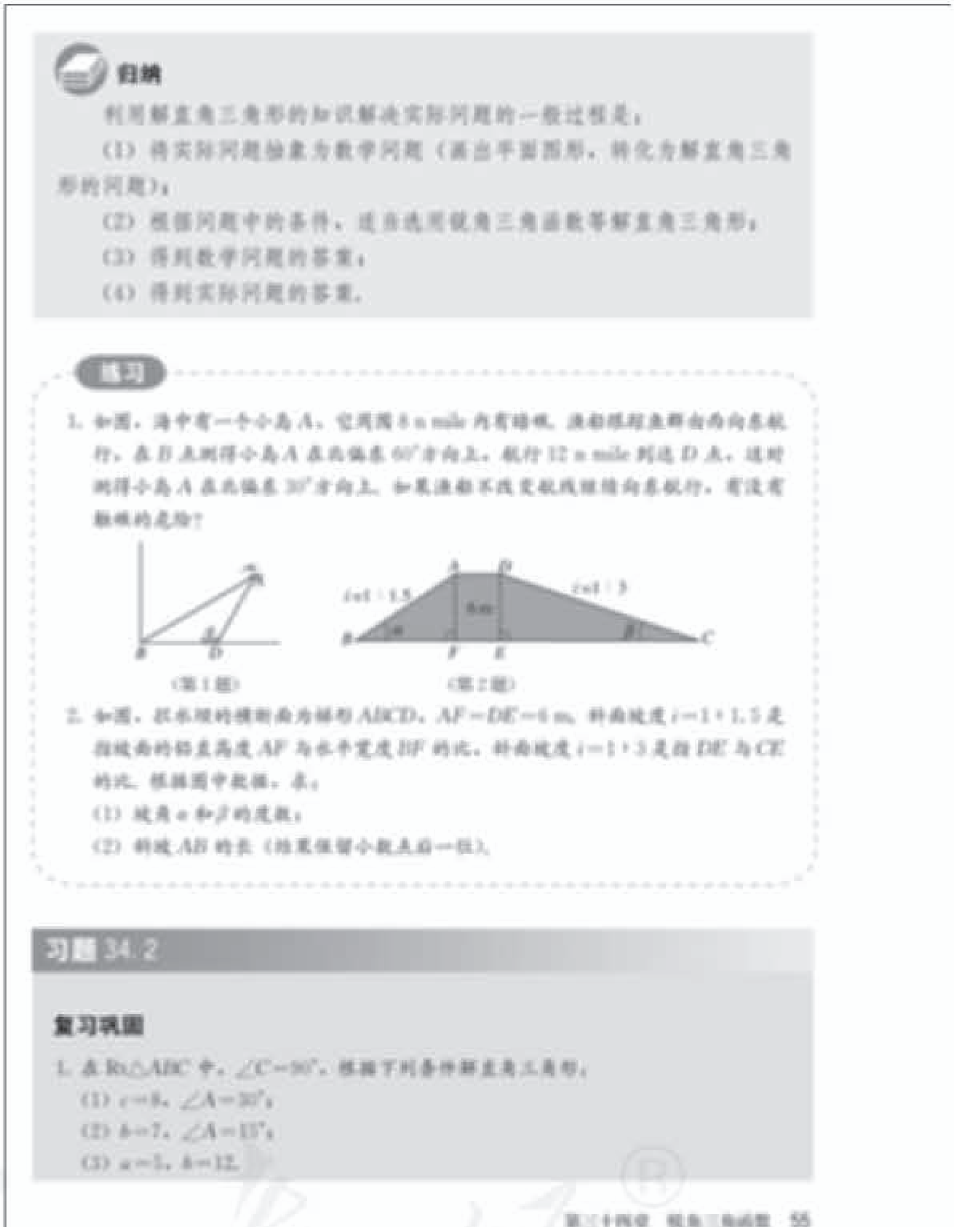
求出斜边 BC 的长. 教学中可以引导学生从不同的角度思考问题，进一步熟悉直角三角形各元素之间的关系.

9. 例 5 是解直角三角形的方法在解决航海问题中的应用. 对于例 5，首先需要弄清“北偏东”“南偏东”等确定方位的常用术语，并根据题意，画出示意图. 画出示意图是求解本例的难点和关键，示意图一经画出，问题就转化为解直角三角形了. 为了降低难度，教科书直接给出了示意图. 教学中应根据学生的实际情况，灵活处理，对于好的班级，可以引导学生根据题意画出示意图，更好地体现从实际问题抽象数学问题的过程.

10. 关于解直角三角形的应用，本节设计了两个“练习”，第一个是安排在例 4 之后；第二个安排在例 5 之后，在第二个练习的第 2 题中，出现了一个工程图纸中常见的表示坡度的符号“$i=1:3$”，教学中可以向学生作适当解释.

练习答案

1. 没有触礁的危险.
2. (1) $\alpha=33°41'24''$，
   $\beta=18°26'6''$；
   (2) 10.8 m.



归纳

利用解直角三角形的知识解决实际问题的一般过程是：

(1) 将实际问题抽象为数学问题（画出平面图形，转化为解直角三角形的问题）；

(2) 根据问题中的条件，适当选用锐角三角函数等解直角三角形；

(3) 得到数学问题的答案；

(4) 得到实际问题的答案.

练习

1. 如图，海中有一个小岛 A，它周围 8 n mile 内有暗礁. 渔船跟踪鱼群由西向东航行，在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60° 方向上，航行 12 n mile 到达 D 点，这时测得小岛 A 在北偏东 30° 方向上. 如果渔船不改变航线继续向东航行，有没有触礁的危险？

（第1题）　（第2题）

2. 如图，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$，$AF=DE=6$ m. 斜面坡度 $i=1:1.5$ 是指坡面的铅直高度 AF 与水平宽度 BF 的比，斜面坡度 $i=1:3$ 是指 DE 与 CE 的比. 根据图中数据，求：

(1) 坡角 α 和 β 的度数；

(2) 斜坡 AB 的长（结果保留小数点后一位）.

习题 34.2

复习巩固

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，根据下列条件解直角三角形：

(1) $c=8$，$\angle A=30°$；

(2) $b=7$，$\angle A=15°$；

(3) $a=5$，$b=12$.

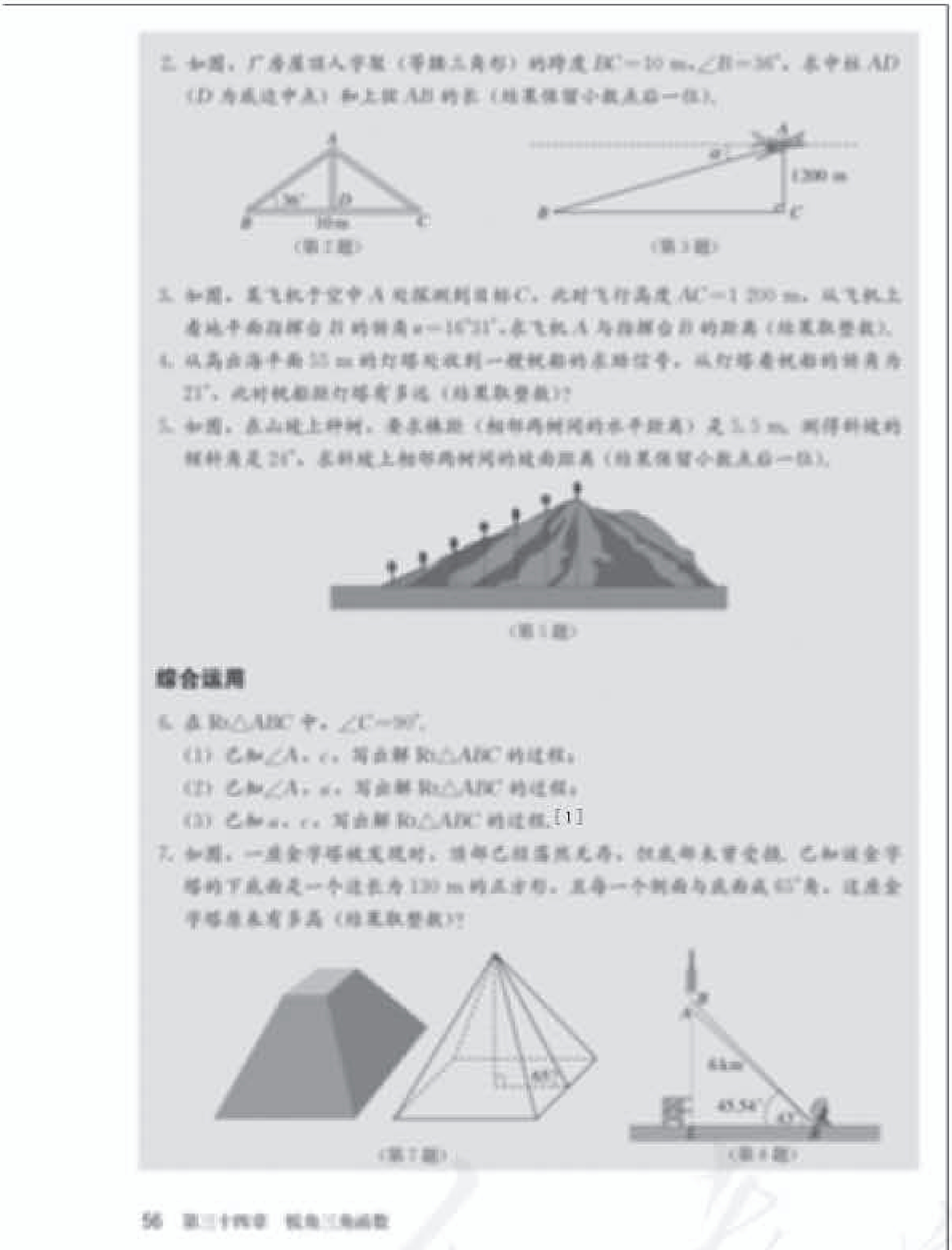
第三十四章　锐角三角函数　55

11. 本节最后对利用解直角三角形的知识解决实际问题的过程进行了总结，这是对本节内容在思想方法上的归纳与提升. 类似方程、函数、不等式，解直角三角形的知识也是解决实际问题的有效数学工具，利用它解决实际问题的一般过程也是：“实际问题——数学问题——数学问题的答案——实际问题的答案”. 教学中要注意让学生结合具体问题，体会这个过程，也可以引导学生将这一过程与运用方程、函数、不等式解决实际问题的过程进行比较，进一步体会运用数学知识解决实际问题的一般过程.

习题 34.2

1. “复习巩固”中的 5 道题目对本节所学的解直角三角形以及利用解直角三角形的知识解决实际问题等内容进行了复习.

第 1 题的 3 小题都是根据给定的条件解直角三角形.



2. 如图，厂房屋顶人字架（等腰三角形）的跨度 $BC=10$ m，$\angle B=36^\circ$，求中柱 AD（D 为底边中点）和上弦 AB 的长（结果保留小数点后一位）.

（第 2 题）　　（第 3 题）

3. 如图，某飞机于空中 A 处探测到目标 C，此时飞行高度 $AC=1\ 200$ m，从飞机上看地平面指挥台 B 的俯角 $\alpha=16^\circ31'$，求飞机 A 与指挥台 B 的距离（结果取整数）.

4. 从高出海平面 55 m 的灯塔处收到一艘帆船的求助信号，从灯塔看帆船的俯角为 21°，此时帆船距灯塔有多远（结果取整数）？

5. 如图，在山坡上种树，要求株距（相邻两树间的水平距离）是 5.5 m，测得斜坡的倾斜角是 24°，求斜坡上相邻两树间的坡面距离（结果保留小数点后一位）.

（第 5 题）

综合运用

6. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

(1) 已知 $\angle A$，c，写出解 Rt△ABC 的过程；

(2) 已知 $\angle A$，a，写出解 Rt△ABC 的过程；

(3) 已知 a，c，写出解 Rt△ABC 的过程.[1]

7. 如图，一座金字塔被发现时，顶部已经荡然无存，但底部未曾受损. 已知该金字塔的下底面是一个边长为 130 m 的正方形，且每一个侧面与底面成 65° 角，这座金字塔原来有多高（结果取整数）？

（第 7 题）　　（第 8 题）

56　第三十四章　锐角三角函数

[1] 本题涵盖了解直角三角形的所有类型.

第 2～5 题是简单的应用问题，背景是学生比较熟悉的，在正文或例题中都出现过，学生能够容易地抽象出数学问题. 教学时可以将这些习题与本节例题的教学结合起来.

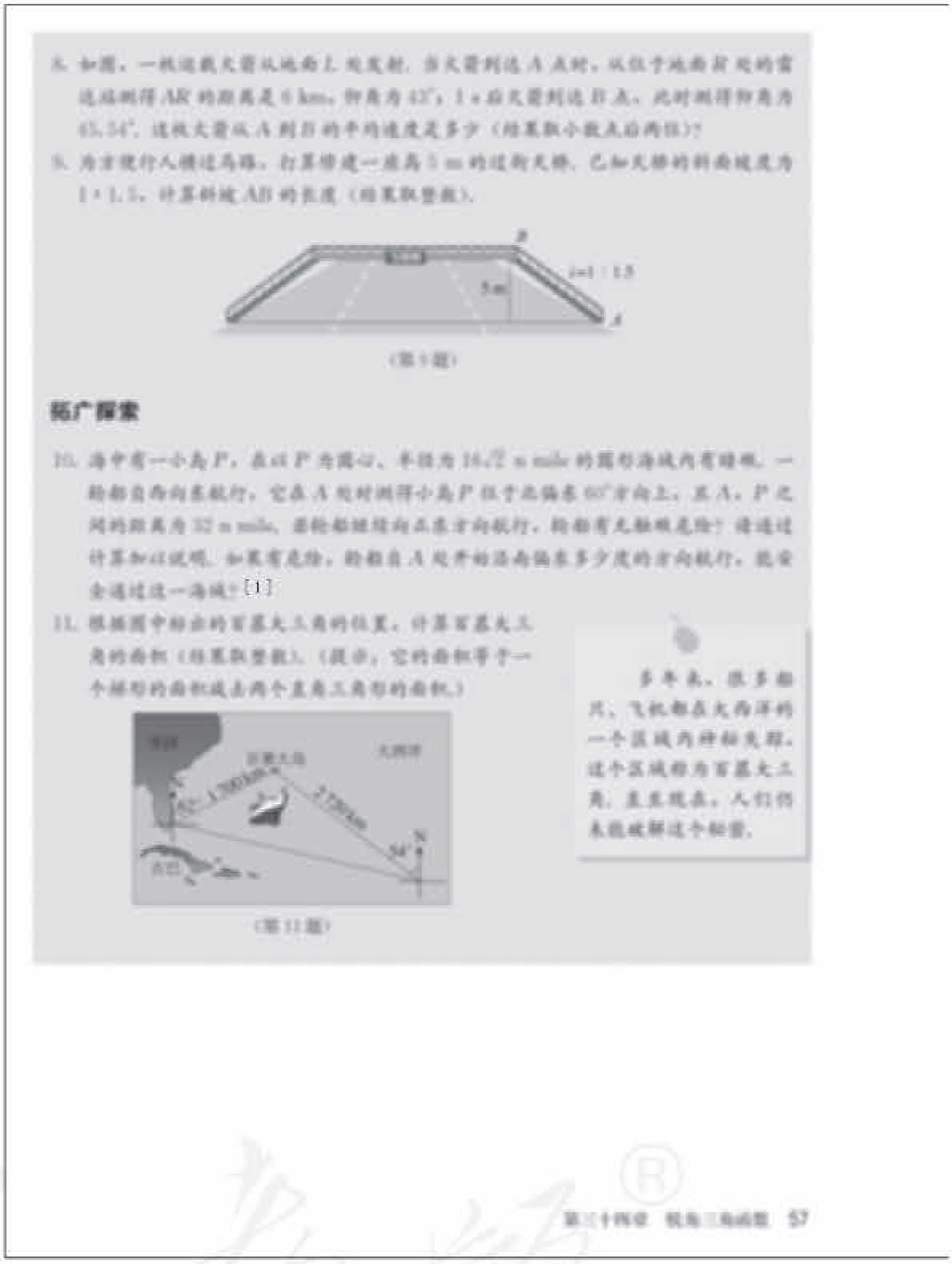
2. “综合运用”共有 4 道题目.

第 6 题要求根据给定的条件写出解直角三角形的过程. 第 7 题实际上是一个立体几何问题，涉及二面角（两个面所成的角）的概念，由于教科书给出了立体图形，并在图形中标注出了这个二面角，而且画出了这个二面角的一个平面角，因此学生解答本题不会有太大困难. 教学时要注意引导学生发现立体图形中的平面图形，将立体图形问题转化为平面问题，培养空间观念.

第 8 题是有关火箭运行速度的问题，解决本题需要在不同的直角三角形中反复运用解直角三角形的知识.

第 9 题是与坡度有关的问题，学生比较容易解决.

[1] 先画出示意图，再数形结合地解决问题.



8. 如图，一枚运载火箭从地面 L 处发射. 当火箭到达 A 点时，从位于地面 R 处的雷达站测得 AR 的距离是 6 km，仰角为 43°，1 s 后火箭到达 B 点，此时测得仰角为 45.54°. 这枚火箭从 A 到 B 的平均速度是多少（结果取小数点后两位）?

9. 为方便行人横过马路，打算修建一座高 5 m 的过街天桥. 已知天桥的斜面坡度为 1∶1.5，计算斜坡 AB 的长度（结果取整数）.

（第 9 题）

拓广探索

10. 海中有一个小岛 P，在以 P 为圆心、半径为 $16\sqrt{2}$ n mile 的圆形海域内有暗礁. 一轮船自西向东航行，它在 A 处时测得小岛 P 位于北偏东 60° 方向上，且 A，P 之间的距离为 32 n mile. 若轮船继续向正东方向航行，轮船有无触礁危险? 请通过计算加以说明. 如果有危险，轮船自 A 处开始至少沿南偏东多少度的方向航行，能安全通过这一海域? [1]

11. 根据图中标出的百慕大三角的位置，计算百慕大三角的面积（结果取整数）.（提示：它的面积等于一个梯形的面积减去两个直角三角形的面积.）

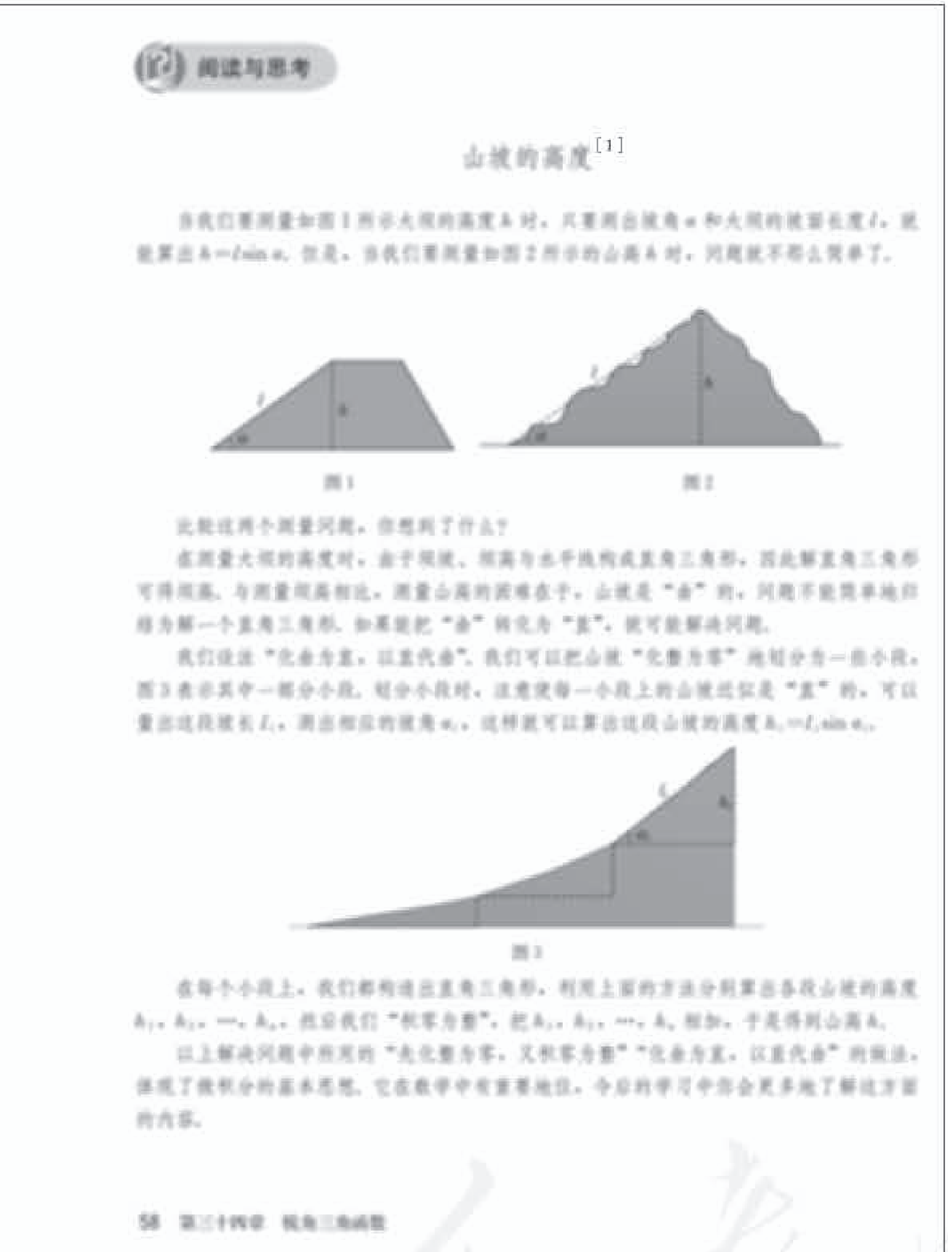
（第 11 题）

多年来，很多船只、飞机都在大西洋的一个区域内神秘失踪，这个区域称为百慕大三角. 直至现在，人们仍未能破解这个秘密.

第二十八章 锐角三角函数 57

3. “拓广探索”中的第 10 题是一个航海中的问题. 解决这个问题需要仔细阅读问题的背景，并且需要利用圆的有关知识构造直角三角形，这是解决本题的难点.

第 11 题是计算百慕大三角的面积，解决这个问题的难点在于如何构造直角三角形，教学时可以参考本题的提示.



阅读与思考

山坡的高度[1]

当我们要测量如图1所示大坝的高度h时，只要测出仰角α和大坝的坡面长度l，就能算出$h=l\sin\alpha$. 但是，当我们要测量如图2所示的山高h时，问题就不那么简单了.

图1　　图2

比较这两个测量问题，你想到了什么？

在测量大坝的高度时，由于坝坡、坝高与水平线构成直角三角形，因此解直角三角形可得坝高. 与测量坝高相比，测量山高的困难在于，山坡是“曲”的，问题不能简单地归结为解一个直角三角形. 如果能把“曲”转化为“直”，就可能解决问题.

我们设法“化曲为直，以直代曲”. 我们可以把山坡“化整为零”地划分为一些小段，图3表示其中一部分小段. 划分小段时，注意使每一小段上的山坡近似是“直”的，可以量出这段坡长l_1，测出相应的仰角α_1，这样就可以算出这段山坡的高度$h_1=l_1\sin\alpha_1$.

图3

在每个小段上，我们都构造出直角三角形，利用上面的方法分别算出各段山坡的高度h_1，h_2，…，h_n，然后我们“积零为整”，把h_1，h_2，…，h_n相加，于是得到山高h.

以上解决问题中所用的“先化整为零，又积零为整”“化曲为直，以直代曲”的做法，体现了微积分的基本思想，它在数学中有重要地位，今后的学习中你会更多地了解这方面的内容.

58　第三十四章　锐角三角函数

[1] 这个阅读材料通过计算山坡的高度渗透微积分思想，教学中只要让学生对此有所了解即可.

阅读与思考

这篇阅读材料以求山坡的高度为载体，介绍“化整为零、积零为整”“化曲为直、以直代曲”等微积分的基本思想.

教科书采用与求大坝的坡面长度对比的方式，研究如何利用解直角三角形的知识求山高的问题. 为了求出山坡的高度，可以构造若干个小直角三角形，如果将每一小段斜坡的长度近似地看成线段，那么就可以利用这些小直角三角形的直角边求出山坡的高度，这个高度只是山高的近似值，而不是准确值. 另外，考虑到学生的知识储备和认知水平，这里没有提及逼近的思想.

对于微积分的基本思想，这里只是结合解直角三角形的内容进行渗透，教学中只要让学生有所体会即可.

[1] $\alpha=90^\circ-\angle ABC$.

[2] 计算这棵树的高度时，需要测量出测量者的眼睛距离地面的高度.

数学活动

活动1 制作测角仪，测量树的高度

(1) 把一根细线固定在半圆形量角器的圆心处，细线的另一端系一个小重物，制成一个简单的测角仪，利用它可以测量仰角或俯角（图1）；

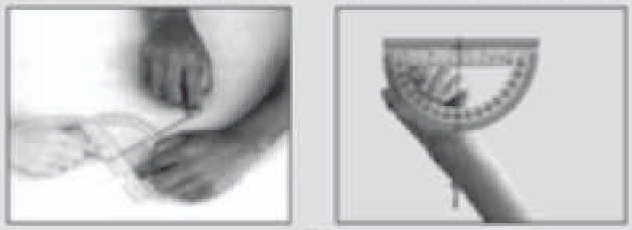


图1

(2) 将这个仪器用手托起，拿到眼前，使视线沿着仪器的直径刚好到达树的最高点（图2）；

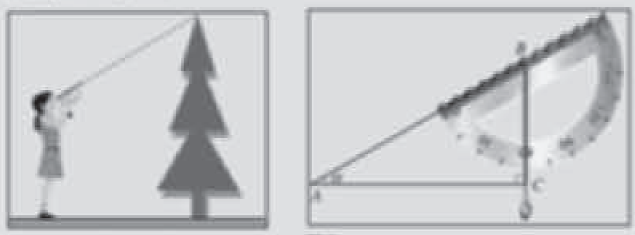


图2

(3) 得出仰角 α 的度数；[1]

(4) 测出你到树的底部的距离；

(5) 计算这棵树的高度.[2]

活动2 利用测角仪测量塔高

(1) 在塔前的平地上选择一点 A，用活动1中制作的测角仪测出你看塔顶的仰角 α（图3）；

(2) 在 A 点和塔之间选择一点 B，测出你由 B 点看塔顶的仰角 β；

1. 本章安排了两个数学活动. 这两个活动都是测量实物的高度. 从数学角度看，都用到锐角三角函数或解直角三角形的知识.

2. “活动 1”是制作测角仪，并用它测量树的高度. 这个活动可以分解为两个小活动，一是制作测角仪，二是利用测角仪测量树的高度. 利用半圆形量角器制作测角仪比较简单，关键是让学生明白测角仪的工作原理. 按照教科书中给出的测量步骤，利用测角仪测量树高时，可以从测角仪上读出 $\angle ABC$ 的度数，进而可以计算出角 α 的度数，再测量出测量者距离树根的距离，以及测量者的眼睛距离地面的高度，就可以求出树的高度.

3. “活动 2”是利用“活动 1”中制作的测角仪测量塔高. 从本质上讲，“活动 2”与“活动 1”是同一类活动，都是利用测角仪测量一个实物的高度，只是活动中采用的测量方法有所不同. “活动 2”提供了一种利用测角仪测量“底部


(3) 量出 A，B 两点间的距离；

(4) 计算塔的高度.[1]

[1] 设塔高为 x，测量者的眼睛距离地面的高度为 a，则可以得到关于 x 的方程

$$\frac{x-a}{\tan\alpha}-\frac{x-a}{\tan\beta}=AB,$$

解这个方程就可以求出塔高 x.

不可及”物体高度的方法. 在“活动 2”中，利用测角仪测出仰角 α 和 β 后，再测出 A，B 两点的距离，以及测量者的眼睛距离地面的高度，就可以计算出塔的高度.

4. 对于“活动 1”和“活动 2”，教学中可以将这两个活动的过程加以对比，比较它们的优缺点. 也可以引导学生根据实际问题的条件，选择合适的方法测量塔高.

5. 这两个活动都不难，有一定的活动性，操作性较强，容易引起学生的兴趣. 教学时可以让学生以小组合作的方式进行活动，以培养学生的创新精神和交流能力. 在活动过程中，教师要注意提醒学生关注本章所学知识在活动中所起的作用.

[1] 这是从定性到定量刻画直角三角形的过程.

小　结

一、本章知识结构图

直角三角形中的边角关系 → 锐角三角函数 → 解直角三角形 → 实际问题

二、回顾与思考

本章我们学习了锐角三角函数，它反映了直角三角形中边角之间的关系，即无论 Rt△ABC 的大小如何，只要给定锐角 A，则∠A 的对边与斜边、邻边与斜边、对边与邻边的比就随之确定，由此定义了锐角三角函数．利用这一关系，结合勾股定理等，就可以解决各种与直角三角形度量有关的问题．

由直角三角形全等的判定定理可知，一个直角三角形可以由它的三条边和两个锐角这五个元素中的两个（其中至少有一个是边）唯一确定．有了锐角三角函数知识，结合直角三角形的两个锐角互余及勾股定理，就可由这两个元素的大小求出其他元素的大小，这就是解直角三角形．由此可见，关注各部分内容之间的联系，对我们更深入地理解相关知识，提高灵活应用知识的能力等都很有帮助．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．锐角三角函数是如何定义的？总结锐角三角函数的定义过程，并写出直角三角形中两个锐角的三角函数．

2．两个直角三角形全等要具备什么条件？为什么在直角三角形中，已知一条边和一个锐角，或两条边，就能解这个直角三角形？[1]

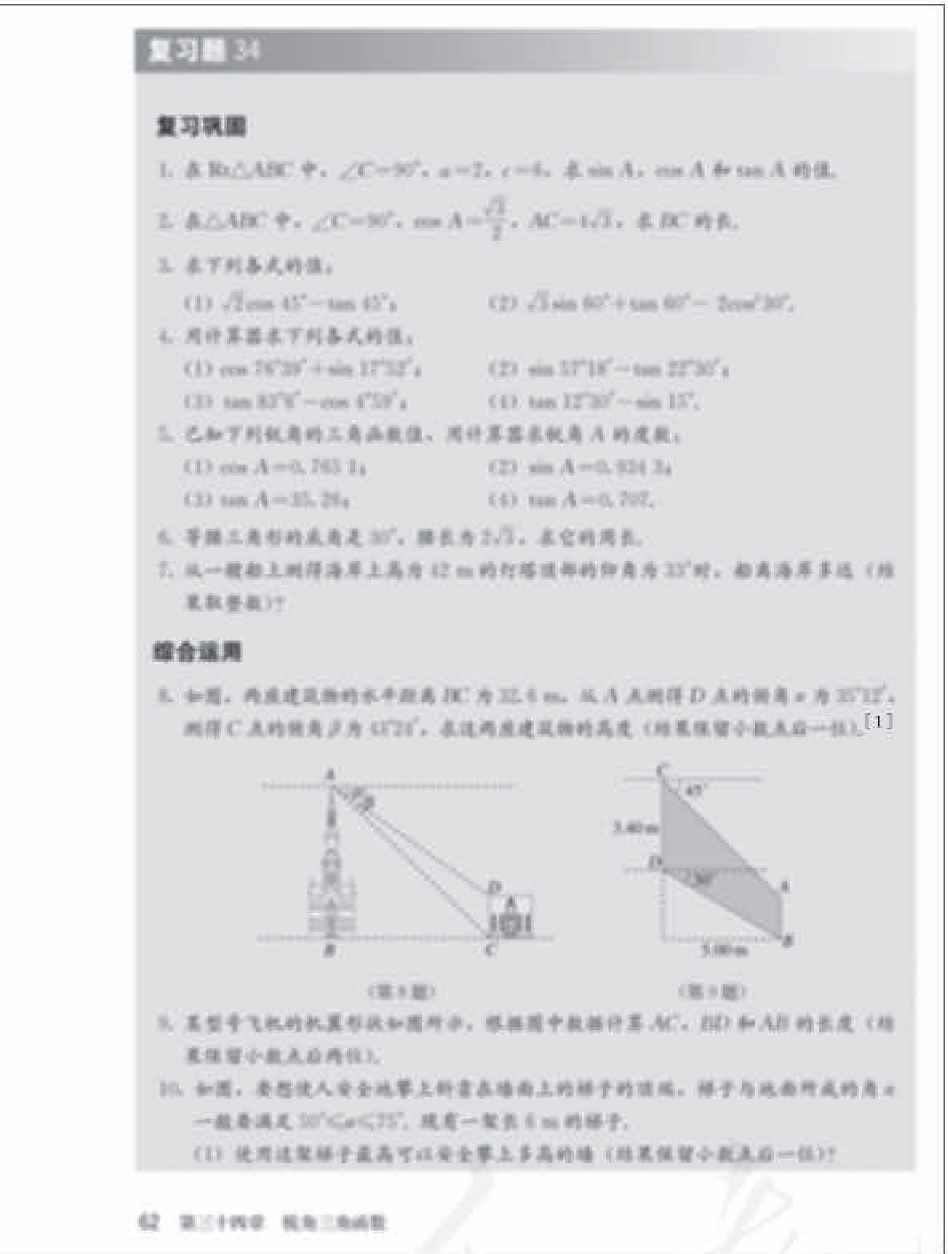
3．你能根据不同的已知条件（例如，已知斜边和一个锐角），归纳解直角三角形的方法吗？

4．锐角三角函数在实践中有广泛的应用，你能举例说明这种应用吗？

1．“本章知识结构图”给出了本章内容的展开顺序以及知识间的内在联系.

2．“回顾与思考”首先简述了锐角三角函数的内涵和作用；接着从联系的角度对解直角三角形进行分析，直角三角形全等的判定定理是解直角三角形的理论依据，解直角三角形时需要综合运用锐角三角函数、勾股定理等知识．教学时应让学生充分注意知识之间的联系性.

“回顾与思考”最后一部分，通过提问的方式引导学生对本章的主要内容进行回顾与总结．教学中应引导学生从思想方法的高度对本章内容进行全面复习.



复习题 34

复习巩固

1. 在 Rt△ABC 中，∠C=90°，a=2，c=6，求 sin A，cos A 和 tan A 的值.

2. 在△ABC 中，∠C=90°，cos A=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，AC=$4\sqrt{3}$，求 BC 的长.

3. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{2}\cos 45°-\tan 45°$；　(2) $\sqrt{3}\sin 60°+\tan 60°-2\cos^2 30°$.

4. 用计算器求下列各式的值：

(1) cos 76°20′+sin 17°52′；　(2) sin 53°18′−tan 22°30′；

(3) tan 83°6′−cos 4°59′；　(4) tan 12°30′−sin 15°.

5. 已知下列锐角的三角函数值，用计算器求锐角 A 的度数：

(1) cos A=0.765 1；　(2) sin A=0.934 3；

(3) tan A=35.26；　(4) tan A=0.707.

6. 等腰三角形的底角是 30°，腰长为 $2\sqrt{3}$，求它的周长.

7. 从一艘船上测得海岸上高为 42 m 的灯塔顶部的仰角为 33°时，船离海岸多远（结果取整数）？

综合运用

8. 如图，两座建筑物的水平距离 BC 为 32.6 m. 从 A 点测得 D 点的俯角 α 为 35°12′，测得 C 点的俯角 β 为 43°24′. 求这两座建筑物的高度（结果保留小数点后一位）.[1]

（第 8 题）　　（第 9 题）

9. 某型号飞机的机翼形状如图所示，根据图中数据计算 AC，BD 和 AB 的长度（结果保留小数点后两位）.

10. 如图，要想使人安全地攀上斜靠在墙面上的梯子的顶端，梯子与地面所成的角 α 一般要满足 50°≤α≤75°. 现有一架长 6 m 的梯子.

(1) 使用这架梯子最高可以安全攀上多高的墙（结果保留小数点后一位）？

62　第三十四章　锐角三角函数

[1] 过点 D 作线段 AB 的垂线于点 E，在 Rt△ABC 中求出 AB，在 Rt△ADE 中求出 AE.

复习题 34

1. “复习巩固”的 7 道题目对本章内容进行了全面复习. 第 1，2 题复习正弦、余弦和正切的概念；第 3 题复习特殊角的三角函数值；第 4 题复习使用计算器求锐角的三角函数值；第 5 题复习使用计算器根据锐角三角函数值求相应的锐角；第 6，7 题复习解直角三角形.

2. “综合运用”有 4 道题目. 第 8，9 题是利用解直角三角形等知识解决实际问题. 第 8 题的问题背景比较简单，学生比较熟悉，教科书给出了示意图，利用这个示意图可以比较容易地构造直角三角形；第 9 题计算机翼边长的问题，解决这个问题的关键也是构造直角三角形；第 10 题的综合性较强，解决这个问题需要综合利用相似三角形、锐角三角函数以及解直角三角形等知识和方法；第 11 题是解直角三角形的问题.

[1] 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E，在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，用 BC，$\sin B$ 表示 CE.

(2) 当梯子底端距离墙面 2.4 m 时，α 等于多少度（结果取整数）？此时人是否能够安全使用这架梯子？

（第 10 题）

（第 11 题）

11. 如图，折叠矩形 $ABCD$ 的一边 AD，使点 D 落在 BC 边的点 F 处，已知折痕 $AE=5\sqrt{5}$ cm，且 $\tan\angle EFC=\frac{3}{4}$.

(1) $\triangle AFB$ 与 $\triangle FEC$ 有什么关系？

(2) 求矩形 $ABCD$ 的周长.

12. $\square ABCD$ 中，已知 AB，BC 及其夹角 $\angle B$（$\angle B$ 是锐角），能求出 $\square ABCD$ 的面积 S 吗？如果能，用 AB，BC 及其夹角 $\angle B$ 表示 S.[1]

拓广探索

13. 已知圆的半径为 R.

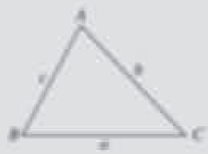
(1) 求这个圆的内接正 n 边形的周长和面积；

(2) 利用 (1) 的结果填写下表.

内接正 n 边形	正六边形	正十二边形	正二十四边形	…
内接正 n 边形的周长				
内接正 n 边形的面积				

观察上表，随着圆内接正多边形边数的增加，正多边形的周长（面积）有怎样的变化趋势？与圆的周长（面积）进行比较，你能得出什么结论？

14. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，探究 $\frac{a}{\sin A}$，$\frac{b}{\sin B}$，$\frac{c}{\sin C}$ 之间的关系.（提示：分别作 AB 和 BC 边上的高.）



（第 14 题）

第二十八章 锐角三角函数 63

3. “拓广探索”的 2 道题目有较强的探索性. 第 13 题计算圆的内接正多边形的面积和周长并不难，难点在于学生发现随着圆内接正多边形边数的增加，正多边形的面积和周长越来越接近圆的面积和周长. 得到这个结论需要一个探索过程，在这个过程中体现了微积分的逼近思想. 教学中可以结合本题让学生体会这种当一个量无限增大时，另一个量无限接近某个常数的极限的思想. 对于第 14 题，弄清本题的情景有一定的难度，构造直角三角形也有一定的难度，教学时要注意引导学生在理解题意的基础上，构造直角三角形，利用解直角三角形的知识解决这个问题.

Ⅲ 习题解答

习题 34.1

1. （1）$\sin A=\frac{1}{3}$，$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan A=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos B=\frac{1}{3}$，$\tan B=2\sqrt{2}$；

   （2）$\sin A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan A=\frac{1}{3}$，$\sin B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\tan B=3$；

   （3）$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\frac{1}{2}$，$\tan A=\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{1}{2}$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 确定. 因为一个锐角确定的所有直角三角形都相似，所以它们的对应边成比例.

3. （1）$\sqrt{2}$；（2）$-\frac{\sqrt{2}}{4}$；（3）2；（4）$\sqrt{3}-1$.

4. （1）$\sin A=0.5780$，$\cos A=0.8160$，$\tan A=0.7083$；

   （2）$\sin A=0.6$，$\cos A=0.8$，$\tan A=0.75$；

   （3）$\sin A=0.8462$，$\cos A=0.5329$，$\tan A=1.588$.

5. （1）$A=44°25'37''$，$B=34'23'$；

   （2）$A=81°22'23''$，$B=36°52'12''$；

   （3）$A=67°22'48''$，$B=26°33'54''$.

6. D.

7. 27.91 m.

8. 1280.30 cm^2.

9.

锐角 A	…	15°	18°	20°	22°	…	80°	82°	84°	…
$\sin A$	…	0.2588	0.3090	0.3420	0.3746	…	0.9848	0.9903	0.9945	…
$\cos A$	…	0.9659	0.9511	0.9397	0.9272	…	0.1736	0.1392	0.1045	…
$\tan A$	…	0.2679	0.3249	0.3640	0.4040	…	5.6713	7.1154	9.1544	…

随着锐角 A 的度数不断增大，$\sin A$ 的值不断增大，$\cos A$ 的值不断减小，$\tan A$ 的值不断增大.
理由：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，假定$\angle A$ 的对边不变，当$\angle A$ 增大时，必有斜边减小，因此 $\sin A$ 的值增大；假定$\angle A$ 的邻边不变，当$\angle A$ 增大时，必有斜边增大，对边增大，因此 $\cos A$ 的值减小，$\tan A$ 的值增大.

10. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

习题 34.2

1. （1）$\angle B=60°$，$a=4$，$b=4\sqrt{3}$；（2）$\angle B=75°$，$a\approx1.9$，$c\approx7.2$；

(3) $c=13$，$\angle A=22°37'12''$，$\angle B=67°22'48''$.

2. $AD=3.6$ m，$AB=6.2$ m.

3. 4221 m.

4. 143 m.

5. 6.0 m.

6. (1) $\angle B=90°-\angle A$，$a=c\sin A$，$b=c\cos A$；

(2) $\angle B=90°-\angle A$，$c=\dfrac{a}{\sin A}$，$b=\dfrac{a}{\tan A}$；

(3) $b=\sqrt{c^2-a^2}$，由 $\sin A=\dfrac{a}{c}$求出$\angle A$，$\angle B=90°-\angle A$.

7. 139 m.

8. 0.38 km/s.

9. 9 m.

10. 轮船继续向东航行，有触礁的危险. 轮船自 A 处开始至多沿南偏东 75°的方向航行，能安全通过这一海域.

11. 2 078 012 km^2.

复习题 34

1. $\sin A=\dfrac{1}{3}$，$\cos A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan A=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2. $BC=4$.

3. (1) 0；(2) $\sqrt{3}$.

4. (1) 0.5377；(2) 0.4273；(3) 7.2673；(4) -0.0371.

5. (1) $40°5'3''$；(2) $69°6'55''$；(3) $88°22'32''$；(4) $35°15'37''$.

6. $4\sqrt{3}+6$.

7. 65 m.

8. AB 为 30.8 m，CD 为 7.8 m.

9. $AC=5\sqrt{2}\approx7.07(\text{m})$，$BD=\dfrac{10}{\sqrt{3}}\approx5.77(\text{m})$，$AB=\dfrac{5}{\sqrt{3}}-(5-3.40)=1.29(\text{m})$.

10. (1) 5.8 m；(2) $\alpha=66°$，可以安全使用.

11. (1) 相似；(2) 36 m.

12. 能. $S=AB\cdot BC\cdot\sin B$.

13. (1) 周长为 $2nR\sin\dfrac{180°}{n}$，面积为 $nR^2\sin\dfrac{180°}{n}\cos\dfrac{180°}{n}$ (或$\dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{360°}{n}$)；

(2) 正六边形、正十二边形和正二十四边形的周长分别 $6R$，$24R\sin 15°$，$48R\sin 7.5°$，面积分别是$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$，$3R^2$，$12R^2\sin 15°$.

随着圆内接正多边形边数的增加，正多边形的周长逐渐接近圆的周长 $2\pi R$，面积逐渐接近圆的面积 πR^2.

14. $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

Ⅳ 教学设计案例

34.1 锐角三角函数（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

正弦的概念

2. 内容解析

本章在前面已经研究了直角三角形中三边之间关系、两个锐角之间关系的基础上，通过引进锐角三角函数建立了直角三角形中边与角之间的关系，使学生全面掌握直角三角形的组成要素（边、角）之间的关系，并综合运用锐角三角函数、勾股定理等知识解决与直角三角形有关的度量问题.

锐角的正弦反映了直角三角形中锐角与其对边、斜边之间的关系. 从什么角度研究直角三角形中边角之间的关系，以及建立边与角之间的何种关系，是引入锐角三角函数时的首要问题，也是关键环节. 为此，教科书设置了修建扬水站时需要准备多长水管的实际问题. 在解决这个实际问题的过程中，需要用到结论“在直角三角形中，$30°$角所对的边是斜边的一半”，其等价形式为“在直角三角形中，$30°$角所对的边与斜边的比总是常数$\dfrac{1}{2}$”，后者反映了直角三角形中 $30°$锐角和该角的对边与斜边的比之间的对应关系；由此获得启示，建立直角三角形中边角之间的关系，可以通过研究锐角和它的对边与斜边的比之间的关系进行，从而引出研究直角三角形中边角关系的具体内容和方式. 继而利用等腰直角三角形的性质和勾股定理，探究直角三角形中，$45°$角所对的边与斜边之比的不变性；再利用相似三角形的性质，研究一般直角三角形中锐角的对边与斜边的比的不变性，最后给出锐角的正弦概念. 引入锐角的正弦概念的过程，体现了从特殊到一般的思想方法. 先讨论直角三角形中锐角的对边与斜边的比的不变性，进而给出锐角的正弦概念，这种定义锐角的正弦的方式为后续研究其他锐角三角函数提供了范例.

本节课的教学重点是：直角三角形中边角关系的提出过程，锐角正弦的定义过程，正弦的概念.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）构建探求锐角的正弦的定义方法，初步理解锐角的正弦概念.

（2）会求锐角的正弦值.

2. **目标解析**

达成目标（1）的标志是：掌握利用相似三角形的性质研究直角三角形中，对于一个锐角而言，无论直角三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比值为定值的研究过程和方法，体会研究对边与斜边的比为定值对锐角的正弦定义的必要性，掌握锐角的正弦表达式的结构.

达成目标（2）的标志是：已知直角三角形的边长，求出锐角的正弦值.

三、教学问题诊断分析

了解锐角的正弦研究内容的必要性和合理性，对学生来说比较困难；利用相似三角形的性质“两个直角三角形的对应边的比相等”探索并认识锐角的正弦时，首先要得出结论“直角三角形的形状相同，大小改变，但边与边的比值不变”，然后需要联系函数概念，把直角三角形的“边与边的比值”与“锐角”对应起来，进而得到“比值随锐角的确定而唯一确定，随锐角的改变而改变”，涉及的知识较多，看问题的角度和观点灵活多变，并且要用完全陌生的符号 $\sin A$ 表示锐角 A 的正弦，对学生具有很大的挑战性.

本节课的教学难点是：研究内容的提出过程；锐角的正弦定义前，先研究直角三角形中锐角的对边与斜边的比为定值的必要性.

四、教学支持条件分析

本节课使用的媒体资源主要是计算机、几何画板. 教师应用多媒体课件创设情境，演示“运动——变化”过程，帮助学生思考，为学生观察猜想创造条件，使之成为学生认知的工具.

五、教学过程设计

1. **创设情境，导入新课**

如图 1，意大利比萨斜塔 1350 年落成时就已倾斜，其塔顶中心点偏离垂直中心线 2.1 m. 1972 年比萨地区发生地震，这座高 54.5 m 的斜塔在大幅度摇摆后仍巍然屹立，但塔顶中心点偏离垂直中心线 5.2 m，而且还在继续倾斜，有倒塌的危险. 当地从 1990 年对斜塔进行维修纠偏，2001 年竣工，此时塔顶中心点偏离垂直中心线的距离减少了 43.8 cm.

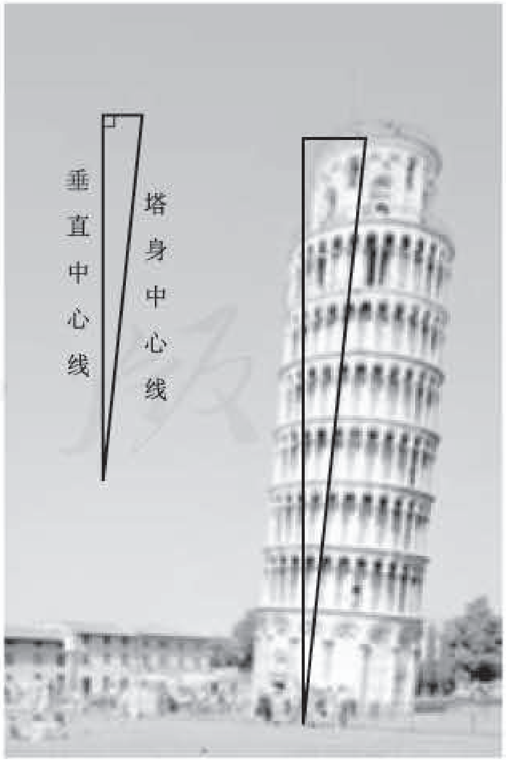


图 1

问题 1 我们用“塔身中心线与垂直中心线所成的角 θ”来描述比萨斜塔的程度，根据已测量的数据你能求角 θ 的度数吗？

师生活动：多媒体动画展示“垂直中心线”“塔身中心线”“塔顶中心点偏离垂直中心线的距离”，显示相关数据，并提出问题，激励学生观察、思考.

设计意图：通过动画展示比萨斜塔的背景材料，扫

除学生对引言中一些词语理解的障碍，为抽象出直角三角形做铺垫.

追问 1 在上述问题中，可以抽象出什么几何图形？上述问题可以抽象成什么数学问题？

师生活动：结合动画演示，引导学生得出：这个问题可以抽象出一个直角三角形，实际是“已知直角三角形的一条直角边和斜边，求这条直角边所对锐角的度数”.

追问 2 对直角三角形的边角关系，已经研究了什么？还可以研究什么？

师生活动：通过师生交流，引导学生回答，我们前面研究了直角三角形中角与角之间的关系（两锐角互余）、三边之间的关系（勾股定理），还可以研究边与角之间的关系.

教师引入课题并板书：从实际需要看，要描述比萨斜塔的倾斜程度，我们需要研究直角三角形中边与角之间的关系；从数学内部看，我们已经研究直角三角形边与边的关系、角与角的关系，边与角之间有什么关系呢？本节课我们一起来学习“锐角三角函数”——锐角的正弦.

设计意图：从实际需要和从数学内部的需要自然引入课题，激发学生的求知欲.

2. 探究发现，形成概念

我们先研究有一个锐角为 30°的直角三角形问题.

问题 2 如图 2，为了绿化荒山，市绿化办打算从位于山脚下的机井房沿着山坡铺设水管，对坡面的绿地进行喷灌. 现测得斜坡与水平面所成角为 30°，为使出水口的高度为 35 m，那么需要准备多长的水管？

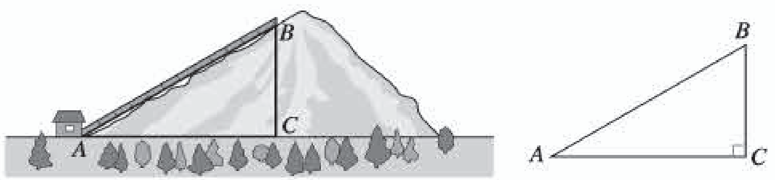


图 2

（1）解决问题，初步体验

隐去引例中的背景材料后，直观显示出图中的 Rt$\triangle ABC$.

追问 1 你能用数学语言来表述这个实际问题吗？如何解决这个问题.

师生活动：学生组织语言与同伴交流. 教师及时了解学生语言组织情况，并适时引导. 把上述实际问题抽象成数学问题为：

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$BC=35$ m，求 AB.

依据“直角三角形中，30°角所对的直角边是斜边的一半”得到答案：“需要准备 70 m 长的水管”.

设计意图：培养学生用数学语言表达的意识，提高数学表达能力.

追问 2 在上面的问题中，如果使出水口的高度为 50 m，那么需要准备多长的水管？

师生活动：引导学生活动. 依据“直角三角形中，30°角所对的直角边是斜边的一半”得到答案：“需要准备 100 m 长的水管”.

追问 3 对于有一个锐角为 30°的任意直角三角形，30°角的对边与斜边有怎样的数量关系？可以用一个怎样的式子表示？

师生活动：学生用数量关系表示，并引导学生得出$\frac{\angle A\text{ 对边}}{\text{斜边}}=\frac{1}{2}$，然后归纳：

在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么不管这个直角三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比值都等于$\frac{1}{2}$.

设计意图：在学生用“直角三角形中，30°角所对的直角边是斜边的一半”解决问题的基础上，引出研究直角三角形中边角关系的具体内容和方式——研究锐角和它的对边与斜边之比之间的关系，为下一环节奠定基础.

(2) 类比思考，进一步体验

问题3 在直角三角形中，如果锐角的大小发生了改变，其对边与斜边的比值还是$\frac{1}{2}$吗？例如，如图3，任意画一个Rt$\triangle ABC$，使$\angle C=90°$，$\angle A=45°$，计算$\angle A$的对边与斜边的比$\frac{BC}{AB}$. 由此你能得出什么结论？

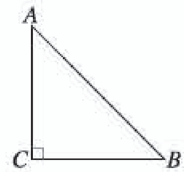


图3

师生活动：教师引出问题并投影显示，学生分组讨论，交流展示.

在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，因为$\angle A=45°$，所以Rt$\triangle ABC$是等腰直角三角形，由勾股定理得

$$AB^2=AC^2+BC^2=2BC^2,$$

$$AB=\sqrt{2}BC,$$

因此
$$\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{\sqrt{2}BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

归纳得出结论：

在一个直角三角形中，当一个锐角等于45°时，无论这个直角三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设计意图：强化学生对“对边与斜边的比”的关注，为获得“角度固定，比值也固定”作进一步铺垫.

(3) 猜想验证，得出结论

问题4 由上述两个结论可知，Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，当$\angle A=30°$时，$\angle A$的对边与斜边的比都等于$\frac{1}{2}$，它是一个固定值；当$\angle A=45°$时，$\angle A$的对边与斜边的比都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，它也是一个固定值. 由此你能猜想出什么一般的结论呢？

师生活动：教师引导学生思考、交流并用准确的语言归纳猜想：

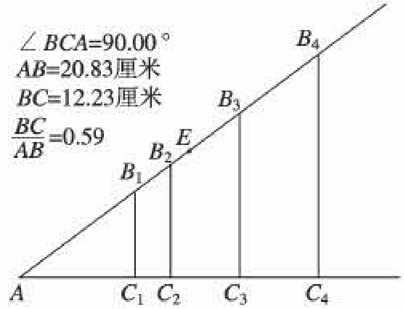
在Rt$\triangle ABC$中，当锐角A的度数一定时，无论这个直角三角形大小如何，$\angle A$的对边与斜边的比都是一个固定值.

设计意图：让学生体验合理的猜想是数学学习中研究问题的方法之一. 同时为学生提供自主探究的空间，增强语言表达能力.

（4）在《几何画板》软件制作平台中演示、验证猜想的特殊情形（图 4）.

师生活动：多媒体演示，学生感受直观验证猜想的过程.

设计意图：运用现代技术手段，让学生初步确认猜想的正确性.



拖动点E，改变$\angle A$的大小

图 4

3. 证明猜想，形成概念

（1）证明猜想

问题 5 如图 5，任意画 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$，使得$\angle C=\angle C'=90^{\circ}$，$\angle A=\angle A'=\alpha$，那么$\dfrac{BC}{AB}$与$\dfrac{B'C'}{A'B'}$有什么关系. 你能解释吗？

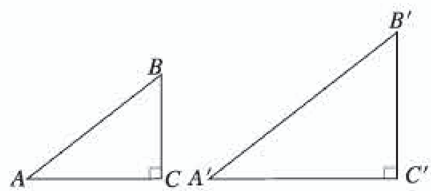


图 5

师生活动：教师引导学生将猜想"在 Rt$\triangle ABC$ 中，当锐角 A 的度数一定时，无论这个直角三角形的大小如何，$\angle A$ 的对边与斜边的比都是一个固定值."用数学语言表示并画图，引导学生找到证明猜想的方法，投影显示证明过程.

由于$\angle C=\angle C'=90^{\circ}$，$\angle A=\angle A'=\alpha$，

所以 Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle A'B'C'$，

所以$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$，即$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{B'C'}{A'B'}$.

设计意图：培养学生的推理论证意识，进一步熟悉发现几何结论的基本套路，为引出锐角的正弦概念奠定基础.

（2）形成概念

教师讲解：在直角三角形中，当锐角 A 的度数一定时，无论这个直角三角形的大小如何，它的对边与斜边的比都是一个固定值. 这个固定值随锐角 A 的度数的变化而变化，由此我们给这个"固定值"以专门名称.

如图 6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做$\angle A$ 的正弦（sine），记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

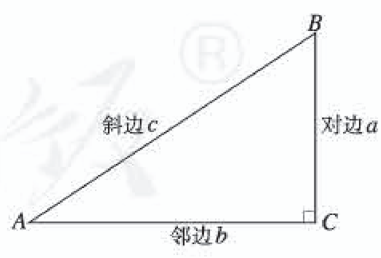


图 6

追问 当$\angle A=30^{\circ}$时，$\angle A$ 的正弦为多少？$\angle A=45^{\circ}$呢？

师生活动：学生作答，教师给出：$\sin 30^{\circ}=\dfrac{1}{2}$，$\sin 45^{\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

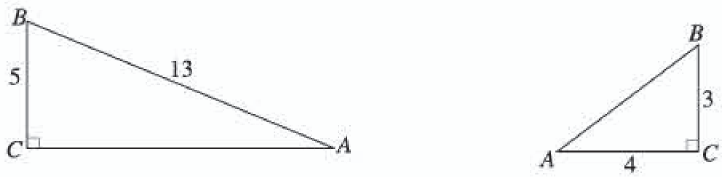
同时强调正弦的三种表示方式：$\sin A$（省去角的符号），$\sin 30^{\circ}$，$\sin\angle DEF$.

设计意图：让学生在一系列的问题解决中，经历从特殊到一般建立数学概念过程，感受定义的方式：先研究合理性，再下定义.

4. 理解概念，应用提升

(1) 例题示范，理解概念

例 1 如图 7，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，求 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值.



(1) (2)

图 7

师生活动：师生共同完成图 7（1）.

教师提问：(1) 求 $\sin A$ 实际上要确定什么？依据是什么？求 $\sin B$ 呢？

(2) 它们的对边和斜边都已知吗？未知的怎么办呢？

(3) 能口述解题过程吗？

学生思考作答，教师在学生代表口述的解题过程中引导规范步骤并同步板书，

解：如图（1），在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理得

$$AB=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12.$$

因此

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13},$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}.$$

图 7（2）由学生独立完成，同桌交流，学生代表板演展示，教师巡视指导.

解：如图 7（2），在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理得

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

因此

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5},$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}.$$

设计意图：巩固锐角的正弦概念，规范学生的解题格式.

(2) 课堂练习，提升能力

练习 1 判断下列结论是否正确.

①如图 8，$\sin A=\frac{1}{2}$(m).

②在 Rt$\triangle ABC$ 中，锐角 A 的对边和斜边同时扩大 100 倍，$\sin A$ 的值也扩大 100 倍.

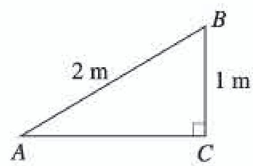


图 8

③如图 9，$\angle A=30°$，则 $\sin A=\frac{3}{7}$.

师生活动：学生独立，小组讨论，学生代表交流小组结果，并说明理由.

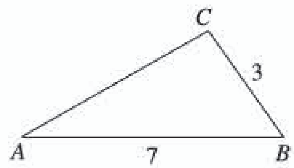


图 9

练习 2　教科书习题 34.1 第 1 题（只求正弦）.

师生活动：学生独立思考、合作完成习题，教师巡视及时解决学生困难.

设计意图：进一步巩固锐角的正弦概念，加深对它的理解.

5. 自我评价，总结反思

请同学们根据以下问题回顾本节课的内容：

什么叫做锐角的正弦？定义锐角正弦的过程、方式是什么？与以前下定义的方式有什么不同？

师生活动：引导学生思考回答. 回顾、思考、组织语言回答.

设计意图：引导学生梳理学习内容，提炼学习过程中的数学思想方法.

6. 布置作业

（1）教科书第 42 页练习.

（2）课外探究：在直角三角形中，锐角 A 的邻边与斜边的比是否也是一个固定值？

六、目标检测设计

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=9$，$BC=12$，求 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值.

设计意图：考查根据已知直角三角形的边长求一个锐角的正弦值.

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$\sin A=\frac{3}{4}$，求 BC 和 AB 的值.

设计意图：考查利用正弦概念和勾股定理解决简单的问题.

3. 如图 10，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为点 D，且 $BD=3$，$DC=4$，求 $\sin A$ 的值.

设计意图：考查能否发现同一个锐角在不同的直角三角形中所对的对边和斜边.

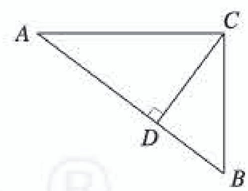


图 10

34.2　解直角三角形及其应用（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

解直角三角形的意义，直角三角形的解法.

2. 内容解析

本节是在学习锐角三角函数之后，结合已学过的勾股定理和三角形内角和定理，研究解直角三角形的问题. 本课内容既能加深对锐角三角形函数概念的理解，又为后续解决与其相关的实际问题

打下基础，在本章起到承上启下作用.

由直角三角形全等的判定定理可知，一个直角三角形可以由它的三条边和两个锐角这五个元素中的两个（其中至少有一个是边）唯一确定. 有了锐角三角函数知识，结合直角三角形中的两个锐角互余以及勾股定理，就可由这两个元素求出其他元素，这就是解直角三角形. 解直角三角形时，常常需要借助相应的直角三角形，寻求已知元素与未知元素间的关系式，这个过程体现了数形结合的思想.

本节课的教学重点是：直角三角形的解法.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解解直角三角形的意义和条件.

（2）能根据直角三角形中除直角以外的两个元素（至少有一个是边），解直角三角形.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：知道解直角三角形的内涵，以及根据直角三角形中已知元素，明确所有要求的未知元素；根据已知条件，能从全等三角形判定定理的角度，判断是否能解直角三角形.

达成目标（2）的标志是：根据元素间的关系，选择适当关系式，求出所有未知元素.

三、教学问题诊断分析

在直角三角形的边角关系中，三边之间的关系、两锐角之间的关系比较直接，而两边的比与一个锐角的关系，虽然通过锐角三角函数概念的学习，学生有了一定的基础，但在具体的直角三角形中，根据已知条件选择恰当的锐角三角函数，还是有些困难，易混淆，也易出错. 另外，解直角三角形往往需综合运用勾股定理、锐角三角函数等知识，具有一定的综合性.

本节课的教学难点是：恰当选择锐角三角函数，把已知和未知联系起来.

四、教学过程设计

1. 实例引入，初步体验

在上节“锐角三角函数”的学习中，我们建立了直角三角形中边与角之间关系. 回到本章引言提出的描述比萨斜塔倾斜程度的问题，把该问题 1972 年时的情形抽象为一个数学问题，你能解决这个问题吗？

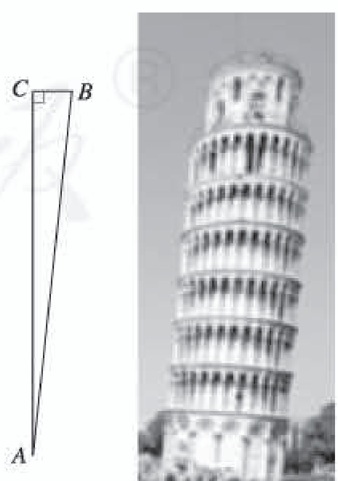


图 1

问题1 设塔顶中心点为 B，塔身中心线与垂直中心线的夹角为 $\angle A$，过点 B 向垂直中心线引垂线，垂足为点 C（图 1）. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=5.2$ m，$AB=54.5$ m，求 $\angle A$ 的度数.

师生活动：教师呈现问题并引导学生结合图形，观察已知的边和要求的角之间的关系，分析得到通过求 $\angle A$ 的正弦来求 $\angle A$ 的度数. 然后投影显示：

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5.2}{54.5}\approx 0.0954,$$

利用计算器可得$\angle A\approx 5°28'$.

追问 1 将上述问题推广为一般的数学问题如何求解？

师生活动：学生思考并作答：已知直角三角形的斜边和一条直角边，求它的锐角的度数. 利用锐角的正弦（或余弦）的概念直接求解.

追问 2 在上述 Rt$\triangle ABC$ 中，你还能求其他未知的边和角吗？

师生活动：学生思考并说明求解思路. 教师把问题一般化，给出解直角三角形的内涵：

一般地，在直角三角形中，除直角外，共有五个元素，即三条边和两个锐角，由直角三角形中的已知元素，求出其余未知元素的过程，叫做解直角三角形.

设计意图：通过实际问题，激发学生学习的兴趣，把实际问题转化为数学问题，并一般化：已知直角三角形斜边和直角边，求它的锐角的度数. 通过求解的过程，初步体会解直角三角形的内涵，引入课题.

问题 2 回想一下，刚才解直角三角形的过程中，用到了哪些知识？你能梳理一下直角三角形中各个元素之间的关系吗？

师生活动：引导学生结合图 2，梳理五个元素之间的关系，学生展示：

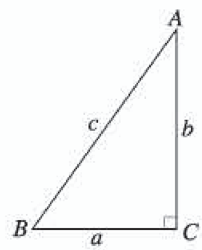


图 2

（1）三边之间的关系

$$a^2+b^2=c^2\text{（勾股定理）}.$$

（2）两锐角之间的关系

$$\angle A+\angle B=90°.$$

（3）边角之间的关系

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \tan A=\frac{a}{b};$$

$$\sin B=\frac{b}{c},\ \cos B=\frac{a}{c},\ \tan B=\frac{b}{a}.$$

设计意图：有条理地梳理直角三角形中五个元素之间的关系，明确各自的作用，便于应用.

问题 3 从问题 1 及其追问的解答过程来看，在直角三角形中，知道斜边和一条直角边这两个元素，可以求其余的三个元素. 一般地，知道五个元素中的任意两个元素，可以求其余元素吗？

师生活动：教师直接给出结论：

在直角三角形中，知道除直角以外的五个元素中的两个元素（至少有一个是边），就可以求其余三个未知元素.

探究过程作为课后作业.

设计意图：明确解直角三角形的条件.

2. 例题示范，探究方法

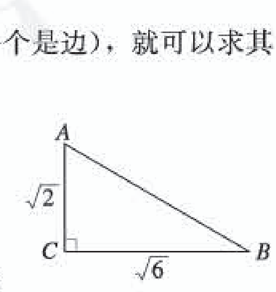


图 3

例 1 如图 3，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{6}$，解这个直角三角形.

师生活动：学生在教师问题的引导下，思考如何求出所有未知元素.

追问 1 解直角三角形的目标是什么？

师生活动：学生回答，解直角三角形的目标是由已知元素求所有未知元素.

追问 2 在 Rt△ABC 中，有哪些未知元素？如何求这些未知元素？求解的依据是什么？

师生活动：先由学生找出所有未知元素：$\angle A$，$\angle B$ 和 AB，然后学生逐一说明求每一个未知元素的方法和依据. 教师引导学生结合图 3，选择反映五个元素之间关系的式子，鼓励学生采取不同方法求解. 并引导学生选择简洁的解题途径，最后给出简洁、规范的解题步骤.

解：$\because \tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle A=60°$，

$\angle B=90°-\angle A=90°-60°=30°$，

$AB=2AC=2\sqrt{2}$.

设计意图：通过解特殊的直角三角形，训练学生解直角三角形的思路和方法，提高分析和解决问题的能力.

例 2 如图 4，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=35°$，$b=20$，解这个直角三角形（结果保留小数点后一位）.

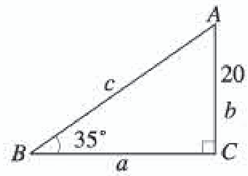


图 4

师生活动：先由学生代表参照例 1 的解题思路，分析本题的解题思路；然后由学生独立完成，再小组交流；最后由学生代表展示解题步骤. 对于求 c，如果学生采取不同方法，让他们展示不同方法；如果学生没有采取不同方法，教师注意引导他们思考其他解法.

解：$\angle A=90°-\angle B=90°-35°=55°$.

$\because \tan B=\dfrac{b}{a}$，

$\therefore a=\dfrac{b}{\tan B}=\dfrac{20}{\tan 35°}\approx 28.6$.

$\because \sin B=\dfrac{b}{c}$，

$\therefore c=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{20}{\sin 35°}\approx 34.9$.

设计意图：进一步训练解一般直角三角形的思路和方法，并体会从计算简便的角度选用适当的关系式求解.

3. 应用迁移，巩固提高

练习 编写一道解直角三角形的题并解答.

师生活动：同桌两个同学一组，讨论编写一道解直角三角形的题后，独立完成，同桌交流，学生代表展示，教师引导归纳.

下面两种情况下的直角三角形可解：(1) 已知两条边；(2) 已知一条边和一个锐角.

设计意图：学生自己编写一道解直角三角形的题，并验证是否能求出其他元素，进一步明确解直角三角形的条件.

4. 归纳交流，总结反思

请同学们根据以下问题回顾本节课的内容.

（1）直角三角形中，除直角外，五个元素之间有怎样的关系？

（2）什么叫做解直角三角形？

（3）两个直角三角形全等要具备什么条件？为什么在直角三角形中，已知一条边和一个锐角，或两边就能解这个直角三角形？

师生活动：教师与学生一起回顾本节课研究的内容.

设计意图：引导学生从知识和方法两个方面总结自己的收获，理清解直角三角形的目的、条件、依据、方法，提升综合运用知识的能力.

布置作业：教科书习题 34.2 第 1 题.

五、目标检测设计

1. 下列条件中，不能解直角三角形的是（　　）.

（A）已知两条边　　（B）已知一边与一锐角　　（C）已知三边　　（D）已知两锐角

设计意图：考查对解直角三角形条件的把握.

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c，$\angle A=60°$，$b=1$，则$\angle B=$________，$a=$________，$c=$________.

设计意图：考查对直角三角形基本元素之间关系的理解，以及合理选择关系式.

3. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，根据下列条件解直角三角形：

（1）$a=10\sqrt{3}$，$c=20$；（2）$\angle B=45°$，$c=4$.

设计意图：考查能否根据条件解直角三角形.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓广延伸与相关史料

1. 正弦和余弦

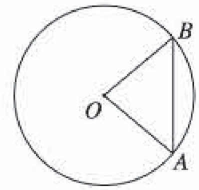


图 34-1

三角学开创之初，希腊人思考的是定圆各中心角所对应的弦长（全弦）. 如托勒密（Ptolemy，约 100—约 170）把圆周（角）分成 360 份，把直径分为 120 份，然后对于圆心角$\angle AOB$ 求对应的弦 AB 的长（直径的$\frac{1}{120}$为弦的度量单位），如图 34-1. 而印度人则不同，他们研究等于一个圆心角的两倍的圆心角所对弦的一半，即$\angle AOB$ 的倍角$\angle AOC$ 对应的半弦 AD 的长，如图 34-2. 例如，印度为我们知道的最早的数学家阿耶波多（Aryabhata Ⅰ，476－550），他把圆周分成 $360\times60=21\ 600$（份），然后根据圆周长公式 $C=2\pi r$，$\pi\approx3.141$，求得圆半径的近似值为 3 438（份），再求出各圆周角所

对的半弦的长（以半径的$\frac{1}{3\ 438}$为度量单位），这与现今的正弦（sine）概念接近了一步，且已有弧度制思想的雏形. 当时阿耶波多称此半弦为 jlva，意即弓弦，这个词阿拉伯人音译为 dschiba，后经多次转抄，误作 dschiab，意思是胸膛、海湾或凹处，已与原意有出入. 到了 12 世纪，意大利人 T · 柏拉图又将此字译成拉丁文 sinus（胸当），这就是现在正弦一词的来由.

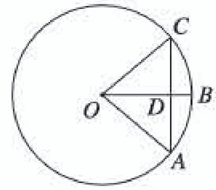


图 34-2

1631 年邓玉涵（1576—1630）、汤若望（1591—1666）与徐光启（1562—1633）编译的《大测》一书，将 sinus 译成正半弦或前半弦，简称正弦，这就是我国正弦一词的来源. 正弦、余弦（cosine）函数的现代定义则起源于欧拉（L. Euler，1707—1783).

正弦和余弦的符号也是经过长期的发展才成为现在的形式. 数学家毛罗利科早在 1558 年就已采用三角函数符号，但当时并无函数的概念，于是只称作三角线. 他以 sin us1^{m}arcus 表示正弦，以 sin us2^{m}arcus 表示余弦. 而首先真正使用简化符号表示三角线的是 T · 芬克. 他以符号“sin ”“sin. com”分别表示正弦、余弦，正弦的符号与现代我们看到的三角符号相同，但是余弦的符号还不够简化，后来，这两个符号的使用也发生过很多的变化. 直到 1753 年，欧拉开始使用 sin，cos 表示正弦和余弦，这两个符号才算基本定型.

2. 正切和余切

公元 727 年，唐朝卓越的天文学家、高僧一行受唐玄宗之命撰成《大行历》. 为了求得全国任何一地方一年中各节气的日影长度，一行编出了太阳天顶距（角）和八尺之竿的日影长度对应表，而八尺之竿的日影长度与竿的长度之比即为天顶距（角）的正切（ tangent），如图 34-3 所示. 而著名的叙利亚天文学家、数学家阿尔 · 巴坦尼（850?—929）于 920 年左右编制成了相隔 1° 的余切函数（cotangent）表. 我们知道，太阳高度（角）和太阳天顶距（角）互为余角. 这样两人的发现实际上是一回事，但巴坦尼比一行要晚近 200 年.

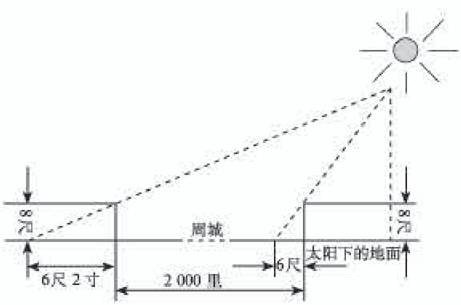


图 34-3

在欧洲，英国数学家、坎特伯雷大主教布拉瓦丁（1290?—1349）首先把正切、余切引入他的三角计算之中. 希腊数学家海伦在计算正多边形面积时，就已经用到余切三角函数值.

T · 芬克于 1583 年创立了“tangent”，并表示相应的概念为正切，用“tan ”和“tan. com”表示正切和余切，正切的符号与现在的形式相同，而余切的符号后来也发生过很多的变化，直到欧拉使用的时候才基本定型.

3. 三角学的历史

早期三角学不是一门独立的学科，而是依附于天文学，是天文观测结果推算的一种方法，因而最先发展起来的是球面三角学. 古希腊、印度、阿拉伯数学中都有三角学的内容，可大都是天文观测的副产品. 例如，古希腊门纳劳斯（Menelaus of Alexandria，公元 100 年左右）著《球面学》，提出了三角学的基础问题和基本概念，特别是提出了球面三角学的门纳劳斯定理；50 年后，另一个古希腊学者托勒密著《天文学大成》，初步发展了三角学. 而在公元 499 年，印度数学家阿耶波多也表述出古代印度的三角学思想；其后的瓦拉哈米希拉（Varahamihira，约 505—587）最早引

入正弦概念，并给出最早的正弦表；公元 10 世纪的一些阿拉伯学者进一步探讨了三角学. 当然，所有这些工作都是天文学研究的组成部分. 直到纳西尔丁（Nasīral-Dīn al-Tūsī，1201—1274）的《横截线原理书》才开始使三角学脱离天文学，成为纯粹数学的一个独立分支. 而在欧洲，最早将三角学从天文学独立出来的数学家是德国人雷格蒙塔努斯（Regiomontanus，1436—1476）.

雷格蒙塔努斯的主要著作是 1464 年完成的《论各种三角形》. 这是欧洲第一部独立于天文学的三角学著作. 全书共 5 卷，前 2 卷论述平面三角学，后 3 卷讨论球面三角学，是欧洲传播三角学的源泉. 雷格蒙塔努斯还较早地制成了一些三角函数表.

雷格蒙塔努斯的工作为三角学在平面和球面几何中的应用建立了牢固的基础. 他去世以后，其著作手稿在学者中广为传阅，并最终出版，对 16 世纪的数学家产生了相当大的影响，也对哥白尼等一批天文学家产生了直接或间接的影响.

三角学一词的英文是 trigonometry，来自拉丁文 tuigonometuia. 最先使用该词的是文艺复兴时期的德国数学家皮蒂斯楚斯（B. Pitiscus，1561—1613），他在 1595 年出版的《三角学：解三角形的简明处理》中创造这个词. 其构成法是由三角形（tuiangulum）和测量（metuicus）两字凑合而成. 要测量计算离不开三角函数表和三角学公式，它们是作为三角学的主要内容而发展的.

16 世纪三角函数表的制作首推奥地利数学家雷蒂库斯（G. J. Rheticus，1514—1574）. 他 1536 年毕业于滕贝格（Wittenbery）大学，留校讲授算术和几何. 1539 年赴波兰跟随著名天文学家哥白尼学习天文学，1542 年受聘为莱比锡大学数学教授. 雷蒂库斯首次编制出全部 6 种三角函数的数表，包括第一张详尽的正切表和第一张印刷的正割表.

17 世纪初对数发明后大大简化了三角函数的计算，制作三角函数表已不再是很难的事，人们的注意力转向了三角学的理论研究. 不过三角函数表的应用却一直占据重要地位，在科学研究与生产生活中发挥着不可替代的作用.

三角公式是三角形的边与角、边与边或角与角之间的关系式. 三角函数的定义已体现了一定的关系，一些简单的关系式在古希腊人以及后来的阿拉伯人中已有研究.

文艺复兴后期，法国数学家韦达（F. Vieta，1540—1603）成为三角公式的集大成者. 他的《应用于三角形的数学定律》(1579) 是较早系统论述平面和球面三角学的专著之一. 其中第一部分列出 6 种三角函数表，有些以分和度为间隔. 给出精确到 5 位和 10 位小数的三角函数值，还附有与三角值有关的乘法表、商表等. 第二部分给出造表的方法，解释了三角形中诸三角线量值关系的运算公式. 除汇总前人的成果外，还补充了自己发现的新公式，如正切定律、和差化积公式等. 他将这些公式列在一个总表中，使得任意给出某些已知量后，可以从表中得出未知量的值. 该书以直角三角形为基础. 对斜三角形，韦达仿效古人的方法化为直角三角形来解决. 对球面直角三角形，给出计算的完整公式及其记忆法则，如余弦定理，1591 年韦达又得到多倍角关系式，1593 年又用三角方法推导出余弦定理.

1722 年法国数学家棣莫弗（A. De Meiver，1667—1754）得到以他的名字命名的三角学定理

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,$$

并证明了 n 是正有理数时公式成立；1748 年欧拉证明了 n 是任意实数时公式也成立，他还给出另一个著名公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

对三角学的发展起到了重要的推动作用.

近代三角学是从欧拉的《无穷小分析引论》开始的. 他定义了单位圆，并以函数线与半径的比值定义三角函数，他还创用小写拉丁字母 a，b，c 表示三角形三条边，大写拉丁字母 A，B，C 表示三角形三个角，从而简化了三角公式. 使三角学从研究三角形解法进一步转化为研究三角函数及其应用，成为一个比较完整的数学分支学科. 而由于上述诸人及 19 世纪许多数学家的努力，形成了现代的三角函数符号和三角学的完整的理论.

二、拓展性问题

1. 不查表，你能求 15°的三角函数值吗?

【答案与提示】构造一个有一个锐角为 15°的直角三角形，再利用锐角三角函数的定义求解.

解：如图 34-4，作 $\triangle ABC$，使 $AB=AC$，且 $\angle BAC=30^\circ$，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E.

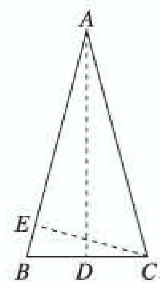


图 34-4

$\therefore\ BD=CD=\dfrac{1}{2}BC$，$\angle BAD=15^\circ$，

$\angle ABC=\angle ACB=75^\circ$.

又 $\because\ CE\perp AB$，$\therefore \angle ACE=60^\circ$.

$\therefore\ \angle BCE=75^\circ-60^\circ=15^\circ$.

$\therefore\ \angle BAD=\angle BCE$.

又 $\because \angle ABD=\angle CBE$，

$\therefore\ \mathrm{Rt}\triangle ABD\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBE$.

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{BE}$，即 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{BE}$，

亦即 $BC^2=2AB\cdot BE$.

不妨设 $AB=AC=2a$，则 $CE=a$，$AE=\sqrt{3}a$，$BE=(2-\sqrt{3})a$，

$\therefore\ BC^2=2\cdot 2a(2-\sqrt{3})a=(8-4\sqrt{3})a$.

$\therefore\ BC=(\sqrt{6}-\sqrt{2})a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，由锐角三角函数的定义，得

$$\sin 15^\circ=\sin\angle BCE=\frac{BE}{BC}=\frac{(2-\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 15^\circ=\cos\angle BCE=\frac{CE}{BC}=\frac{a}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\tan 15^\circ=\tan\angle BCE=\frac{BE}{CE}=\frac{(2-\sqrt{3})a}{a}=2-\sqrt{3}.$$

2. 三角形的面积

求证：$\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

即三角形的面积等于任意两边与它们夹角的正弦之积的一半.

【答案与提示】如图 34-5，作$\triangle ABC$ 的高 BD.

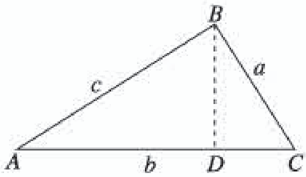


图 34-5

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDA$ 中，$\sin A=\dfrac{BD}{AB}$，$\therefore BD=AB\cdot\sin A$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

同理，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$.

3. 有趣的螺丝钉问题

我们知道，机器上用的螺丝钉，它上面的螺纹以一定的角度旋转上升，使得螺丝旋转时向前推进. 一颗直径是 6 mm 的螺丝钉，若每转一圈向前推进 1.25 mm，问螺纹的初始角应是多少度?

【答案与提示】据题意，螺丝旋转一周时（从点 A 旋转上升到点 C），把圆柱的相应侧面展开，得到矩形 $ABCD$（图 34-6），它的一条边 AB 为圆柱的周长，故 $AB=2\pi\times\dfrac{6}{2}=6\pi(\mathrm{mm})$；另一条边 BC 为螺丝钉推进的距离，因此 $BC=1.25(\mathrm{mm})$；对角线 AC 为螺纹线“拉直”所成的线段，所以$\angle BAC$ 即为螺纹的初始角.

设螺纹的初始角为 θ，则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，有

$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{1.25}{6\pi}\approx 0.0663$.

$\therefore\theta\approx 3°47'$.

即螺纹的初始角约为 $3°47'$.

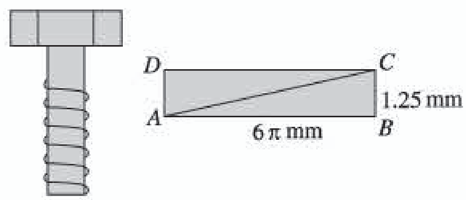


图 34-6

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章内容包括正弦、余弦和正切等锐角三角函数的概念，解直角三角形及其在实际问题中的应用.

对于锐角三角函数的概念，应考查学生是否理解正弦、余弦和正切这些概念，能否结合具体的直角三角形求锐角三角函数的值，能否运用锐角三角函数的概念中反映的角和边的关系进行简单计算.

对于解直角三角形，应考查学生能否运用勾股定理、直角三角形的两个锐角互余以及锐角三角函数解直角三角形，能否用解直角三角形的有关知识解决简单的实际问题.

2. 考查锐角三角函数的概念，以及利用锐角三角函数解直角三角形，应注意以下问题：

（1）对于锐角三角函数的考查不应只停留在记忆的水平，应把重点放在对知识的理解与应用上，并关注锐角三角函数与几何图形之间关系.

（2）对于解直角三角形的考查要把重点放在与具体问题的结合上，应包括两方面的问题：一为有实际背景的问题；二为组合图形的求解问题.

3. 在锐角三角函数的概念和解直角三角形学习过程中，要关注知识的形成过程，加强知识间的相互联系，结合几何图形来理解概念和进行计算.

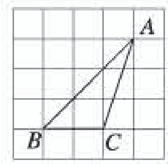
二、测试题（时间：45 分　满分 100 分）

（一）选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=5$，$CA=12$，则 $\cos B=$（　　）.

（A）$\dfrac{5}{12}$　　（B）$\dfrac{12}{5}$　　（C）$\dfrac{5}{13}$　　（D）$\dfrac{12}{13}$

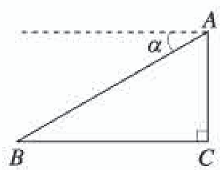
2. 如图，△ABC 的顶点是正方形网格的格点，则 $\sin B$ 的值为（　　）.



（第 2 题）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. 如图，某飞机在空中 A 处探测到地平面目标 B，此时从飞机上看目标 B 的俯角 $\alpha=30°$，飞行高度 $AC=1\ 200$ m，则飞机到目标 B 的距离 AB 为（　　）.



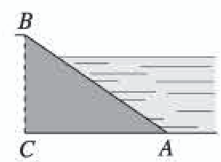
（第 3 题）

（A）1 200 m　　（B）2 400 m　　（C）$400\sqrt{3}$ m　　（D）$1\ 200\sqrt{3}$ m

4. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，若 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan B=$（　　）.

（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$　　（C）$\dfrac{5}{3}$　　（D）$\dfrac{3}{5}$

5. 如图，某水库堤坝横断面迎水坡 AB 的斜面坡度是 $1:\sqrt{3}$，堤坝高 $BC=50$ m，则迎水坡面 AB 的长度是（　　）.



（第 5 题）

（A）100 m　　（B）$100\sqrt{3}$ m　　（C）150 m　　（D）$50\sqrt{3}$ m

6. 在锐角△ABC 中，$AB=AC=10$，$\tan B=\dfrac{3}{4}$，则底边 BC 的长为（　　）.

（A）6　　（B）8　　（C）12　　（D）16

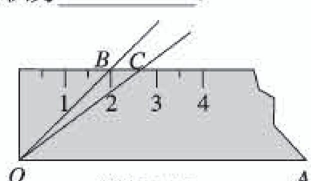
（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. $\sqrt{2}\cos 30°$的值是__________.

8. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=3\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{6}$，则$\angle B$ 的度数为__________.

9. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\tan A=\dfrac{4}{3}$，$BC=8$，则△ABC 的面积为__________.

10. 如图，将 45°的$\angle AOB$ 按下面的方式放置在一把刻度尺上：顶点 O 与尺下沿的端点重合，OA 与尺下沿重合. OB 与尺上沿的交点 B 在尺上的读数恰为 2 cm. 若按相同的方式将 37°的$\angle AOC$ 放置在该刻度尺上，则 OC 与尺上沿的交点 C 在尺上的读数为____cm.（结

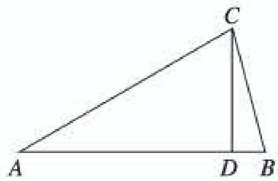


（第 10 题）

果精确到0.1 cm，参考数据 $\sin 37^\circ \approx 0.60$，$\cos 37^\circ \approx 0.80$，$\tan 37^\circ \approx 0.75$）

（三）**解答题**（第 11，12 题，每题 8 分；第 13，14 题，每题 12 分，共 40 分）

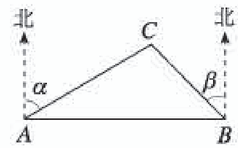
11. 如图，在顶角 $\angle A = 30^\circ$ 的等腰三角形 ABC 中，$AB = AC$，若过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，则 $\angle BCD = 15^\circ$. 根据图形计算 $\tan 15^\circ$ 的值.



（第 11 题）

12. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$\angle B = 25^\circ$，$b = 10$，解这个直角三角形（结果保留小数点后一位）.（参考数据：$\sin 25^\circ = 0.42$，$\cos 25^\circ = 0.91$，$\tan 25^\circ = 0.47$）

13. A，B 两市相距 150 km，分别从 A，B 处测得国家级风景区中心 C 处的方位角如图所示，$\tan \alpha = 1.627$，$\tan \beta = 1.373$. 已知风景区是以 C 为圆心，45 km 为半径的圆形区域. 为了开发旅游，有关部门设计、修建连接 A，B 两市的高速公路. 问高速公路 AB 是否穿过风景区，请说明理由.



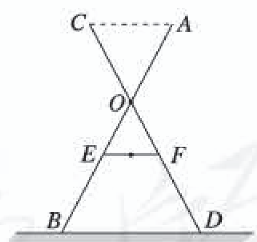
（第 13 题）

14. 小红家的阳台上放置了一个晒衣架如图（1）. 图（2）是晒衣架的侧面示意图，立杆 AB，CD 相交于点 O，B，D 两点立于地面. 经测量，$AB = CD = 136$ cm，$OA = OC = 51$ cm，$OE = OF = 34$ cm. 现将晒衣架完全稳固张开，扣链 EF 成一条线段，且 $EF = 32$ cm.

（1）求扣链 EF 与立杆 AB 的夹角 $\angle OEF$ 的度数（精确到 0.1°）；

（2）小红的连衣裙穿在衣架后的总长度达到 122 cm，垂挂在晒衣架上是否会拖落到地面？请通过计算说明理由.（可使用科学计算器）


（1）



（2）

（第 14 题）

参考答案

1. C. 本题考查余弦的概念.
2. B. 本题考查正切的概念.
3. B. 本题考查正弦的概念.

4. A. 本题考查锐角三角函数的概念.

5. A. 本题考查解直角三角形的应用——坡度坡角问题.

6. D. 本题考查利用锐角三角函数进行简单计算.

7. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 本题考查特殊角的三角函数值.

8. 30°. 本题考查解直角三角形.

9. 24. 本题考查锐角三角函数概念的应用.

10. 2.7. 本题考查解直角三角形的应用.

11. $2-\sqrt{3}$. 本题考查锐角三角函数概念.

12. $\angle A=65°$，$c=23.8$，$a=21.3$. 本题考查解直角三角形.

13. AB 不穿过风景区.

如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，则

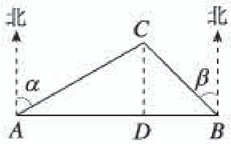
$AD=CD\cdot\tan\alpha$；$BD=CD\cdot\tan\beta$.

由 $AD+BD=AB$，得 $CD\cdot\tan\alpha+CD\cdot\tan\beta=AB$.

$\therefore CD=\frac{AB}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{150}{1.627+1.373}=\frac{150}{3}=50(\text{km})$.

$\because CD=50>45$，$\therefore$高速公路 AB 不穿过风景区.

本题考查解直角三角形的应用.



（第 13 题）

14. (1) 在$\triangle OEF$ 中，$OE=OF=34$ cm，$EF=32$ cm；

如图 (1)，作 $OM\perp EF$ 于点 M，则 $EM=16$ cm；

$\cos\angle OEF=\frac{EM}{OE}=\frac{16}{34}\approx0.471$，

用科学计算器求得$\angle OEF=61.9°$.

(2) 小红的连衣裙晒衣架后会拖落到地面.

$\because EF\parallel BD$，由 (1) 得$\angle ABD=\angle OEF=61.9°$.

如图 (2)，过点 A 作 $AH\perp BD$ 于点 H，

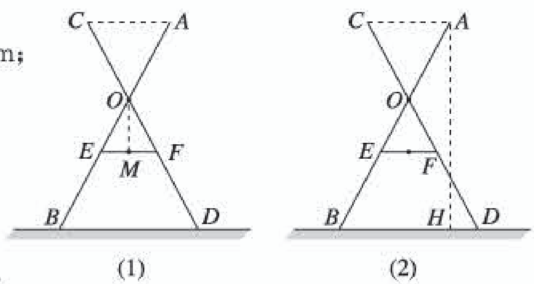
在$\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，

$\because \sin\angle ABH=\frac{AH}{AB}$，

$\therefore AH=AB\times\sin\angle ABH=136\times\sin 61.9°=136\times0.882\approx120.0(\text{cm})$，

$\therefore$小红的连衣裙挂在晒衣架后总长度 122 cm>晒衣架高度 $AH=120$ cm.

本题考查解直角三角形的综合应用.



（第 14 题）

第三十五章　投影与视图

Ⅰ 总体设计

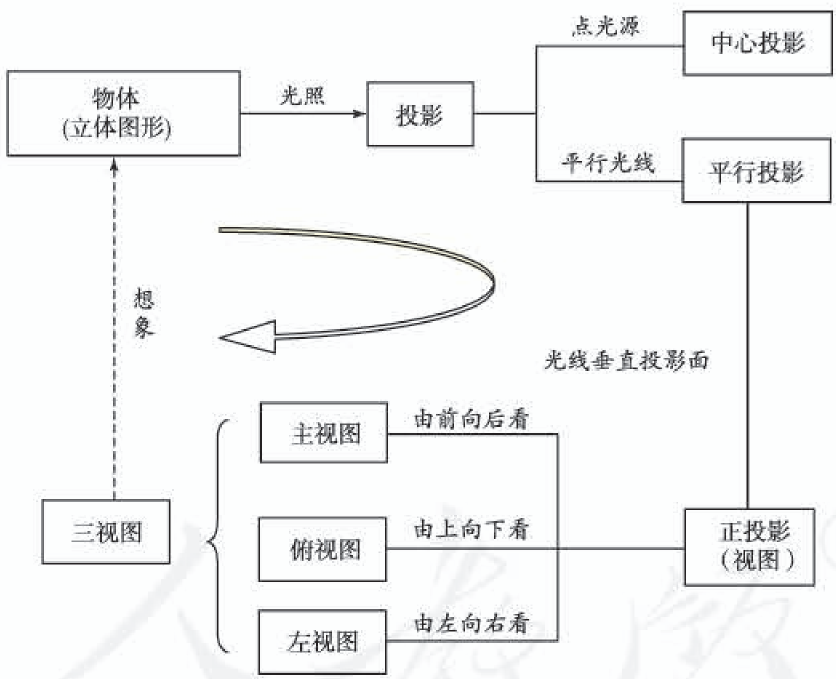
一、本章学习目标

1. 通过丰富的实例，了解中心投影和平行投影的概念.

2. 会画直棱柱、圆柱、圆锥、球的主视图、左视图、俯视图，能判断简单物体的视图，并会根据视图描述简单几何体.

3. 通过实例，了解直棱柱、圆柱、圆锥的视图与展开图在现实生活中的应用.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章内容包括：投影的基础知识，包括投影、平行投影、中心投影、正投影等概念，正投影的成像规律；视图、三视图等概念，三视图的位置和度量规定，一些基本几何体的三视图，简单立体图形（包括相应的展开图）与它的三视图的相互转化；课题学习：制作立体模型.

本章分三节：35.1 投影，35.2 三视图和 35.3 课题学习　制作立体模型.

“35.1 投影”首先从物体在日光或灯光下的影子说起，引出投影、平行投影、中心投影、正投影等概念；然后以铁丝和正方形纸板的影子为例，讨论当直线和平面多边形与投影面具有三种不同

位置关系时的正投影，归纳得出正投影的一般规律；最后以正方体为例，讨论立体图形与投影面具有不同位置关系时的正投影. 整个讨论过程按照一维、二维和三维的顺序展开，研究的思路是从定义出发，主要研究特殊情形下图形的性质和图形间的位置关系.

“35.2 三视图”的重点是三视图，其中包括三视图的成像原理、三视图的位置和度量规定、一些基本几何体的三视图等，最后通过 5 道例题讨论简单立体图形（包括相应的展开图）与它的三视图的相互转化. 这一节是全章的重点内容，它不仅包括三视图的基本概念和画法，而且包括立体图形和平面图形的联系与转化的内容，这些内容与培养空间观念有着直接的关系.

最后安排了“观察、想象、制作”相结合的实践活动：“35.3 课题学习　制作立体模型”，这是结合实际、动脑与动手并重的学习内容. 进行这个课题学习既可以采用独立完成的形式，也可以采用合作学习的方式. 应该把这个课题学习看作对前面学习的内容的一次联系实际的检验，考查学生是否切实理解掌握本章主要内容，以及能否灵活运用它们.

本章内容与立体图形的关系密切，需要在图形形状方面进行想象和判断，要完成的题目大多属于识图、画图、制作模型等类型，涉及计算的问题不多，这与其他章有较为明显的区别.

四、课时安排

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

35.1　投影	3 课时
35.2　三视图	5 课时
35.3　课题学习　制作立体模型	2 课时
数学活动 小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 重视结合实际例子讨论问题，在直观认识的基础上归纳基本规律

数学是以数量关系和空间形式为研究对象的科学，数量关系和空间形式都是从现实世界中抽象出来的. 投影和视图的知识是从实际需要（建筑、制造等）中产生的，它们与现实世界联系紧密.

在本章之前，学生已经接触过视图的内容，对投影和视图的知识已有初步了解，只是还没有明确地接触一些基本名词术语，对有关基本规律还缺乏归纳总结. 感性认识需要上升为理性认识，理论指导下的实践会更自觉有效. 从理论上说，投影和视图的知识是以立体几何、画法几何等为基础依据的，利用这些基础依据对投影和视图的知识进行深入的分析. 但是由于初中学生的知识储备的局限，在初中进行投影和视图内容的教学不可能完全从理论角度深入进行，而应该借助直观模型的作用，重视结合实际例子讨论问题，做好由感性认识到理性认识的过渡，通俗易懂地介绍一些基本概念、基本原理（规律）.

本章在编写时重视结合实际例子讨论问题，在直观认识的基础上归纳基本规律. 在引出投影、平行投影、中心投影、正投影等概念时，利用了在日光或灯光下物体的影子，举了皮影戏、日晷、探照灯、普通灯泡等实例；在归纳正投影的规律时，教科书先后结合铁丝、正方形纸板和正方体模型的例子，讨论当它们与投影面具有不同的位置关系时的正投影，归纳得出一般规律；在引出三视图的概念及规律时，先从一本书的简单例子分析起，借助它由特殊到一般展开相关内容，然后再用基本几何体和支架、密封罐等物体为例，进行进一步的讨论. 本章最后的课题学习，设计了动手实

践的活动，通过制作简单立体模型加强对三视图等内容的理解认识．这些安排都体现了利用典型例子、借助直观、归纳基本规律的编写思想．

2．重视平面图形与立体图形的联系，重在培养空间观念

在学习本章之前，学生已经具有一定的关于平面图形与立体图形的知识．本章从投影的角度对如何用三视图这样的平面图形表示立体图形进行进一步讨论，提高学生对于图形的认识，增强平面图形与立体图形相互转化的能力，进一步培养空间观念．

在“35.1 投影”中，介绍有关投影的概念和规律，重点是如何由物体得到其投影．客观世界中物体形状一般是三维的立体图形，它们的影子一般是二维平面图形，由物体产生投影是将立体图形转化为平面图形的过程．从映射角度看，这是从三维空间到二维平面的映射．物体是原像，其投影是映射后的像，原像与像存在对应关系，正投影就是一种映射．在“35.2 三视图”中，从两方面反映平面图形与立体图形的联系．这一节的前面部分（例 2 之前，含例 2）主要是三视图的概念、规律以及画简单几何体的三视图，这些是由立体图形得到相应平面图形的过程；这一节的后面部分（例 3 以后，含例 3）主要是由三视图想象相应物体形状的内容，这些是由平面图形得到相应立体图形的过程．两方面结合起来，就从不同角度反映了平面图形与立体图形的联系．从技能上说，认识平面图形与立体图形的联系，有助于根据需要实现它们之间的相互转化，即有助于学会画三视图和由三视图想象立体图形．从能力上说，认识平面图形与立体图形的联系，对于培养空间观念非常重要．本章内容主要目的是在介绍投影与视图知识的基础上，发展学生的空间观念．

六、对本章教学的建议

1．充分借助直观模型，帮助学生克服立体几何知识的不足

本章教学，不可避免涉及立体几何中的一些基础知识，例如空间中直线与直线（简称“线线”）、直线与平面（简称“线面”）、平面与平面（简称“面面”）的位置关系（相交、垂直和平行），学生对这些知识已经有一些感性认识．教学时应利用学生的生活经验，重视相关内容与实际的联系，通过实物演示，加强直观感知的过程，利用直观的、感性的认识，使学生能结合例子了解这些空间位置关系，并能把这种认识迁移到类似情形．教科书正是按照这种想法处理相关内容的．例如，介绍正投影时，涉及投影线与投影面的垂直关系（线面垂直），教科书采用结合插图并使用“投影线正对着投影面”这样通俗易懂的语言加以解释的处理方法，使学生了解其基本意思．又如，介绍正投影的规律时，教科书先后选择了铁丝、正方形纸板和正方体模型等例子，采用插图和文字相结合的方式，按照讨论对象的维数从一，二到三的顺序说明有关平行、斜交和垂直的位置关系．

2．重视从不同角度加强空间观念的培养

空间观念是《课标（2011 年版）》提到的十大核心概念之一．它是学生应该具备的一种重要观念，本章内容非常适合培养这种观念．本章所讨论的对象是投影与视图，其中只有少量计算问题，也没有形式上的推理证明．这与前面形成明显的区别．本章主要是立体图形与平面图形的相互转化问题，而掌握立体图形与平面图形的联系是实现上述转化的关键．要掌握这种联系，不仅需要认识从立体图形到平面图形的转化过程，还需要认识从平面图形到立体图形的转化过程，即需要从两方面双向地认识这种联系．正因如此，本章在编写中先后安排了“由物画图”和“由图想物”两类问题，它们各有侧重，分别承担了不同的任务，前者可以使人认识到立体图形的投影是什么样的平面图形，后者可以使人把相关的平面图形在头脑中综合成为相应的立体图形．

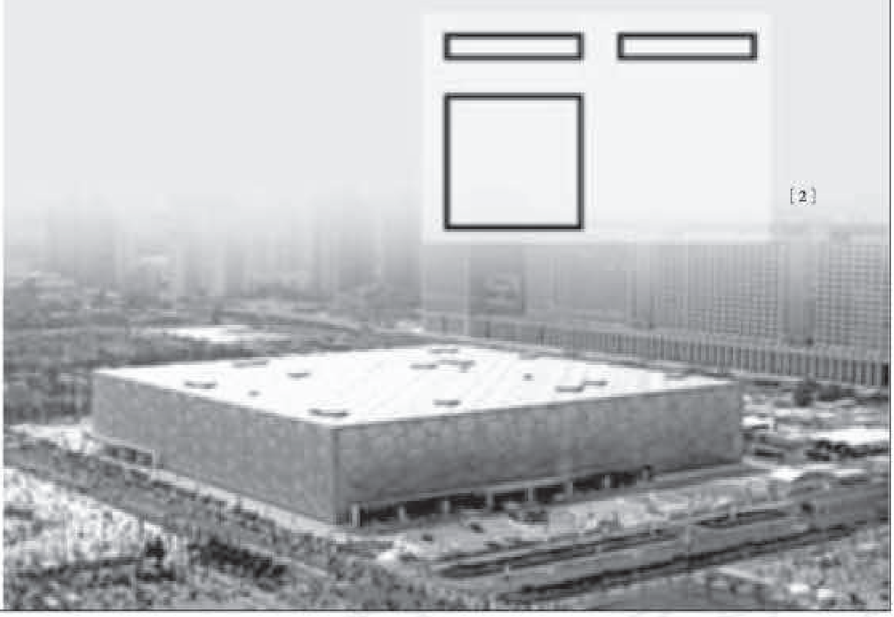
鉴于以上分析，建议教学中注意从不同角度加强空间观念的培养．在不同教学阶段，思考问题

的角度可能有所不同，要解决的问题也有区别.“由物画图”可以看成是一个分解（从不同角度分析）的过程，而“由图想物”是一个综合的过程. 解决问题有时需要分解，有时需要综合，有时需要两者结合. 应注意两者的教学要有合理的顺序，一般说“由物画图”是“由图想物”的基础，只有认识了视图所表示的意思，才可能把视图在头脑中立体化. 另外，教学中还应注意不同阶段内容之间的联系，注重全章教学的整体综合效果. 不论“由物画图”，还是“由图想物”，都要根据投影规律进行思考. 这些投影规律就是两者之间的联系，两类问题实际上是从相反的方向认识同一规律. 此外，必须指出：学习本章内容时，动脑与动手相结合是非常有效的，经历观察、画图、想象、制作模型等认识过程是非常必要的. 因此，建议教学中对于本章安排的实践性较强的内容（例如课题学习），要结合学生实际认真落实，而不是以教师的讲授代替学生的亲身体验.

第三十五章　投影与视图

你注意观察过周围物体在日光或灯光下的影子吗？影子和物体有着怎样的联系呢？人们从光线照射物体会产生影子得到启发，得出了投影的有关知识，并用这些知识来绘制视图. 在生产实践中，制造机器，建筑高楼，设计大桥……无一不和视图密切相关.

本章我们将学习投影的有关知识，并借助投影原理认识视图，再进一步讨论：如何由立体图形画出三视图？如何由三视图想象出立体图形？[1] 通过本章的学习，同学们会进一步提高对空间图形的认识.



[2]

Ⅱ 教材分析

[1]“由立体图形画三视图”和“由三视图想立体图形”各有侧重，前者可以使人认识到立体图形的投影是什么样的平面图形，后者可以使人把相关的平面图形在头脑中综合成为相应的立体图形. 两者互相联系，而投影规律是联系它们的纽带.

[2] 章前图选用了国家游泳中心（“水立方”）的照片.“水立方”是为 2008 年夏季奥运会修建的主游泳馆，是 2008 年北京奥运会标志性建筑物之一.“水立方”的整体结构呈现为长方体，这源于中国传统文化中“天圆地方”的设计思想.“水立方”与“圆形”的“鸟巢”——国家体育场相互呼应，相得益彰. 章前图的右上角安排了三视图，它大体反映了“水立方”的整体形状. 章前图配合引言中关于视图与建筑等有密切关系的叙述.

1. 图形是描述物体形状及大小的最好语言，视图具有广泛的应用，投影原理是绘制视图的基础. 本章在学生已有有关投影和视图的初步感性认识的基础上，通过对一些典型问题的讨论，引入基本概念，归纳基本规律，使学生对投影和视图的认识水平再次提升，并结合具体问题进一步培养运用几何知识分析和解决实际问题的能力.

2. 本章对于培养空间观念具有明显作用. 立体图形与平面图形的相互转化问题，是本章中的核心问题. 它包括两个方面：(1) 从立体图形到平面图形的转化；(2) 从平面图形到立体图形的转化. 因此，需要从两方面双向地认识平面图形和立体图形之间的转化. 掌握立体图形与相应平面图形的联系是认识上述转化的关键.

“由物画图”和“由图想物”是本章相互联系的两类问题. 前者是从“三维”到“二维”的变化过程，后者是从“二维”到“三维”的变化过程. 投影规律在两类问题中都是主要的依据.

[1] 本章中讨论的投影都是在平面上的投影，相对的投影面就是投影所在的平面.

[2] 这里所说的平行线是三维空间中互相平行的直线，这些直线不一定都在同一平面内，但其中任何两条直线都互相平行，在同一个平面内.

[3] 太阳是阳光的光源，在地球上得到的阳光可以看作是平行光线，阳光下的投影是平行投影.

35.1 投影

物体在日光或灯光的照射下，会在地面、墙壁等处形成影子（图 35.1-1），影子既与物体的形状有关，也与光线的照射方式有关.

图 35.1-1

一般地，用光线照射物体，在某个平面（地面、墙壁等）上得到的影子叫做物体的**投影**（projection），照射光线叫做投影线，投影所在的平面叫做投影面.[1]

有时光线是一组互相平行的射线，例如探照灯中的光线（图 35.1-2）．太阳离我们非常远，射到地面的太阳光也可以看成一组互相平行的射线．由平行光线形成的投影叫做**平行投影**（parallel projection）[2]．例如，物体在太阳光的照射下形成的影子（简称日影）就是平行投影.[3] 日影的方向可以反映当地时间，我国古代的计时器日晷（图 35.1-3），就是根据日影来观测时间的.

图 35.1-2

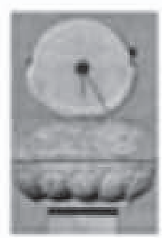


图 35.1-3

日晷是利用日影计时的仪器，通常由铜制的指针和石制的带有刻度的圆盘组成，用针影落在刻度盘的不同位置表示一天中不同的时刻.

1. 本节从物体在日光或灯光照射下在地面或墙壁上形成的影子说起，引出投影、投影线、投影面等概念.

影子是人们司空见惯的，投影的概念是在影子的基础上再一般化、抽象化形成的. 形成一个物体的影子的因素除这个物体外，还需要有照射光线和形成影子的地方，这就是投影线和投影面. 本章中讨论的都是物体在某平面上的投影，因此所说的投影面都指平面. 教学中对这些概念的要求是：让学生能够结合具体例子说明有关概念，即能够说出这些例子中什么是投影，什么是投影线和投影面，不需要给出这些概念严格的、抽象的定义.

本章中投影的概念是为进一步研究视图做准备的.

2. 一般来说，投影线是一束射线，其中各条射线的位置关系可以分为两种情形：（1）平行；（2）相交于同一点. 因投影线的不同位置关系，

由同一点（点光源）发出的光线形成的投影叫做**中心投影**（center projection）．例如，物体在灯泡发出的光照射下形成的影子（图 35.1-4）就是中心投影.[1]

灯

三角尺

投影

图 35.1-4

练习

把下列物体与它们的投影用线连接起来.

思考[2]

图 35.1-5 表示一块三角尺在光线照射下形成投影，其中图（1）与图（2）（3）的投影线有什么区别？图（2）（3）的投影线与投影面的位置关系有什么区别？

（1） （2） （3）

图 35.1-5

66 第三十五章 投影与视图

［1］中心投影的投影（光）线是有公共端点的射线，这个端点就是点光源.

练习答案

上面一行由左至右第 1～4 个物体，分别对应下面一行由左起第 2，4，1，3 的投影. 注意投影光线从物体前方射向投影面.

［2］安排这个“思考”是为下面引出正投影的概念做准备的，主要是观察投影线之间的位置关系以及投影线与投影面的位置关系.

一般地可以将投影分为两类：（1）平行投影；（2）中心投影. 教科书中给出了一些例子（日光下的投影、探照灯光下的投影、灯泡发出的灯光下的投影等），它们是两类投影的典型代表. 教学中可以通过实际例子说明投影的分类.

本章后面讨论视图时主要用到平行投影，这里所说的“平行”是空间直线的平行，与平面几何中的平行线不同，空间中一组平行线不一定全在同一个平面内，但是其中任意两条直线共面.

中心投影与前面讨论过的位似变换相关. 教科书图 35.1-5（1）中，当三角板平行于投影面时，三角板的中心投影就是三角板在位似变换下的图象，它与三角板是相似图形.

3. 正投影是与三视图有关的一种投影. 正投影的特征是每条投影线都垂直于投影面. 这里的投影面是平面，投影线是一组平行线.

教科书通过图 35.1-5 中三个图的对比，以图为例说明正投影的概念. 由于正投影的概念涉及直

[1] 投影线垂直投影面时，投影线与投影面内的任何一条直线都成90°角.

[2] 正投影的“正”字指投影线正对着（垂直于）投影面.

[3] 这里包括直线与平面的三种位置关系：平行、斜交、垂直.

[4] 安排这个探究是为下面引出正投影的性质做准备，主要是观察纸板与投影面具有三种位置关系（平行、斜交、垂直）时，纸板的投影有什么不同.

图35.1-5中，图（1）中的投影线集中于一点，形成中心投影；图（2）（3）中，投影线互相平行，形成平行投影. 图（2）中，投影线斜着照射投影面；图（3）中投影线垂直照射投影面（即投影线正对着投影面）[1]，我们也称这种情形为投影线垂直于投影面. 像图（3）这样，投影线垂直于投影面产生的投影叫做**正投影**.[2]

在实际制图中，经常应用正投影.

探究

如图35.1-6，把一根直的细铁丝（记为线段 AB）放在三个不同位置：[3]

（1）铁丝平行于投影面；

（2）铁丝倾斜于投影面；

（3）铁丝垂直于投影面（铁丝不一定要与投影面有交点）.

三种情形下铁丝的正投影各是什么形状？

图35.1-6

通过观察、测量可知：

（1）当线段 AB 平行于投影面时，它的正投影是线段 A_1B_1，它们的大小关系为 $AB=A_1B_1$；

（2）当线段 AB 倾斜于投影面时，它的正投影是线段 A_2B_2，它们的大小关系为 $AB>A_2B_2$；

（3）当线段 AB 垂直于投影面时，它的正投影是一个点 A_3.

探究[4]

如图35.1-7，把一块正方形硬纸板 P（记为正方形 $ABCD$）放在三个不同位置：

线与平面垂直，而直线与平面垂直的定义为：如果一条直线垂直于一个平面内的所有直线，则称这条直线垂直于这个平面. 这里所说的直线间的垂直，是三维空间的线线垂直，即这条直线与这个平面内所有直线所成的角都是直角，但这条直线与这个平面内所有直线不可能都相交. 由于这些立体几何的知识学生没有系统地学习过，所以教科书采用了直观描述的方式解释直线与平面垂直，即用“投影线正对着投影面”解释“投影线垂直于投影面”. 这里的“正对着”即“正交”，也即“垂直于”的意思. 教学中可以运用实物模型，结合教科书安排的关于图35.1-5“思考”栏目中的问题，让学生通过比较辨别认识正投影的意义.

4. 教科书讨论正投影的规律时，按照物体形状的维数由低到高（即一维、二维、三维）的顺序展开.

首先，教科书以一根直铁丝为例，讨论线段（一维图形）的正投影. 具体过程是观察直铁丝在

(1) 纸板平行于投影面；

(2) 纸板倾斜于投影面；

(3) 纸板垂直于投影面.

三种情形下纸板的正投影各是什么形状？

图 35.1-7

通过观察、测量可知：

(1) 当纸板 P 平行于投影面时，P 的正投影与 P 的形状、大小一样；

(2) 当纸板 P 倾斜于投影面时，P 的正投影与 P 的形状、大小不完全一样；

(3) 当纸板 P 垂直于投影面时，P 的正投影成为一条线段.

归纳

当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影与这个面的形状、大小完全相同.[1]

例 画出如图 35.1-8 摆放的正方体在投影面上的正投影.

(1) 正方体的一个面 $ABCD$ 平行于投影面（图 35.1-8(1)）；

(2) 正方体的一个面 $ABCD$ 倾斜于投影面，底面 $ADEF$ 垂直于投影面，并且其对角线 AE 垂直于投影面（图 35.1-8(2)）.[2]

不妨用一个盒子作为模型，观察它在墙壁上的投影.

68 第三十五章 投影与视图

[1] 这里给出了物体的一个面与它的正投影完全相同的条件——这个面与投影面平行.

[2] 当正方体的上底面垂直于投影面时，下底面也垂直于投影面. 当底面的对角线 AE 垂直于投影面时，侧棱 AB 与 EH 的投影重合，投影都是线段 $A'B'$.

与投影面的三种不同位置下，形成的正投影的形状和大小，发现并归纳如下规律：

(1) 线段平行于投影面时，其正投影与其本身形状、大小完全一样；

(2) 线段倾斜于投影面时，其正投影是小于其本身的一条线段；

(3) 线段垂直于投影面时，其正投影是一个点.

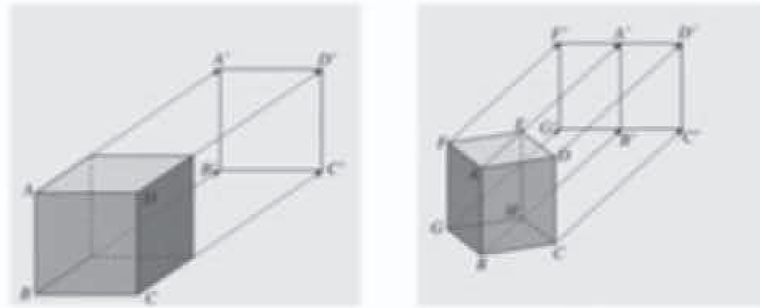
接着，教科书以一块正方形硬纸板为例，讨论平面图形（二维图形）的正投影. 具体过程是观察正方形硬纸板在与投影面的三种不同位置下，形成的正投影的形状和大小，发现并归纳如下规律：

(1) 平面图形平行于投影面时，其正投影与其本身形状、大小完全一样；

(2) 平面图形倾斜于投影面时，其正投影是与其本身的形状和大小都有变化的一个平面图形；

(3) 平面图形垂直于投影面时，其正投影是一条线段.

[1] 可以从例题的解中归纳出这个结论.



(1)　　(2)

图35.1-8

分析：(1) 当正方体在如图35.1-8(1)的位置时，正方体的一个面$ABCD$及与其相对的另一面与投影面平行，这两个面的正投影是与正方体的一个面的形状、大小完全相同的正方形$A'B'C'D'$. 正方形$A'B'C'D'$的四条边分别是正方体其余四个面（这些面垂直于投影面）的投影. 因此，正方体的正投影是一个正方形.

(2) 当正方体在如图35.1-8(2)的位置时，它的面$ABCD$和面$ABGF$倾斜于投影面，它们的投影分别是矩形$A'B'C'D'$和$A'B'G'F'$；正方体其余两个侧面的投影也分别是上述矩形；上、下底面的投影分别是线段$D'F'$和$C'G'$. 因此，正方体的投影是矩形$F'G'C'D'$，其中线段$A'B'$把矩形一分为二.

解：(1) 如图35.1-8(1)，正方体的正投影为正方形$A'B'C'D'$，它与正方体的一个面是全等关系.

(2) 如图35.1-8(2)，正方体的正投影为矩形$F'G'C'D'$，这个矩形的长等于正方体的底面对角线长，矩形的宽等于正方体的棱长. 矩形上、下两边中点连线$A'B'$是正方体的侧棱AB及它所对的另一条侧棱EH的投影.

物体正投影的形状、大小与它相对于投影面的位置有关.[1]

第三十五章　投影与视图

讨论正方形硬纸板的正投影时，其周围的四条边的正投影符合前面所说的线段的正投影的规律. 考虑平面图形的正投影时，关键是确定其边界的正投影，边界的正投影所围成的区域就是平面图形的正投影.

最后，教科书以正方体为例，讨论立体图形（三维图形）的正投影.

5. 在前面归纳了线段和正方形纸板的正投影的规律的基础上，安排了本节的例题. 教科书通过图、文两种表达形式互相补充，说明例题中正方体的两种摆放位置. (1) 中已知正方体有一个面平行于投影面，可推知正方体有四个面垂直于投影面，有两个面平行于投影面，整个正方体的正投影是一个正方形. (2) 中已知正方体有一个面的对角线垂直于投影面，可推知正方体有两个面垂直于投影面，四个面倾斜于投影面，整个正方体的正投影是由两个矩形组成的一个矩形. 这些结论可以利用立体几何知识进行证明，但是教学

练习

如图，投影线的方向如箭头所示，[1]画出圆柱体的正投影.

(1)　　　　(2)

习题 35.1

复习巩固

1. 小华在不同时间于天安门前拍了几幅照片，下面哪幅照片是在下午拍摄的？[2]

天安门是坐北朝南的建筑.

（第1题）

2. 请用线把图中各物体与它们的投影连接起来.

（第2题）

综合运用

3. 如图，右边的正五边形是光线由上到下照射一个正五棱柱（正棱柱的上、下底面都是正多边形，并且侧棱垂直于底面）时的正投影. 你能指出这时正五棱柱的各个面的正投影分别是什么吗？

70　第三十五章　投影与视图

［1］(1) 中投影线正对着圆柱的侧面（由矩形弯曲而成的曲面），即投影线垂直于圆柱的母线；(2) 中投影线垂直于圆柱的底面（圆面）.

［2］图中画出了阳光下人留在地面的影子，由影子可以判断太阳相对于人的方向，从而确定时间.

中不能进行这些证明，而只需通过直观实验加以说明.

教学中需要向学生说明：投影与现实中物体的影子有关，但又不等同于现实中物体的影子，投影中要突出物体的轮廓线等反映物体形状特征的线条，例如，例题 (2) 中正方体的影子应是一个矩形阴影，而投影则是一个带有一条中位线的矩形.

6. 对物体正投影的讨论，首先确定它的形状，其次考虑它的大小. 例 (1) 中，正方体的一个面平行于投影面，正方体的正投影是一个正方形，正方形边长是正方体的棱长. 例 (2) 中，正方体的一个面的一条对角线垂直于投影面，则这个面的另一条对角线平行于投影面，并且相应的对角面也平行于投影面. 这时，正方体的正投影是一个矩形，矩形的一边长等于正方体的棱长，另一边长等于正方体面对角线的长. 教学中，对这些涉及正投影大小的问题，都可以结合前面归纳的关于线段、正方形等的正投影规律加以解释.

[1] 圆锥的轴截面，是过圆锥顶点并且垂直于圆锥底面的截面.

[2] 这个物体放置的方式为：正前方为正六棱柱的底面（正六边形），正六棱柱有两个侧面水平放置.

（第3题）

4. 一个圆锥的轴截面[1]平行于投影面，圆锥的正投影是边长为3的等边三角形，求圆锥的体积和表面积.

拓广探索

5. 画出如图摆放的物体（正六棱柱）[2]的正投影：

（1）投影线由物体前方照射到后方；

（2）投影线由物体左方照射到右方；

（3）投影线由物体上方照射到下方.

（第5题）

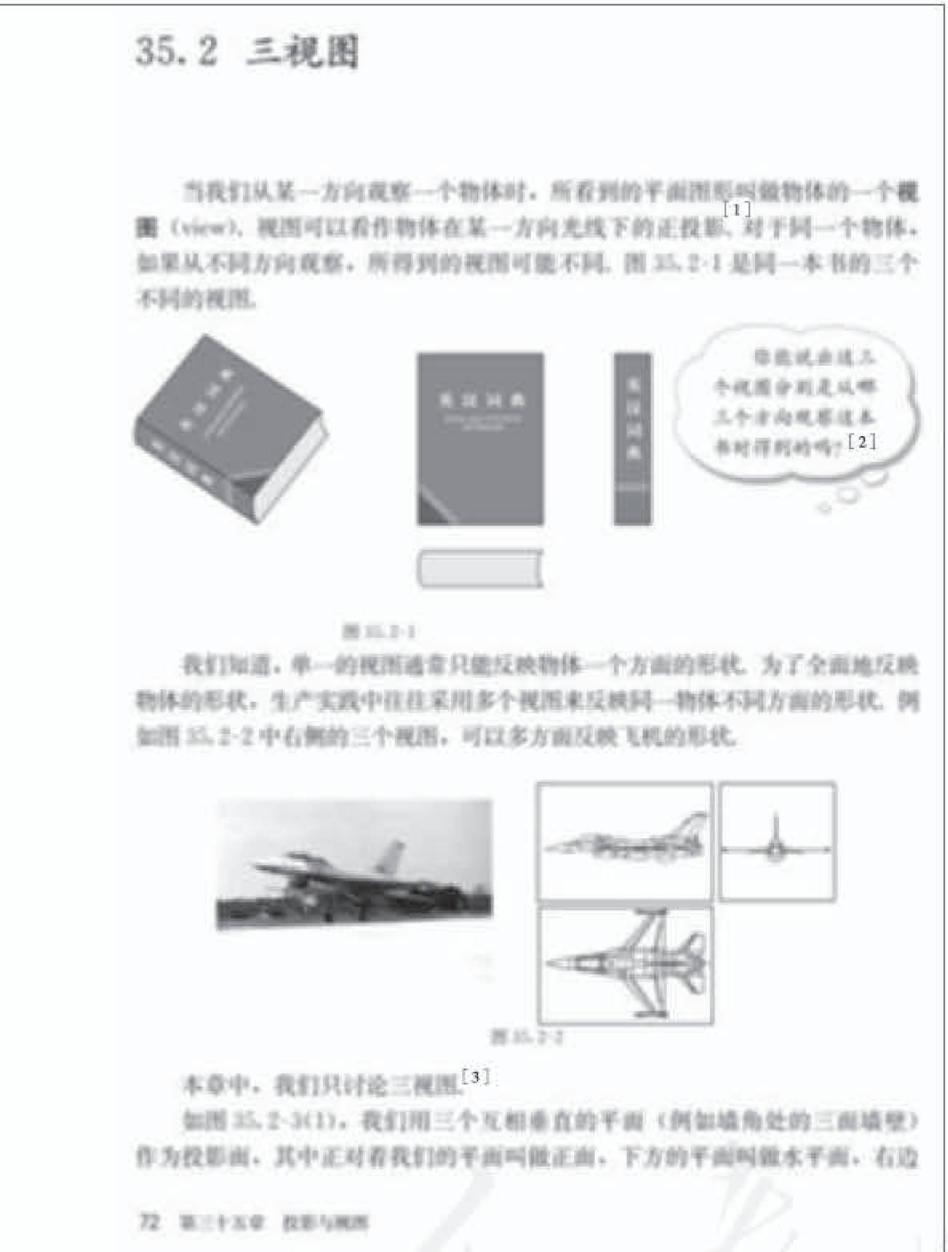
习题 35.1

1. “复习巩固”的题目比较简单，它们是从直观角度让学生体会物体与其投影之间的联系，感受投影的形状及位置与物体的形状及投影线与物体、投影面的相对位置有关.

2. “综合运用”的题目有2道.

第3题中，考虑正五棱柱的正投影时，应分辨出正五棱柱各个面的正投影各是什么. 题中给出了投影线与正五棱柱的位置关系，这隐含了正五棱柱各个面与投影面的位置关系，即上下底面平行于投影面，五个侧面垂直于投影面. 利用本节归纳的正投影规律，就可以知道这个正五棱柱各个面的正投影各是什么. 第4题是将基本几何体的正投影与体积、表面积计算结合起来的问题.

3. “拓广探索”中的问题，是从三个不同方向认识同一物体的正投影，这与“35.2 三视图”有密切关系.



35.2 三视图

当我们从某一方向观察一个物体时，所看到的平面图形叫做物体的一个**视图**（view）．视图可以看作物体在某一方向光线下的正投影．[1] 对于同一个物体，如果从不同方向观察，所得到的视图可能不同．图 35.2-1 是同一本书的三个不同的视图．

你能说出这三个视图分别是从哪三个方向观察这本书时得到的吗？[2]

图 35.2-1

我们知道，单一的视图通常只能反映物体一个方面的形状．为了全面地反映物体的形状，生产实践中往往采用多个视图来反映同一物体不同方面的形状．例如图 35.2-2 中右侧的三个视图，可以多方面反映飞机的形状．

图 35.2-2

本章中，我们只讨论三视图．[3]

如图 35.2-3(1)，我们用三个互相垂直的平面（例如墙角处的三面墙壁）作为投影面，其中正对着我们的平面叫做正面，下方的平面叫做水平面，右边

72 第三十五章 投影与视图

[1] 这里从观察物体得到图象和物体的投影两方面说明视图的概念，两方面是一致的．应注意投影与普通阴影不同，投影中包括反映物体形状的轮廓线及其他线条等，而阴影一般不能突出这些线条．

[2] 它们分别是将书直立时从书的正面（封面）、左面（书脊）和上面观察而得到的视图．

[3] 三视图有特定含义，即主视图、俯视图和左视图的统称，而不是任何三个视图合起来的意思．

1．“35.2 三视图”是本章的核心内容，它从两方面反映平面图形与立体图形的联系．例 3 之前部分介绍三视图的概念、规则，画简单几何体的三视图，这是由立体图形得到平面图形的过程；例 3 以后的部分由三视图想出物体的形状，这是由平面图形得到立体图形的过程．本节反映了平面图形与立体图形之间的联系．从技能上说，应使学生学会画简单立体图形的三视图和由三视图想出简单立体图形．从能力上说，主要是培养空间观念．

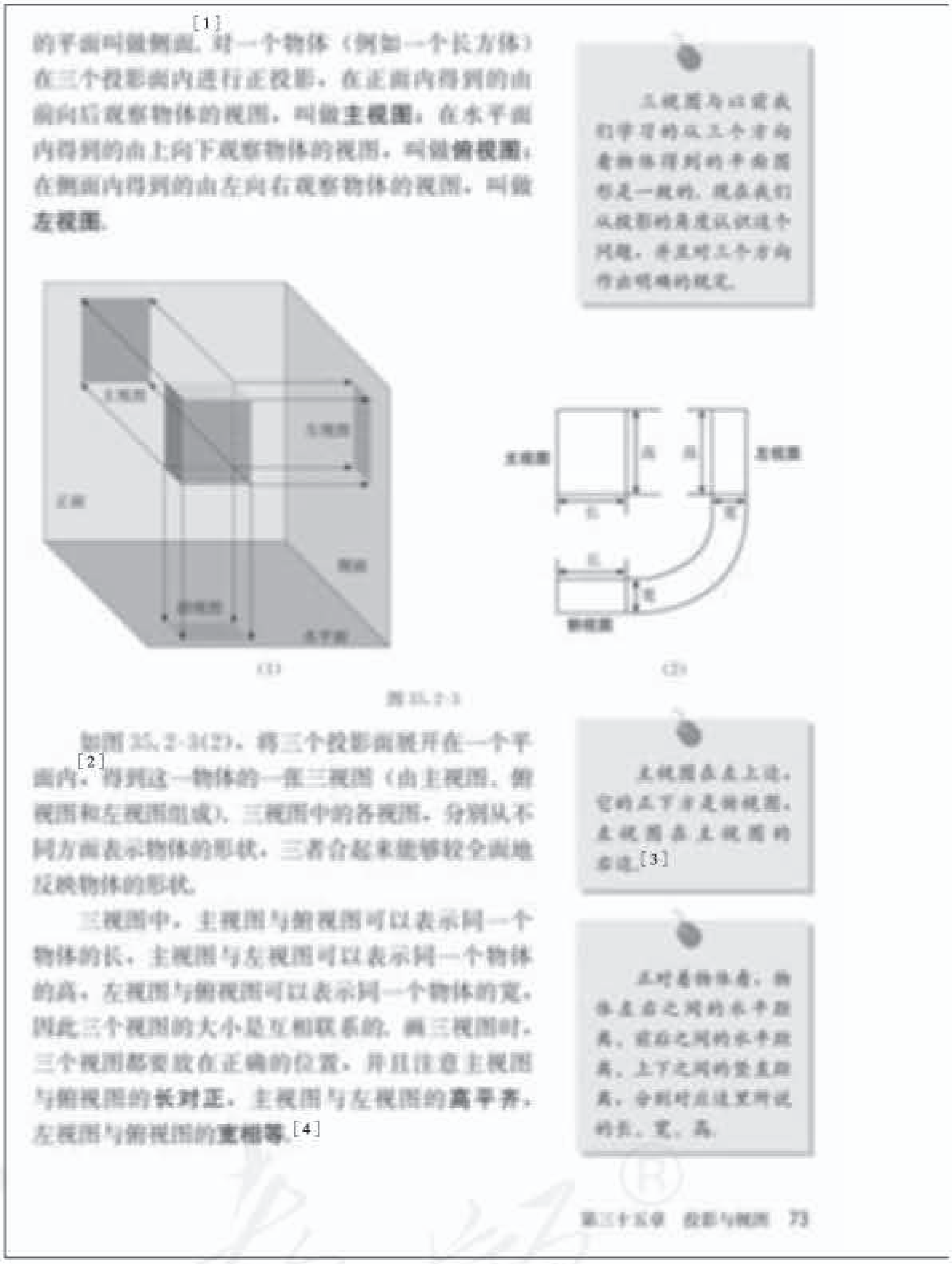
2．三视图是主视图、俯视图和左视图的统称，它是从三个方向分别表示物体形状的一种常用视图．一般地，对于许多物体，通过反映其正面、上面和左面的形状和大小，就可以了解其整体的形状和大小．书是学生非常熟悉的物体，教科书从一本书的视图说起，引出三视图的概念．学生以前已接触过“从不同方向看物体”的内容，只是还没有明确地学习过“视图”这个概

[1] 这三个平面中任何两个平面都互相垂直，即任何两个平面所成的二面角都是直二面角. 其中一个平面（正面）正对着我们铅直放置，第二个平面（水平面）水平放置，第三个平面（侧面）侧对着我们铅直放置.

[2] 展开方式为：正面保持不动，水平面以它与正面的交线为轴向下转动 90°，侧面以它与正面的交线为轴向右转动 90°，这时正面之外的两个投影面转到正面所在平面内.

[3] 结合前面所述投影面的转动方式，可以理解三个视图的相对位置.

[4] 三视图中三个视图之间不但有位置关系，还有大小关系. 大小关系为：主视图与俯视图长对正，主视图与左视图高平齐，左视图与俯视图宽相等. 这里的长、宽、高分别对应三视图所示物体的左右之间、前后之间、上下之间的距离.


的平面叫做侧面.[1] 对一个物体（例如一个长方体）在三个投影面内进行正投影，在正面内得到的由前向后观察物体的视图，叫做**主视图**；在水平面内得到的由上向下观察物体的视图，叫做**俯视图**；在侧面内得到的由左向右观察物体的视图，叫做**左视图**.

三视图与以前我们学习的从三个方向看物体得到的平面图形是一致的，现在我们从投影的角度认识这个问题，并且对三个方向作出明确的规定.

(1)

(2)

图 35.2-3

如图 35.2-3(2)，将三个投影面展开在一个平面内，[2] 得到这一物体的一张三视图（由主视图、俯视图和左视图组成）. 三视图中的各视图，分别从不同方面表示物体的形状，三者合起来能够较全面地反映物体的形状.

主视图在左上边，它的正下方是俯视图，左视图在主视图的右边.[3]

三视图中，主视图与俯视图可以表示同一个物体的长，主视图与左视图可以表示同一个物体的高，左视图与俯视图可以表示同一个物体的宽，因此三个视图的大小是互相联系的. 画三视图时，三个视图都要放在正确的位置，并且注意主视图与俯视图的**长对正**，主视图与左视图的**高平齐**，左视图与俯视图的**宽相等**.[4]

正对着物体看，物体左右之间的水平距离、前后之间的水平距离、上下之间的竖直距离，分别对应这里所说的长、宽、高.

第三十五章 投影与视图 73

念，本节从投影的角度来引出三视图的概念，这与从不同方向看物体所得平面图形实际上是一致的.

三视图是由同一物体在三个不同投影面上的正投影组成的. 对三个投影面的相对位置有特殊要求，即三个平面中任何两个平面都互相垂直. 教学中，可以用墙角为例，说明三个平面的位置关系. 一般地，我们将三个投影面中的一个铅直放置，并使其正对着我们，第二个投影面水平放置，第三个投影面也铅直放置，并分别称它们为正面、水平面和侧面.

将物体放置于上述三个投影面之间，投影线分别正对着（垂直于）三个投影面时，产生的三个正投影分别为主视图、俯视图和左视图. 教学中，应引导学生注意三视图中三个视图的区别与联系，区别：它们的投影方向也即看物体的方向不同；联系：它们是同一物体的投影.

3. 了解三视图是怎样产生的，就能够理解三

从某一角度看物体时，有些部分因被遮挡而看不见．为全面反映立体图形的形状，画图时规定，看得见部分的轮廓线画成实线，因被其他部分遮挡而看不见部分的轮廓线画成虚线．

在实际生活中人们经常遇到各种物体，这些物体的形状虽然各不相同，但它们一般由一些基本几何体（柱体、锥体、球等）组合或切割而成，因此会画、会看基本几何体的视图非常必要．

例1 画出图35.2-4中基本几何体的三视图．[1]

正三棱柱的上、下底面均为正三角形，其余各面都是矩形．

圆柱 (1)　正三棱柱 (2)　球 (3)

图35.2-4

分析： 画这些基本几何体的三视图时，要注意从三个方面观察它们．具体方法为：

(1) 确定主视图的位置，画出主视图；

(2) 在主视图正下方画出俯视图，注意与主视图"长对正"；

(3) 在主视图正右方画出左视图，注意与主视图"高平齐"，与俯视图"宽相等"；

(4) 为表示圆柱、圆锥等的对称轴，规定在视图中加画点划线（————）表示对称轴．

主视图可以反映物体的长和高，俯视图可以反映物体的长和宽，左视图可以反映物体的高和宽．

对称轴　对称轴

解： 如图35.2-5所示．[2]

圆柱 (1)　正三棱柱 (2)

74　第二十五章　投影与视图

[1] 基本几何体可以分为：柱体、锥体、台体和球体．柱体包括圆柱和棱柱，锥体包括圆锥和棱锥，台体包括圆台和棱台，球体包括球、球缺和球台等．

基本几何体又可以分为：多面体和旋转体．多面体包括棱柱、棱锥和棱台等；旋转体包括圆柱、圆锥、圆台和球体等．

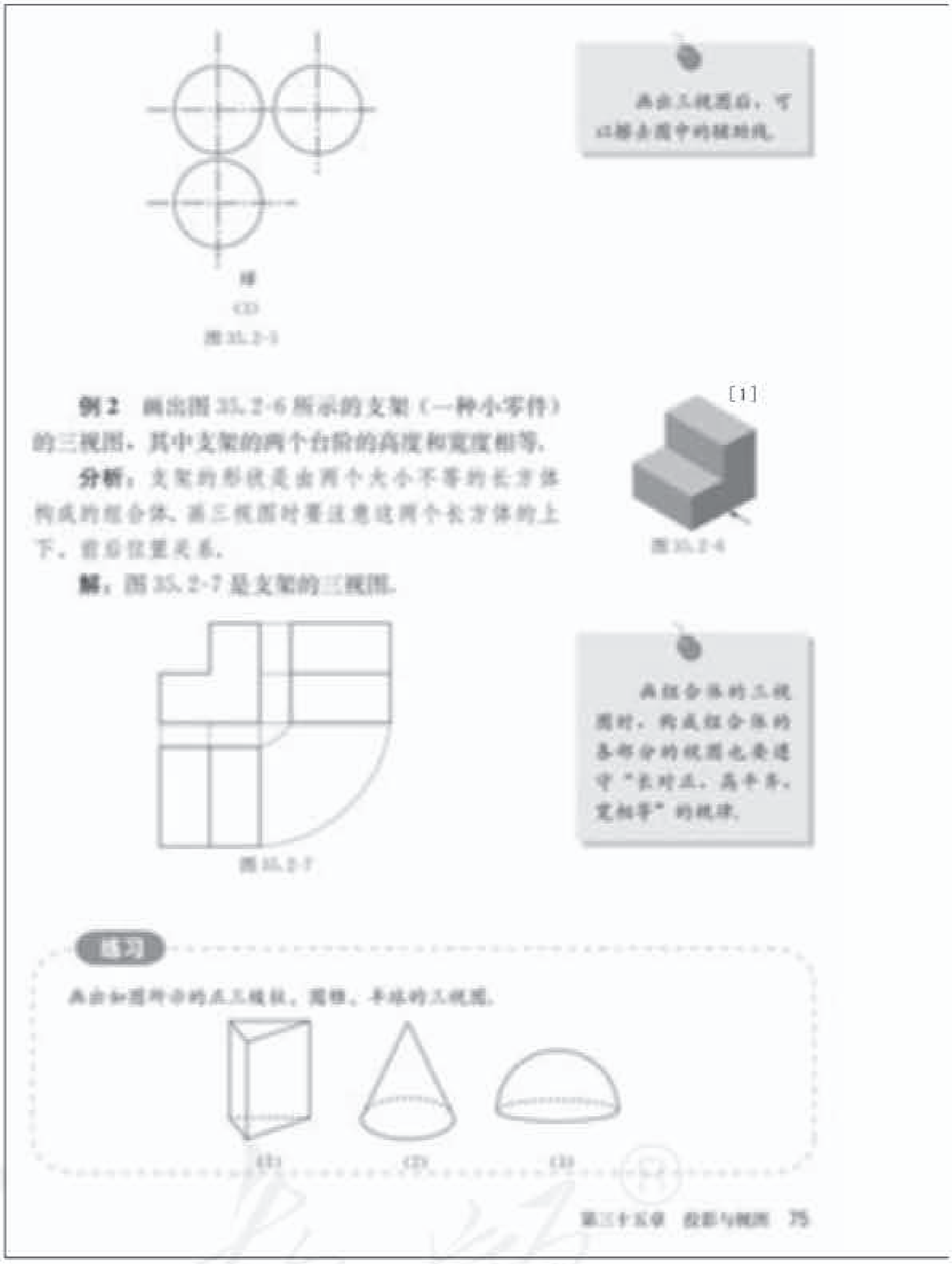
[2] 主视图是由前向后方向观察正三棱柱后画出的，这时只能见到正三棱柱的两条侧棱，见不到第三条侧棱，所以第三条侧棱画为虚线．注意，图中虚线与两条相邻实线的距离相等．

视图中的相对位置关系和大小关系．教学中，可以具体演示三视图的产生过程，结合教具说明三视图中的相对位置关系和大小关系，即主视图、俯视图和左视图的位置为什么这样规定，"长对正，高平齐，宽相等"的具体含义及这样规定的理由．这里的长、宽、高并不局限于长方体，而是分别对应于一般三视图所示物体的左右之间、前后之间、上下之间三个方向的距离．

长方体是形状最简单的基本几何体之一，以它为例解释三视图的概念、位置关系和大小关系简明扼要．初次引入三视图时，所用的长方体应选取最一般的，即长方体的长、宽和高各不相等．

4．认识三视图，离不开画三视图．画图的过程可以加深对三视图的认识，巩固对三视图的相对位置关系和大小关系的理解．教科书对画三视图的安排，首先从画基本几何体的三视图开始，

[1] 图中箭头所指方向是画主视图时观察物体的方向.



画出三视图后，可以擦去图中的辅助线.

球

(3)

图 29.2-5

例 2 画出图 29.2-6 所示的支架（一种小零件）的三视图，其中支架的两个台阶的高度和宽度相等.

分析： 支架的形状是由两个大小不等的长方体构成的组合体，画三视图时要注意这两个长方体的上下、前后位置关系.

解： 图 29.2-7 是支架的三视图.

[1]

图 29.2-6

图 29.2-7

画组合体的三视图时，构成组合体的各部分的视图也要遵守“长对正，高平齐，宽相等”的规律.

练习

画出如图所示的正三棱柱、圆锥、半球的三视图.

(1) (2) (3)

第二十九章 投影与视图 75

练习答案

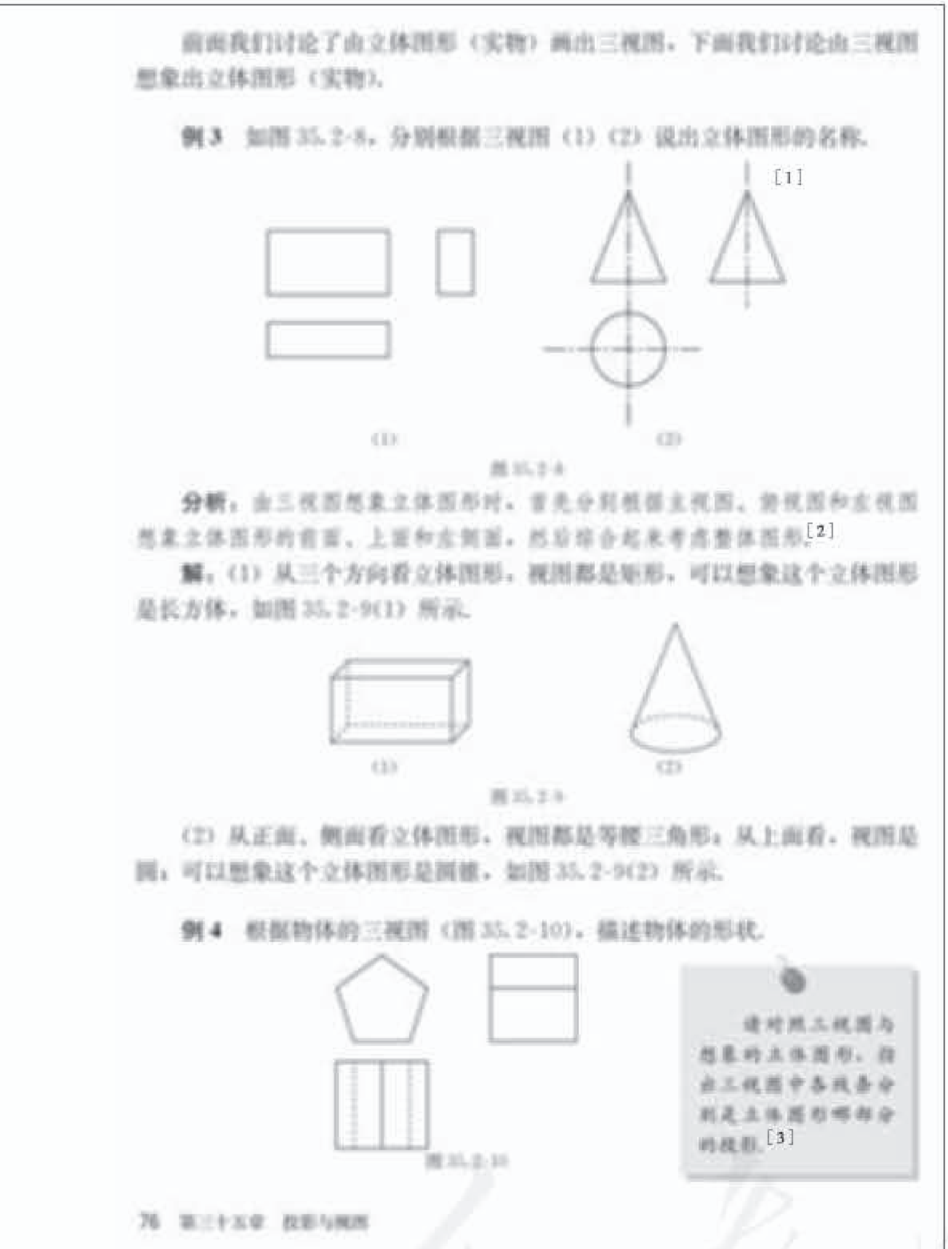
（略）.

然后画简单组合体的三视图.

基本几何体即柱体、锥体、台体、球体等，它们是构成几何体的基本成分，一般物体的形状都是由基本几何体组合或分割而成，因此画基本几何体的视图是画三视图的基础.

从某些方向观察物体时，有些轮廓线可能因被物体其余部分遮挡而看不到. 为了真实准确地反映物体的形状，使视图具有前后层次感，画图时规定：看得见的轮廓线画成实线，因被其他部分遮挡而看不见的轮廓线画成虚线. 这个规定与立体几何中画图的规定类似，教科书以正三棱柱为例说明虚线的用法，教学中可以结合实物模型加以解释.

5. 画三视图是将一个物体从三个方向观察，分别表现这三个方面的“分解”过程；由三视图想出物体的立体形状，则是把物体的三个方面形状“综合”起来的过程. 这两个过程是相反的，也是互相联系的. 教科书中例 1、例 2 是画三视图的内容，例 3～例 5 是由三视图想出物体立体形状的内容.



前面我们讨论了由立体图形（实物）画出三视图，下面我们讨论由三视图想象出立体图形（实物）.

例3 如图35.2-8，分别根据三视图（1）（2）说出立体图形的名称.

[1]

(1) (2)

图35.2-8

分析：由三视图想象立体图形时，首先分别根据主视图、俯视图和左视图想象立体图形的前面、上面和左侧面，然后综合起来考虑整体图形.[2]

解：(1) 从三个方向看立体图形，视图都是矩形，可以想象这个立体图形是长方体，如图35.2-9(1)所示.

(1) (2)

图35.2-9

(2) 从正面、侧面看立体图形，视图都是等腰三角形；从上面看，视图是圆，可以想象这个立体图形是圆锥，如图35.2-9(2)所示.

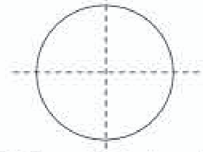
例4 根据物体的三视图（图35.2-10），描述物体的形状.

请对照三视图与想象的立体图形，指出三视图中各线条分别是立体图形哪部分的视图.[3]

图35.2-10

76 第三十五章 投影与视图

[1] 画圆锥的三视图时，在俯视图中不单独用一个点表示圆锥的顶点的正投影. 在机械制图中，通常用点划线表示对称轴，圆心是圆的横、纵对称轴的交点(如下图).



[2] 三视图中三个视图分别表示了物体的正（前）面、上面和左面，由它们想物体的形状时，除想出物体各个侧面的形状外，还应注意它们之间的联系.

[3] 将三个视图联系起来，可以发现，俯视图中间的实线对应主视图的最高点和左视图最高处的横线，俯视图中的两条虚线对应主视图下面左右两端和左视图最下面的横线，左视图中间的实线对应主视图的最左面的顶点和俯视图最左边的竖线.

例3是由基本几何体的三视图想立体形状的问题. 本题教学应把重点放在使学生体会如何由三视图想立体形状，感受“综合”思考的过程.

例4也是由基本几何体的三视图想立体形状的问题，但它涉及虚线，所以难度大于例4. 本例教学中，应特别注意强调三个视图中相关各线条之间的对应关系，通过它们能形成一个整体性认识. 在得出五棱柱的结论后，应回过头来再次指出五棱柱的各条棱的正投影反映在各视图中是什么. 这样双向的思考，可以逐步建立和强化对“由图想物”的思考方法.

例5把由三视图想立体形状、由立体图形想展开图以及计算面积等结合在一起，具有一定综合性. 其中由三视图想立体形状是分析和解决问题的基础，也是与本节内容关系最密切的内容. 本例的教学中，应首先把重点放在由三视图想立体图形的形状上，同时也要注意使学生学会看视图中的标注尺寸，能把所标数据对应到立体图形之中.

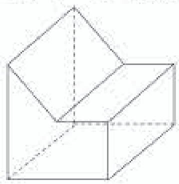
练习答案

(1) 圆柱；

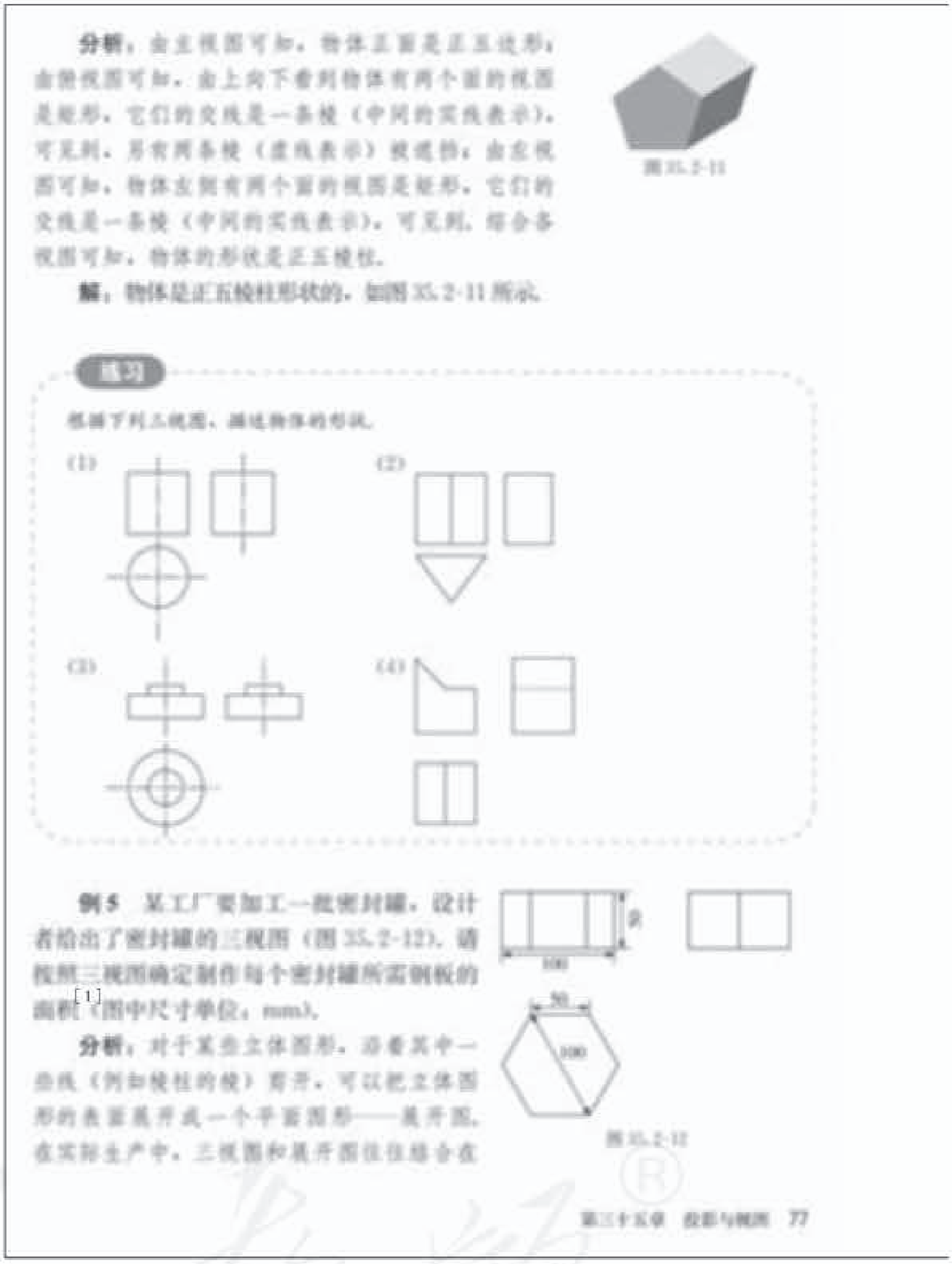
(2) 三棱柱；

(3) 两个圆柱构成的组合体，上面的圆柱位于下面圆柱的中央；

(4) 组合体（如图）.



［1］考虑本题时需将三视图与展开图联系起来.



分析： 由主视图可知，物体正面是正五边形；由俯视图可知，由上向下看到物体有两个面的视图是矩形，它们的交线是一条棱（中间的实线表示），可见到，另有两条棱（虚线表示）被遮挡；由左视图可知，物体左侧有两个面的视图是矩形，它们的交线是一条棱（中间的实线表示），可见到. 综合各视图可知，物体的形状是正五棱柱.

解： 物体是正五棱柱形状的，如图 35.2-11 所示.

图 35.2-11

练习

根据下列三视图，描述物体的形状.

(1)　(2)　(3)　(4)

例 5 某工厂要加工一批密封罐，设计者给出了密封罐的三视图（图 35.2-12），请按照三视图确定制作每个密封罐所需钢板的面积[1]（图中尺寸单位：mm）.

分析： 对于某些立体图形，沿着其中一些线（例如棱柱的棱）剪开，可以把立体图形的表面展开成一个平面图形——展开图. 在实际生产中，三视图和展开图往往结合在

图 35.2-12

第三十五章　投影与视图　77

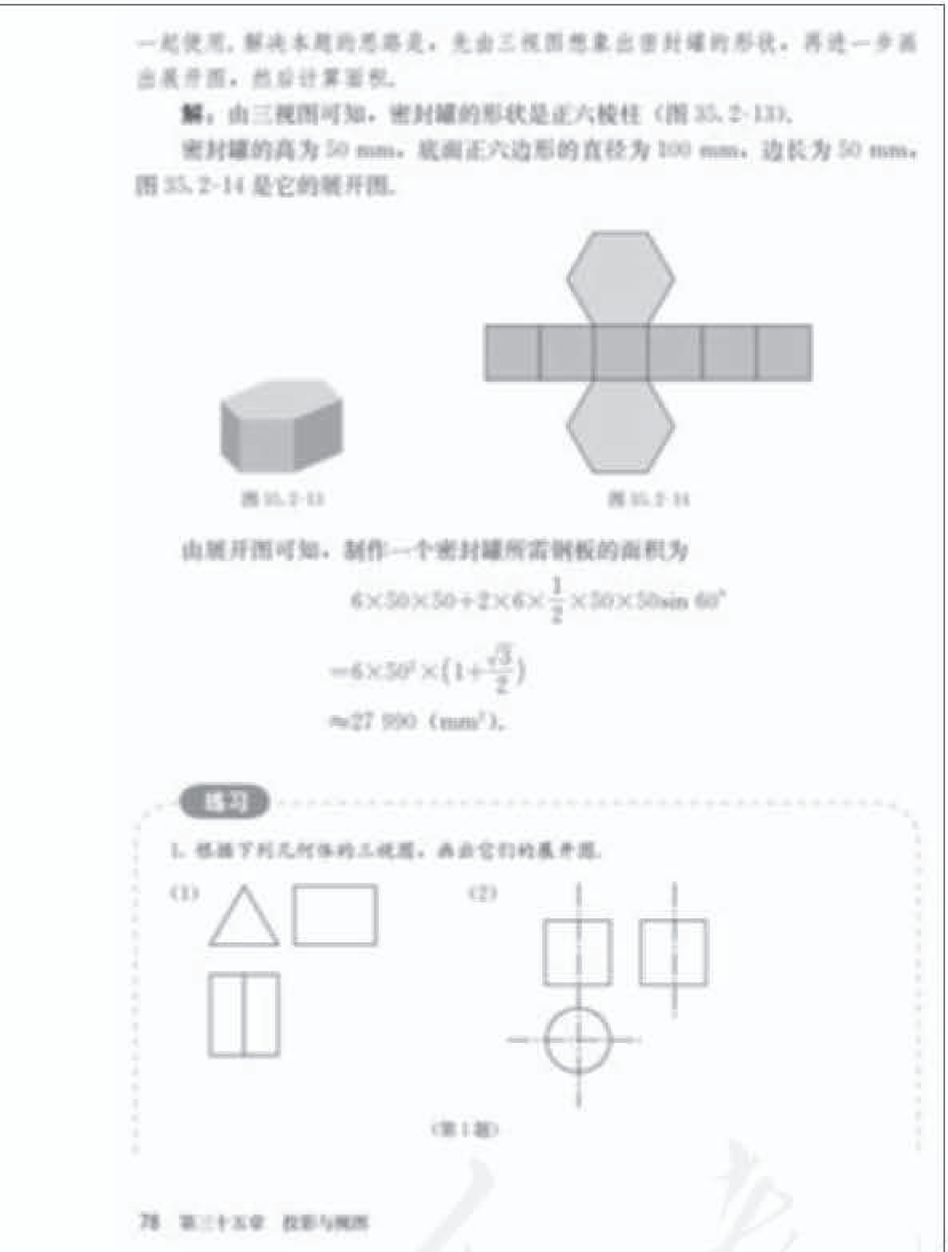
总之，例 3～例 5 的设计是围绕“由图想物”培养空间观念这一主题逐步提高难度的.

6. 本节有三组练习题，它们分别属于“画三视图”“由三视图想立体形状”和“由三视图想立体形状并画展开图”三类问题.

本节内容的教学要注重让学生动手操作. 如果教科书中练习的题量较少，教学中根据实际需要可以再适当补充增加一定量的练习题，使学生能够通过这些练习更好地掌握画简单物体的三视图和由三视图想物体形状的方法.

7. 本节中的几何体以基本几何体为基础，复杂些的几何体是由基本几何体简单组合或分割而成. 这样选择内容的出发点是强调基础和控制难度. 教学中要控制好问题的难度，以基本几何体为基础安排教学内容.

8. 教学中要注意从不同角度培养空间观念. “由物画图”可以看成是把一个整体分几个方面加以认识和表示的过程，“由图想物”则是从一



一起使用．解决本题的思路是，先由三视图想象出密封罐的形状，再进一步画出展开图，然后计算面积．

解：由三视图可知，密封罐的形状是正六棱柱（图35.2-13）．

密封罐的高为50 mm，底面正六边形的直径为100 mm，边长为50 mm，图35.2-14是它的展开图．

图35.2-13　　图35.2-14

由展开图可知，制作一个密封罐所需钢板的面积为

$$6\times50\times50+2\times6\times\frac{1}{2}\times50\times50\sin 60^\circ$$
$$=6\times50^2\times\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\approx27\ 990\ (\text{mm}^2).$$

练习

1. 根据下列几何体的三视图，画出它们的展开图．

(1)　　(2)

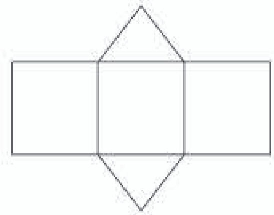
（第1题）

78 第三十五章 投影与视图

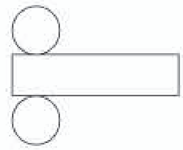
练习答案

1. 从左至右分别是：

（1）三棱柱的展开图



（2）圆柱的展开图



个事物的几个方面综合认识整体事物的过程．这反映了认识事物的规律，即有时需要分解，有时需要综合，有时需要两者结合．

本节以“由物画图”作为“由图想物”的基础，画图更容易认识视图与物体形状的联系，有助于在头脑中把视图立体化，即由视图想出物体的形状．

视图是物体的投影，投影规律是联系视图与物体的纽带．“由物画图”和“由图想物”时，都需要根据投影规律进行思考，这两类问题实际上是从不同方向运用投影规律．35.1 节中介绍了投影规律，35.2 节又从投影的角度介绍了三视图，这样就建立了三视图与投影规律之间的联系．根据画三视图与由三视图想物体形状的关系，容易认识到由三视图想物体形状时同样要运用投影规律．这样就通过投影规律把全章知识连接起来了．

练习答案

2. $96\ 000\pi\ cm^2$.

2. 某工厂加工一批无底帐篷，设计者给出了帐篷的三视图，请你按照三视图确定每顶帐篷的表面积（图中尺寸单位：cm）.

（第 2 题）

习题 35.2

复习巩固

1. 把图中的几何体与它们对应的三视图用线连接起来.

（第 1 题）

2. 画出图中几何体的三视图.

长方体　圆柱　正五棱柱

（第 2 题）

第三十五章　投影与视图　79

习题 35.2

1. “复习巩固”的题目有三类：

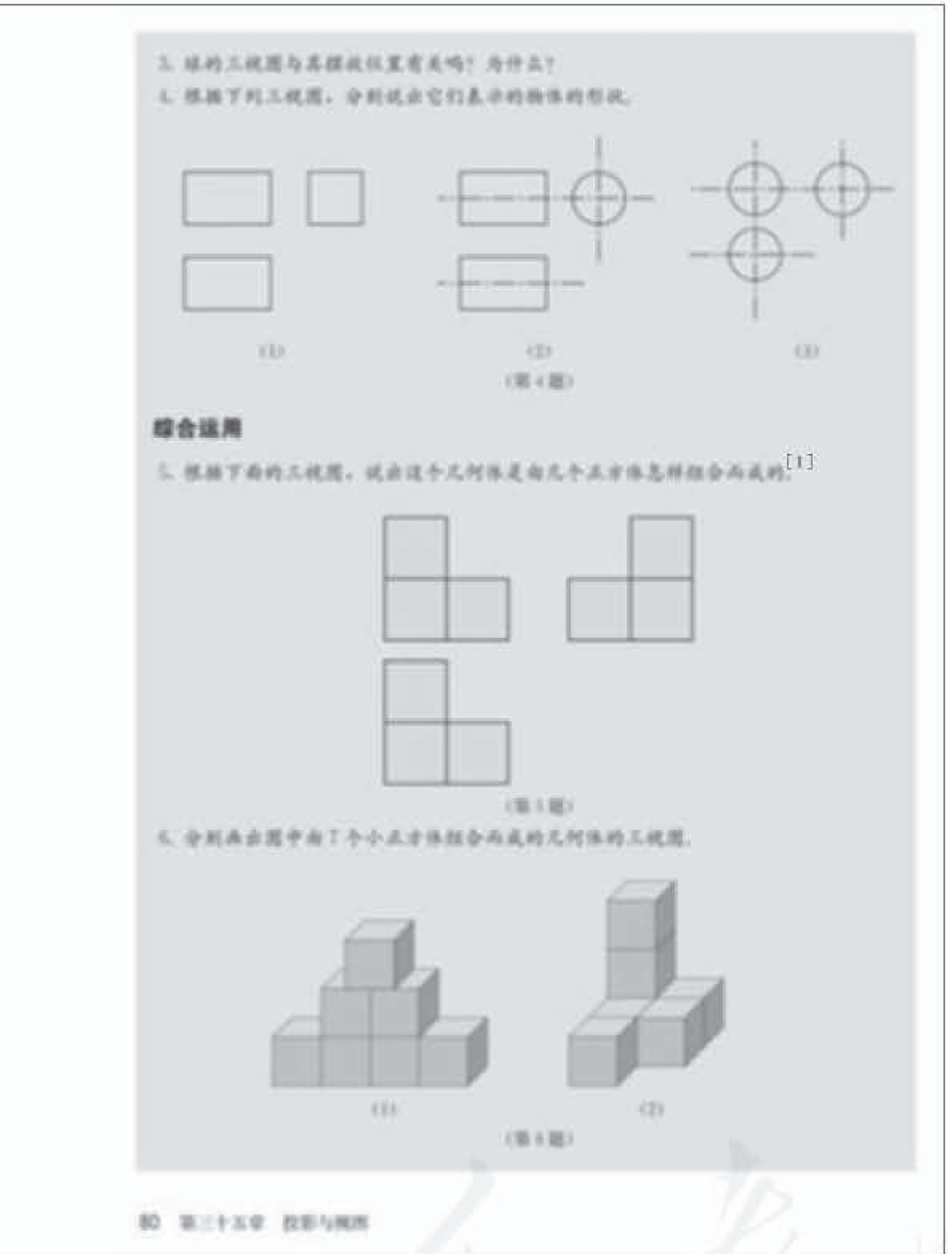
第 1 题是直接为巩固对三视图的一般性认识而设计的，它不需要画图，也不需要想立体形状，只需要找对应联系，而找联系的过程可以加深对三视图一般规律的认识.

第 2，3 题是画基本几何体三视图的问题. 有些基本几何体（例如旋转体）的三视图中某些视图彼此相同. 球是一种很特殊的基本几何体，不论将它如何摆放，它的视图都是圆.

第 4 题是由基本几何体的三视图想立体形状.

2. “综合运用”的题目有两类：

第 5，8 题属于“由图想物”类型. 第 5 题中给出几何体由“四个正方体组合而成”，这可以降低问题的难度. 第 8 题中物体形状是由半个圆柱和一个长方体组合而成，但是两者之间连为


3. 球的三视图与其摆放位置有关吗？为什么？

4. 根据下列三视图，分别说出它们表示的物体的形状.

(1) (2) (3)

(第4题)

综合运用

5. 根据下面的三视图，试说这个几何体是由几个正方体怎样组合而成的.[1]

(第5题)

6. 分别画出图中由7个小正方体组合而成的几何体的三视图.

(1) (2)

(第6题)

80 第二十五章 投影与视图

[1] 这里的三视图对应的是4个正方体，它们分两层摆放.

一体，没有相接的痕迹.

第6，7题属于“由物画图”的类型. 第6题中的立体图形由一些小正方体组成，其中图(1)对应的俯视图中应包括虚线（被遮挡的分界线）. 第7题中的立体图形都是由基本几何体组合而成的组合体，画它们的视图时要注意一个图形的不同部分的相交之处. 一般来说，如果一个物体的两部分是平滑连接（相切）的，则在视图中不画分界线，例如，第8题中物体上、下两部分（半圆柱和长方体）之间未画分界线.

如果一个物体的两部分有明显的相交痕迹，则在视图中应画出分界线. 例如，第7题中左边物体上、下两部分（圆锥和圆柱）之间有明显的分界线（一个圆），则在视图中应画出上、下部分的分界线.

[1] 三视图对应的几何体是圆锥，圆锥的表面积是圆锥的侧面展开图的面积与底面的面积的和.

7. 画出图中几何体的三视图.

（第 7 题）

8. 根据三视图，描述这个物体的形状.

（第 8 题）

拓广探索

9. 由 5 个相同的小正方体搭成的物体的俯视图如图所示，这个物体有几种搭法?

（第 9 题）　　（第 10 题）

10. 如图是一个几何体的三视图（图中尺寸单位：cm），根据图中所示数据计算这个几何体的表面积.[1]

第二十九章　投影与视图　81

3. “拓广探索”的题目有 2 道. 对应第 9 题中的俯视图，有多种不同的搭小正方体的方法，通过思考与试验可以找出这些搭法. 本题也能说明对于某些立体图形仅通过一两个视图无法确定它的形状. 第 10 题是将三视图与展开图联系在一起的问题.

阅读与思考

视图的产生与应用

人们很早以前就认识到图形语言的特殊作用。例如，三千多年前，古代埃及的建筑师们要清楚而详尽地表达他们设计的金字塔等建筑物，只用文字表述不行，必须画图说明。在人们探索如何确切表示物体的立体形状的过程中，产生并发展了视图。

画视图要考虑视线与物体的位置关系。不同的位置关系产生不同的视觉效果，也就是说，研究视图不能不研究投影。公元前1世纪，古罗马建筑师维特鲁威斯写成了《建筑学》这部著作，其中包括水平投影、正面投影、中心投影和透视作图法的一些早期结果。文艺复兴时期，透视理论有了较大的发展。这一时期许多艺术作品应用了透视原理，而透视原理与中心投影有密切的关系。[3]

画法几何[4]是几何学的一个分支，视图是它研究的主要内容，投影理论是它的基础。法国几何学家加斯帕尔·蒙日（Gaspard Monge）对画法几何的发展有重要贡献。1764年，蒙日用自制的测量工具画出家乡城镇的大比例平面图；1765年，他用画法几何原理绘制了防御工程设计图。但由于军事保密的需要，他的研究成果30年以后才得以公开。1798～1799年，蒙日的《画法几何》出版，它第一次系统阐述了在平面内绘制空间物体的一般方法。由于画法几何在工程中有着广泛的应用，因此画法几何又被称为"工程师的语言"。

蒙日的《画法几何》中使用的视图是二视图。二视图由主视图和俯视图组成。后来根据实际需要，由二视图发展为今天在工程中广泛使用的三视图。

你能举出这样的例子，两个物体的形状不同，但是它们的二视图相同？由这样的例子，你能体会到为什么三视图比二视图有更广泛的应用吗？

金字塔（埃及）[1]

意大利画家拉斐尔利用透视原理[2]创作的名画《雅典学院》，画面上不同时代的希腊学者济济一堂，数学家毕达哥拉斯和欧几里得也在其中。

加斯帕尔·蒙日（1746—1818）

82 第三十五章 投影与视图

[1] 埃及胡夫金字塔的外形为四棱锥形状.

[2] 透视原理以中心投影为基础，按照透视原理画出的画面符合“近大远小”的视觉规律，具有立体感.

[3] 按照透视原理绘制的画面有一个透视中心，它相当于投影中心，也就是位似中心. 画面中各部分根据它们与透视中心的相对位置，依照透视原理安排在画面上的相应位置.

[4] 画法几何研究在平面上如何用图形表示立体图形和解决立体几何问题. 画法几何是机械制图中的投影理论基础，它应用投影的方法研究多面正投影图、轴测图、透视图和标高投影图的绘制原理，其中多面正投影图是主要研究内容.

1798～1799年，法国数学家蒙日发表了《画法几何》一书，提出用多面正投影图表达空间形体. 这为画法几何奠定了理论基础. 以后各国学者又在投影变换、轴测图以及其他方面不断提出新的理论和方法，使画法几何这门学科日趋完善.

阅读与思考

这是一篇作为选学材料的短文，文章从古代埃及的建筑设计说起，从实际需要和图形语言所具特殊作用的角度给出了视图产生的背景. 接着，文章结合画视图与投影的联系，简略介绍了透视理论的产生与发展；画法几何的主要研究内容、理论基础以及产生过程. 最后，文章介绍了经常使用的视图由二视图发展到三视图的历史变革.

这篇短文可以帮助学生简要了解视图是在实际需要的推动下应运而生并不断发展的，视图的绘制有其理论基础. 三视图是一种具有广泛应用价值的视图.

[1] 本节的主要活动方式：通过动手实践，由图形得出立体模型.

[2] 用硬纸板作立体图形的各面，围成立体模型.

[3] 用马铃薯（土豆）或萝卜刻制出立体模型.

[4] 这个三视图表示直五棱柱，它的底面五边形中有三个直角.

35.3 课题学习　制作立体模型

观察三视图，并综合考虑各视图表达的含义以及视图间的联系，可以想象出三视图所表示的立体图形的形状，这是由视图转化为立体图形的过程. 下面我们动手实践，[1]体会一下这个过程.

一、课题学习目的

通过由三视图制作立体模型的实践活动，体验平面图形向立体图形转化的过程，体会用三视图表示立体图形的作用，进一步感受立体图形与平面图形之间的联系.

二、工具准备

刻度尺、剪刀、小刀、胶水、硬纸板、马铃薯（或萝卜）等.

三、具体活动

1. 以硬纸板为主要材料，分别做出下面的两组三视图（图 35.3-1）表示的立体模型.[2]

(1)　　(2)

图 35.3-1

2. 按照下面给出的两组三视图（图 35.3-2），用马铃薯（或萝卜）做出相应的实物模型.[3]

[4]

(1)　　(2)

图 35.3-2

第三十五章　投影与视图　83

1. “课题学习　制作立体模型”是结合实际问题，动脑与动手并重的学习内容. “观察、想象、制作、交流”相结合是本节的主要实践活动. 设计这个课题学习的目的是：(1) 在具体问题情境中，对是否切实理解掌握前面学习的三视图内容以及能否灵活运用这些知识进行检验；(2) 采用独立完成与合作式学习相结合的方式，同学间可以互相讨论、互帮互学，通过这个课题学习，共同提高.

2. 立体图形与平面图形的联系与转化，是本章讨论的中心问题. 实现这种转化的关键是掌握图形间的联系，即不仅需要认识从立体图形到平面图形的转化过程，还需要认识从平面图形到立体图形的转化过程. 前两节安排了“由物画图”和“由图想物”两类问题，本节又安排了“由图制物”的问题，即将所想的变为现实的，这可以进一步检验和校正想象的结果. 平面图形包括三视图和展开图，由它们都可以制作立体模型.

3. 下面每一组平面图形（图 35.3-3）都由四个等边三角形组成.

(1)　　(2)　　(3)

图 35.3-3

(1) 其中哪些可以折叠成三棱锥?[1] 把上面的图形描在纸上，剪下来，叠一叠，验证你的结论.

(2) 画出由上面图形能折叠成的三棱锥的三视图，并指出三视图中是怎样体现“长对正，高平齐，宽相等”的.

(3) 如果上图中小三角形的边长为 1，那么对应的三棱锥的表面积是多少?[2]

4. 下面的图形（图 35.3-4）由一个扇形和一个圆组成.

图 35.3-4

(1) 把上面的图形描在纸上，剪下来，围成一个圆锥.

(2) 画出由上面图形围成的圆锥的三视图.

(3) 如果上图中扇形的半径为 13，圆的半径为 5，那么对应的圆锥的体积是多少?[3]

四、课题拓广

三视图、展开图都是与立体图形有关的平面图形. 了解有关生产实际，结合具体例子，写一篇短文介绍三视图、展开图的应用.

84　第二十五章　投影与视图

[1] (1) (3) 可以折叠成三棱锥.

[2] 三棱锥的每个面都是边长为 1 的正三角形，三角形面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，故三棱锥的表面积为 $\sqrt{3}$.

[3] 对应的圆锥的体积是 100π.

3. 本节包括四个问题. 解决第一个问题时，需要先由三视图想出立体图形（简单几何体），再画出展开图并折合展开图为立体图形（或先分别画出立体图形的各个侧面，再将它们粘合起来）；解决第二个问题时，需要先由三视图想出立体图形（其中第二个图形略复杂些），但不需再画出展开图，而是将想出的立体图形直接制作出来；解决第三个问题时，需要先由展开图想出立体图形，并通过制作模型检验所想正确与否，最后画三视图并计算体积和表面积；解决第四个问题时，需要先由展开图制作模型，然后画三视图，最后计算体积.

4. 三视图和展开图是以不同方式表示立体图形的图形，它们在生产实际中有直接应用. 了解这方面的例子，既可以丰富实践知识，又能进一步认识三视图和展开图. 课题学习中安排了“课题拓广”，要求学生进行有关调查并写出一篇短文，这可以作为本章的学习小结.

[1] 通过同学间相互讨论，不仅可以检验画图，也可以检验看图后的想象.

[2] 这个活动涉及认识三视图、展开图和立体模型，包括了构思、画图设计、动手制作等多个环节.

数学活动

活动1 观察物体，画出三视图

选择你熟悉的一些形状简单的物体，从不同方向观察它们，画出它们的三视图，然后请同学根据画出的视图说出物体的形状，看他们能否说对. 如果说得不对，请你考虑改进你画的图，或者与同学交流.

活动2 设计几何体，制作模型

(1) 每个同学设计一个几何体，画出它的三视图.

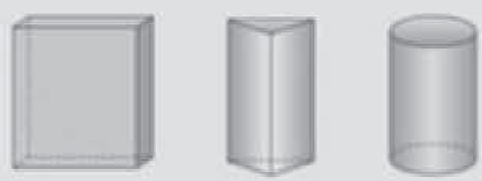
(2) 同学之间交换三视图图纸，各自按照手中的三视图制作几何体模型.

(3) 进行交流，看一看：作出的模型与设计者的想法一致吗？[1]

(4) 如果不一致，请讨论，寻找原因.

活动3 设计并制作笔筒[2]

设计你所喜欢的笔筒，画出它的三视图和展开图，制作笔筒模型. 体会设计制作过程中三视图、展开图、实物（即立体模型）之间的关系.



1. “活动 1”通过“我画图，你看图说立体形状”的形式，在同学间展开讨论，达到检验画图以及看图想立体图形的效果.

2. “活动 2”通过“我画图，你制作”的交流形式，检验与促进对基本几何体的三视图的理解和掌握.

3. “活动 3”通过“自主构思、画图设计、动手制作”的方式，强化对三视图、展开图和立体图形之间联系与转化的认识.

小　结

一、本章知识结构图[1]

二、回顾与思考

本章我们从生活实例出发，学习了中心投影和平行投影，研究了正投影的性质，在此基础上，进一步认识了三视图，学习了简单几何体三视图的画法。

“由物画图”和“由图想物”反映了“三视图”与“立体图形（实物）”之间相互联系和转化的关系，投影原理是其实现转化的依据[2]。通过本章学习，我们在认识中心投影、平行投影等知识的基础上，学习了一些基本几何体的三视图，并通过实例，想象立体图形与三视图的互相转化，增强了空间观念。

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧。

1. 什么是中心投影、平行投影？什么是正投影？
2. 当平面图形分别平行、倾斜和垂直于投影面时，它的正投影有什么性质？
3. 什么是三视图？它是怎样得到的？画三视图要注意什么？
4. 举例说明立体图形与其三视图、展开图之间的关系。

第三十五章　投影与视图

［1］本章知识结构图中重点部分是“三视图”，结构图中反映了两个方向的转化，即（1）物体——投影——三视图；（2）三视图——物体（立体图形）.

［2］不论“由物画图”，还是“由图想物”，都要根据投影规律进行思考，投影规律就是两者之间的联系，两类问题实际上是从相反方向认识同一规律.

1. 教学中可以引导学生结合具体例子，对立体图形和平面图形之间的相互转化进行概括. 这样能够加深对本章知识结构图的理解，取得较好的复习效果.

2. 三视图是本章的重点，物体（立体图形）与三视图之间可以从两个不同方向实现转化. 认识这些转化的主要根据是投影原理以及三视图的位置关系和度量关系，这也是本章的基础知识.

3. 画三视图和由视图想立体图形形状是本章的两类主要问题，它们之间相互联系，前者是后者的基础. 这两类问题对于空间观念的培养都有重要作用，也是衔接平面几何问题与立体几何问题的素材.

[1] 这里的三视图对应的是由 6 个正方体组成的几何体.

复习题 35

复习巩固

1. 找出图中三视图对应的物体.

(1)　(2)　(3)　(4)

(第 1 题)

2. 分别画出图中两个几何体的三视图.

(第 2 题)

3. 根据三视图，描述这个物体的形状.[1]

(第 3 题)

第三十五章　投影与视图　87

复习题 35

1. “复习巩固”的题目有两类：(1) 看简单组合体的三视图；(2) 画基本几何体的三视图.

这些题目虽然简单，但是基础性强，学生应熟练地完成它们.

第 1 题中的三视图对应的几何体的上部是圆柱形状，下部是长方体形状，即由一个圆柱和一个长方体组成.

第 2 题是画基本几何体的视图，分别是画三棱柱和圆锥的三视图，要求学生熟练掌握.

第 3 题中的三视图对应的几何体是由 6 个正方体组成的组合体，它们分三层按照 1 个、2 个和 3 个由上到下摆放.

2. “综合运用”的题目有 4 道.

第 4，5 题分别是画、看三视图的问题，第 6，7 题分别是根据展开图和三视图进行计算的问题，计算之前需要想出立体图形的形状.

综合运用

4. 画出图中几何体（上半部为正三棱柱，下半部为圆柱）的三视图.

（第 4 题）　　（第 5 题）

5. 根据三视图，描述这个物体的形状.

6. 根据展开图，画出这个物体的三视图，并求这个物体的体积和表面积.

（第 6 题）

7. 根据三视图，求几何体的表面积，并画出这个几何体的展开图.[1]

（第 7 题）

110 第二十九章 投影与视图

[1] 这个几何体是一个组合体，由一个圆柱和一个圆锥组成.

第 4 题中的几何体由正三棱柱和圆柱组合而成，要求学生能熟练画出这个几何体的三视图.

第 5 题中的三视图对应的几何体是一个正六棱柱.

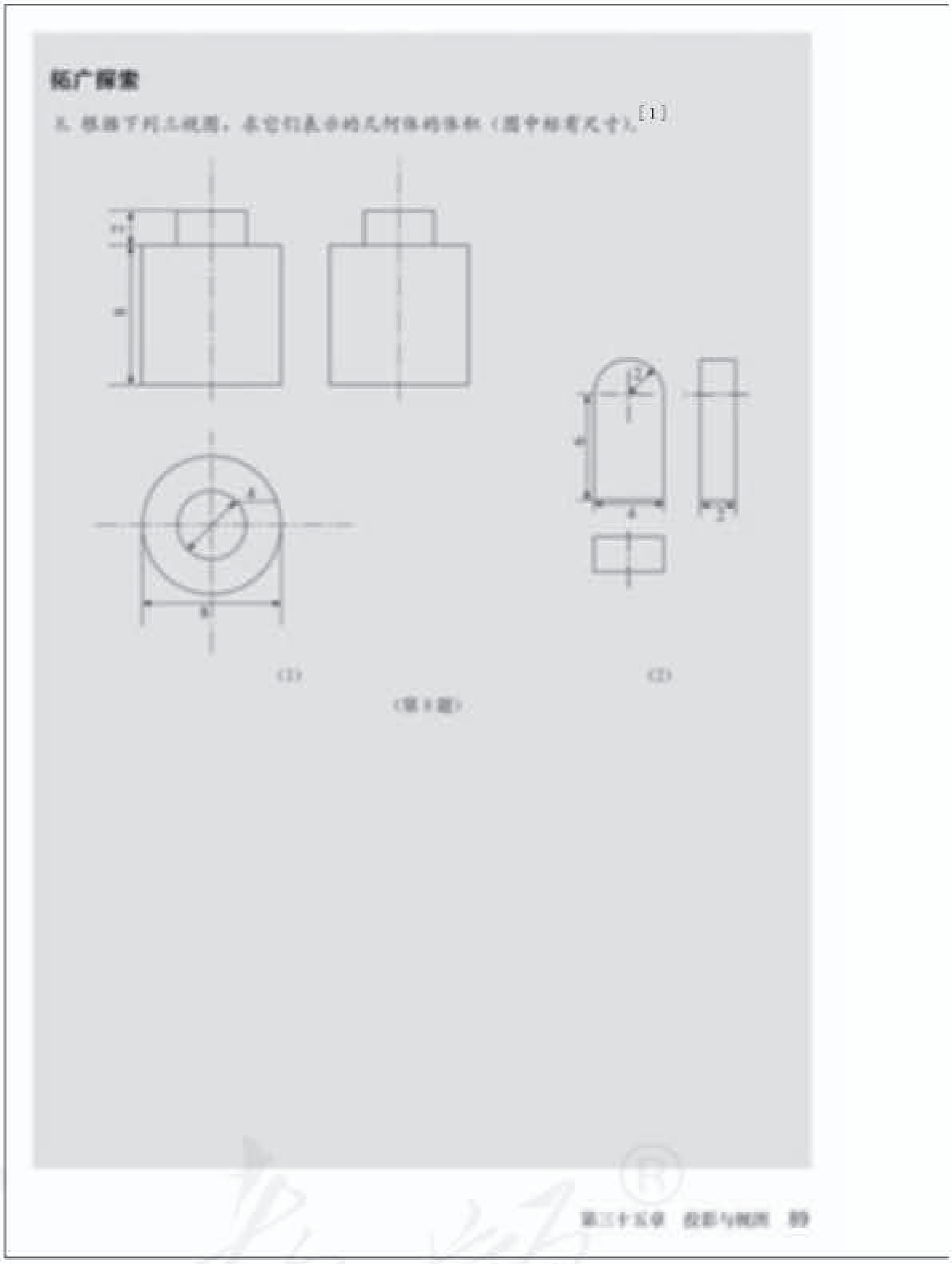
第 6 题中的展开图所对应的几何体是一个圆柱. 学生应熟练地画出这个几何体的视图，并运用相应的体积公式和面积公式准确地计算它的体积和表面积.

第 7 题中的几何体的上部是圆锥形状，下部是圆柱形状，它的展开图由圆锥的侧面展开图、圆柱的侧面展开图和一个底面组成，即由一个扇形、一个矩形和一个圆组成.

3. “拓广探索”的题目只有 1 道.

第 8 题是关于体积计算的问题. 计算体积之前，需要根据三视图确定立体图形由哪些基本几何体通过何种方式组合而成，由此确定如何计算体积.

[1] 由三视图得出对应的几何体是解决本题的关键.



拓广探索

8. 根据下列三视图，求它们表示的几何体的体积（图中标有尺寸）.[1]

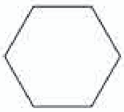
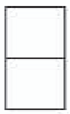
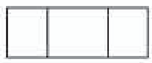
(1)　　(2)

(第 8 题)

第 8 题中的两副三视图分别对应的是由两个圆柱组成的几何体和由一个半圆柱、一个长方体组成的几何体.

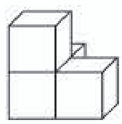
Ⅲ 习题解答

习题 35.1

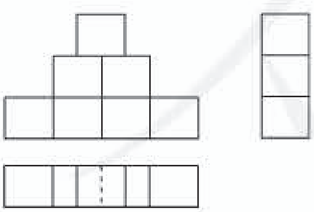
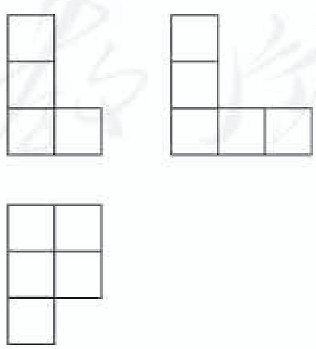
1. 右边一幅照片是下午拍摄的. 因为天安门坐北朝南，太阳在南边，由人影在人身后偏右，推知太阳在西南方向，此时是下午时间.
2. 上面一行由左至右第 1～4 个物体，分别与下面一行由左起第 3，4，2，1 的投影对应.
3. 上下底面的正投影是同一个正五边形，五个侧面的正投影分别是正五边形的五条边.
4. 圆锥的底面直径是 3，高是$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，体积是$\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$，表面积是$\frac{27}{4}\pi$.
5. (1)  (2)  (3) 

习题 35.2

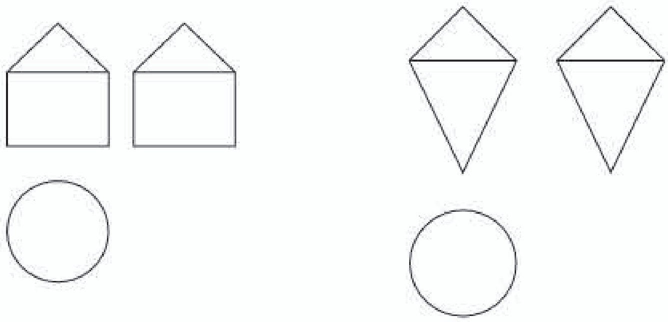
1. 上面一行由左至右第 1～4 个几何体，分别与下面一行由左起第 3，4，1，2 的三视图对应.
2. (略).
3. 无关，因为从任何角度用光线正对着球，投影都是同样的圆.
4. (1) 正四棱柱；(2) 圆柱；(3) 球.
5. 如图，由 4 个正方体组合而成，前面 3 个，后面靠左 1 个.



(第 5 题)

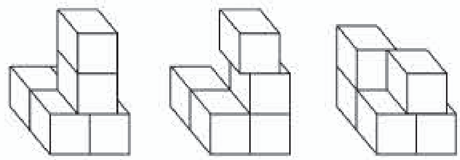
6. (1)  (2) 

7.



8. 由半圆柱和长方体组成的组合体.

9. 3 种，它们的立体图分别为

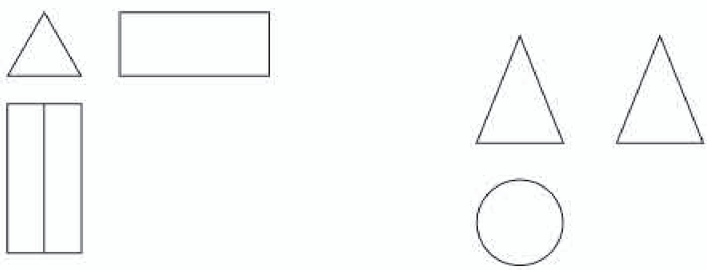


10. $16\pi\ \text{cm}^2$.

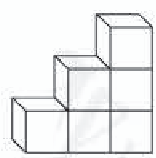
复习题 35

1. (3).

2.

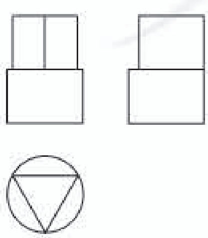


3. 如图，6 个正方体分三层按照 3 个、2 个和 1 个由下到上摆放.

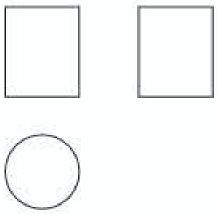


(第 3 题)

4.



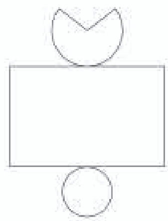
5. 正六棱柱.

6. 

体积：500π；表面积：250π.

7. 表面积：$(225+25\sqrt{2})\pi$.

展开图：



8. (1) 136π；(2) $48+4\pi$.

Ⅳ 教学设计案例

35.1 投影（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

投影及其有关概念，投影的分类，正投影的含义及其性质.

2. 内容解析

投影知识是学习视图的基础. 学生对投影和视图的知识已有初步感性认识，在此基础上，本节通过对实例的观察比较，引入基本概念，归纳基本规律. 不仅是使学生对投影的认识从感性上升为理性，达到更高的水平，更是为学生对后面学习三视图作铺垫、打基础.

从不同的角度出发，投影概念的定义也会有所不同. 一般地，有如下三种角度：(1) 直观的角度；(2) 抽象化的角度；(3) 集合的角度. 教科书采用的是从第 (1) 种角度进行定义的方式，主要是考虑了学生的思维发展水平.

本节以物体在日光或灯光照射下在地面或墙壁上形成的影子为基础，抽象出投影、投影线、投影面等概念. 根据投影线与投影面的不同位置关系，将投影分为平行投影和中心投影两类. 再根据平行投影中投影线垂直于投影面得出正投影的概念，进而研究这一节的核心内容——正投影的性质. 这个过程体现了研究几何内容的基本思路——从一般定义出发，主要研究特殊情形下图形的性质.

基于以上分析，确定本节课的教学重点是：正投影的概念和性质.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解投影的有关概念，能根据投影线的方向辨认物体的投影.

（2）了解中心投影、平行投影的区别.

（3）了解正投影的含义，能根据正投影的性质画出简单平面图形的正投影.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：能结合具体实例说明投影、投影线、投影面等有关概念.

达成目标（2）的标志是：知道平行投影和中心投影是根据投影线间的不同位置关系进行分类的，能结合具体实例解释说明平行投影和中心投影的区别.

达成目标（3）的标志是：知道正投影是平行投影中投影线垂直于投影面产生的一种特殊投影，能由此归纳出正投影的性质，并会根据性质正确画出简单平面图形的正投影.

三、教学问题诊断分析

本节教学涉及空间中直线与直线、直线与平面的位置关系，而学生缺乏这方面的知识，因此学习本节内容有一定的难度. 要加强与实际的联系，运用多媒体，展示丰富的实物图片，让学生通过观察具体的实例，结合已有的生活经验，了解这些空间位置关系，并把这种认知迁移到本节课对平行投影和中心投影中投影线不同位置关系的了解，并能根据正投影中投影线垂直于投影面的特征正确归纳出正投影的性质.

本节课的教学难点是：归纳正投影的性质，正确画出简单平面图形的正投影.

四、教学条件支持分析

本节教学要借助多媒体，展示丰富的实物图片，帮助学生建立概念，了解空间中直线与直线、直线与平面的位置关系.

五、教学过程设计

1. 创设情境，引入课题

师生活动：教师幻灯片展示“嫦娥探月”“鸟巢”和“水立方”等建筑图片，让学生观察.

引言　制造机器，建筑工程，发射卫星……都要先进行图纸设计，人们是怎样将复杂的物体在纸上绘制出来的呢？通过本章学习视图的知识你就会明白其中的道理，而要学习视图必须了解投影及其相关概念.

教师：我们在研究三角形、四边形等基本几何图形以及图形间的位置关系时，都是从一般定义出发，主要研究特殊情形下图形的性质，本章我们研究投影和视图的有关问题也将遵循这一思路.

设计意图：明确学习本章及本节内容的目的和意义，激发学习热情；了解学习本章及本节内容的基本思路，借鉴已有的研究几何问题的基本经验，减轻学习压力.

2. **观察实物和图片，了解投影及其有关概念**

问题 1 物体在日光或灯光的照射下会形成影子，你发现影子能反映物体哪些方面的特征？影子的形成与哪些因素有关？

师生活动：教师展示实物及图片，学生观察、思考、讨论，教师结合学生的感受，概括物体形成影子除了物体本身外，还需要照射光线、形成影子的地方，顺势给出投影、投影线、投影面的概念.

设计意图：通过观察实物和图片，使学生感知物体的影子能反映物体的位置、形状和大小，投影即是生活中物体在光线照射下，在某个面上得到的影子，照射光线就是投影线，形成影子的地方就是投影面，感知数学概念的形成来源于生活.

追问 1 你能说明下面实例中投影、投影线、投影面分别是什么吗？



师生活动：教师展示投影实例图片，请学生回答其中的投影、投影线、投影面.

追问 2 你能举出生活影子的实例，并指出其中的投影、投影线、投影面吗？

设计意图：通过实例说明投影的有关概念，把对投影的感性认识上升到理性认识，明确了解投影及其有关概念的意义，同时感知数学与实际生活密切联系，激发学习投影知识的兴趣.

3. **分析光线特征，了解投影的分类**

问题 2 分别利用探照灯和灯泡作为光源，在教室的墙面形成教学三角尺的影子，在上面的两个投影中，投影线间的位置关系有什么不同？

师生活动：学生观察，思考，提出自己的想法. 教师总结归纳，给出平行投影和中心投影的概念.

追问 1 你知道日晷和皮影戏所形成的投影分别是哪种投影吗？

追问 2 你能举出一些平行投影和中心投影的实例吗？

师生活动：教师给学生展示日晷和皮影戏的图片，并解释其中的道理. 学生举例说明，加深对平行投影和中心投影的理解.

设计意图：根据投影线间位置关系知道光线照射物体分两种情况，了解投影分平行投影和中心投影两类；学生举例说明平行投影和中心投影，辨析概念. 通过介绍日晷和皮影戏，感受投影在生活中的应用，培养数学应用意识，同时弘扬民族文化，增强民族自豪感.

练习 教科书第 66 页练习.

师生活动：教师巡视，学生独立完成.

设计意图：此练习简单有趣，能使学生运用所学投影的知识，在相对轻松的情境下，发展空间观念，体会学习的乐趣.

4. **观察思考，了解正投影的含义**

问题 3　观察下面三幅图中的投影线有什么区别？它们分别形成了什么投影？

师生活动：教师展示教科书第 66 页图 35.1-5 中的三幅图片，提出问题，学生观察思考，相互讨论，发表见解.

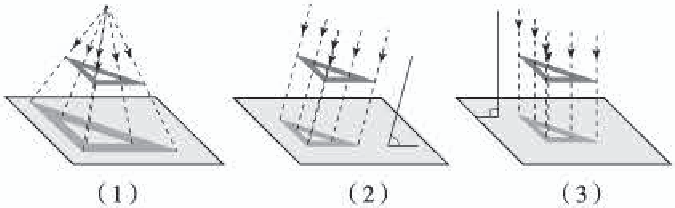


图 35.1-5

设计意图：通过观察活动，使学生体会到将实际问题抽象成几何图形，有助于分析问题的本质. 经过对比，不仅能更清楚地认识平行投影和中心投影的区别，还为引出正投影的概念作必要的铺垫.

追问　图 35.1-5 中图（2）（3）的投影都是什么投影？它们的投影线与投影面的位置关系有什么区别？

师生活动：教师展示图片，学生观察思考，相互交流. 教师引导学生回答：两幅图中的投影都是平行投影. 图（2）中的投影线斜着照射投影面，图（3）中的投影线垂直照射投影面. 给出正投影的概念：平行投影中投影线垂直于投影面产生的投影叫做正投影. 并指出这种由特殊位置关系产生的投影既是我们研究的重点，也是实际制图中经常应用的.

设计意图：通过经历观察、分析、比较的过程，抽象出正投影的概念，并从中再次体会研究几何问题的基本思路——从一般定义出发，主要研究特殊情形下图形的性质.

5. **观察探究，归纳正投影的性质**

问题 4　把一根直的细铁丝（记为线段 AB）放在三个不同位置：

①铁丝平行于投影面；

②铁丝倾斜于投影面；

③铁丝垂直于投影面.

三种情形下铁丝的正投影各是什么形状？大小有何关系？

师生活动：教师实物演示或图片展示，提出问题，学生观察、猜想、测量，教师引导学生归纳得出结论：

①正投影是线段，线段长等于正投影长；

②正投影是线段，线段长大于正投影长；

③正投影是一个点.

设计意图：用细铁丝表示一条线段，运用正投影的概念，通过实验观察，分析它的正投影，简单、直观，易于发现归纳线段（一维图形）正投影的规律，为研究平面图形（二维图形）正投影的规律打下基础.

问题 5　把一块正方形纸板（记为正方形 $ABCD$）放在三个不同位置：

①纸板平行于投影面；

②纸板倾斜于投影面；

③纸板垂直于投影面.

三种情形下纸板的正投影各是什么形状？大小有何关系？

师生活动：教师实物演示，提出问题，学生先独立观察、思考，再相互交流，大胆猜想，勇于发表见解. 教师引导学生归纳得出结论：

①纸板的正投影与纸板的形状、大小一样；

②纸板的正投影与纸板的形状、大小发生改变，不完全一样；

③纸板的正投影成为一条线段.

设计意图：用正方形纸板表示正方形，运用正投影的概念，观察分析它的正投影. 由于有了线段正投影的规律做基础，学生类比归纳得出平面图形正投影的规律.

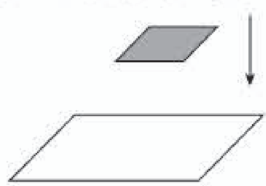
追问 2 当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影与这个面有怎样的关系？

师生活动：教师提出问题，学生独立思考，大胆猜想，得出结论. 教师根据学生的回答进行完善，师生共同归纳物体正投影的性质：当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影与这个面的形状、大小完全相同.

设计意图：学生有了线段、正方形正投影的规律作铺垫，大胆猜想，在教师引导下归纳出物体正投影的性质，同时学习过程渗透了从简单（一维图形的正投影）到复杂（二维图形的正投影），从具体（铁丝、纸板）到抽象（线段、平面几何图形），从特殊（正方形）到一般（平面图形）的认识规律，进一步培养学生抽象、概括的能力，发展学生的空间观念.

6. 运用性质画出简单平面图形的正投影

练习 按照图中所示投影线的方向，画出矩形的正投影.



师生活动：学生独立观察、思考，按要求完成画图，教师巡视、纠错、指导.

设计意图：通过利用正投影的性质画出平面图形的正投影，巩固所学的重点内容，提高学生灵活运用知识解决实际问题的能力，发展学生的空间观念.

7. 小结回顾

教师和学生一起回顾本节课所学内容，并请学生回答以下问题：

(1) 本节课学习了哪些主要内容？重点研究了什么问题？

(2) 平行投影与中心投影是根据什么进行分类的？平行投影与正投影有怎样的联系和区别？

(3) 探究物体正投影的性质经历了怎样的过程？

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容形成概念体系，掌握本节课的核心知识——正投影的含义及其性质.

8. 布置作业

教科书习题 35.1 第 1，2 题.

五、目标检测设计

1. 平行投影中的投影线是（　　）.

（A）一条射线　　　　（B）一组互相平行的射线

（C）一组聚成一点的射线　　　　（D）一组垂直于投影面的射线

设计意图：本题考查平行投影、中心投影、正投影投影线的特征.

2. 平行四边形在太阳光的投影下得到的几何图形一定是__________，当太阳光垂直照射地面且平行四边形平行于地面时，它的面积与它投影的面积的大小关系是__________.

设计意图：本题考查正投影含义及性质.

35.2　三视图（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

从投影的角度理解三视图的概念，画基本几何体的三视图.

2. 内容解析

三视图是主视图、俯视图和左视图的统称，它是从三个不同方向表示物体形状的一种常用视图. 学生在七年级已经接触过“从不同方向看物体”的内容，但当时没有明确地给出“视图”这个概念. 现在从投影的角度来解释三视图的概念，这与从不同方向看物体所得平面图形实际是一致的. 三视图中的相对位置关系和大小关系由三视图的产生过程所决定，它们是画三视图的基础.

基本几何体即柱体，锥体，球体等，它们是构成几何体的基本成分，许多几何体都可以看作由基本几何体组合或分割而成. 因此画基本几何体的视图是学习画三视图的基础. 画基本几何体的三视图是“由物画图”的开始，是“由图想物”的基础，体现了从立体图形到平面图形的转化.

基于以上分析，确定本节课的教学重点是：从投影的角度理解三视图的概念，会画基本几何体的三视图.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）经历三视图的产生过程；探索三视图中三个视图间的位置关系和大小关系.

（2）会画基本几何体的三视图.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：知道视图是物体在某一方向光线下的正投影；三视图是同一个物体在三个不同的投影面上得到的三个正投影，知道三个投影面间的位置及三个方向的投影线都有明确的规定.

达成目标（2）的标志是：能正确画出基本几何体的三视图.

三、教学问题诊断分析

本节教学中，学生虽学过“从不同方向看物体”的内容，但那仅是以生活经验为基础的“视图”，既没有明确地学习过视图的概念，也不是从投影的角度来认识视图，因此对“从三个不同方向看物体”与三视图的理解需要有一个从感性到理性升华的过程. 要准确理解三视图中的相对位置关系和大小关系，对学生的空间想象能力有较高要求，因此要结合教具或动画具体演示三视图的产生过程，加深对三视图的相对位置关系和大小关系的理解掌握，帮助学生逐步建立空间观念. 画三棱柱的三视图需要分部分进行观察，对学生的空间观念要求较高，是教学中的又一难点.

本节课的教学难点是：对三视图概念的理解；画三棱柱的三视图.

四、教学过程设计

1. 观察思考，了解视图

师生活动：在桌上摆放一本英汉词典，教师将其直立. 学生从书的正面（封面）观察.

问题 1　从书的正面（封面）观察，会看到怎样的平面图形？请同学们画出所观察到的平面图形.

师生活动：学生观察、思考并回答. 学生画完后，教师给出视图的概念，学生所画的即是我们所摆放英汉词典的一个视图. 从两个方面说明视图的概念：当我们从某一方向观察一个物体时，所看到的平面图形叫做物体的一个视图；视图可以看作物体在某一方向光线下的正投影.

追问　请同学们从书的左面（书脊）和上面观察，所得到的视图分别是什么？它们相同吗？

教师说明：对于同一物体，从不同方向观察，所得到的视图可能不同；单一的视图通常只能反映物体一个方面的形状. 为了全面地反映物体的形状，生产实践中往往采用多个视图来反映同一物体不同方面的形状. 例如，教科书图 35.2-2 中右侧的三个视图，可以多方面反映飞机的形状. 本章我们只讨论三视图.

设计意图：从学生最熟悉的物体入手，让学生经历从不同方向观察物体的活动过程，体会从不同方向观察同一物体可能看到不同的图形，让学生对三视图形成感性认识，迅速进入学习状态，既激发了求知欲望，又激活了学习思维，从而引入课题. 追问既是对视图概念认识的巩固，也为后面理解三视图埋下伏笔. 通过对问题 1 及追问的讨论回答，让学生知道单一的视图通常只能反映物体一个方面的形状，用多个视图来反映同一物体不同方面的形状，可以较全面反映物体的整体形状，初步感知视图在反映物体形状方面的作用.

2. 共同探究，形成概念

师生活动：(1) 教师将一个长方体摆放在教室的墙角处，对长方体在教室的三个墙面进行正投影或利用课件，教师边演示边讲解三视图的概念.

问题 2　如图 1，展开的这三个视图的位置有什么关系？

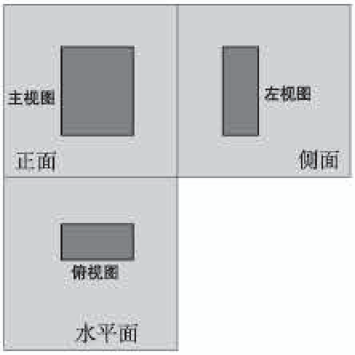


图 1

师生活动：教师再次演示长方体向三个投影面正投影得到的视图，并展开到同一平面上，学生观察、思考、讨论. 并共同得出画三视图时，三个视图都要放在正确的位置：主视图在左上边，它的正下方是俯视图，左视图在主视图的右边.

设计意图：通过教师演示，水到渠成地给出主视图、左视图、俯视图的概念. 学生从观察中感知主视图、左视图、俯视图的产生过程，从而形成概念. 让学生明确长、宽、高的意义：正对着物体看，物体左右之间的水平距离、前后之间的水平距离、上下之间的竖直距离，分别对应这里所说的长、宽、高.

问题 3 主视图、左视图、俯视图分别反映了长方体的哪些特征量（长、宽、高）？

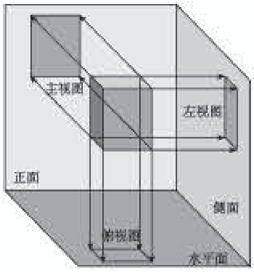


图 2

师生活动：教师再次演示长方体向三个投影面正投影得到的视图（图 2），并展开到同一平面上，学生观察、思考、讨论.

师生活动：学生讨论、回答以上问题后，教师小结：三视图中，主视图与俯视图可以表示同一个物体的长，主视图与左视图可以表示同一物体的高，左视图与俯视图可以表示同一物体的宽，因此三个视图的大小是互相联系的. 画三视图时，三个视图都要放在正确的位置，主视图在左上边，它的正下方是俯视图，左视图在主视图的右边，并且要注意主视图与俯视图的长对正，主视图与左视图的高平齐，左视图与俯视图的宽相等.

设计意图：以简单的基本几何体为例，发现三个视图的大小关系，让学生感受从三维空间向二维空间的转换过程，初步领悟画法.

追问 结合三视图中的位置关系和大小关系，画三视图时主视图与俯视图之间、主视图与左视图之间、左视图与俯视图之间应分别要注意什么？

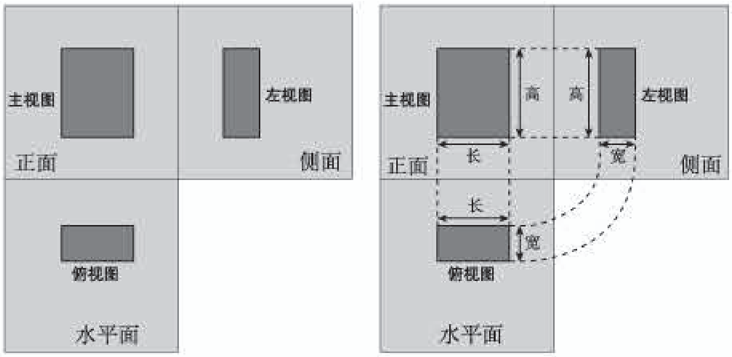


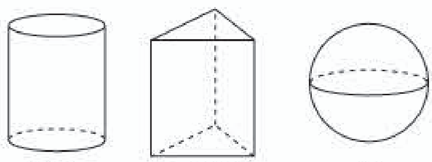
图 3

师生活动：学生讨论、回答以上问题后，教师小结："长对正，高平齐，宽相等"（图 3）.

设计意图：通过观察讨论三视图中的三个视图的位置关系和大小关系，体会"长对正，高平齐，宽相等"的具体含义.

3. 实践应用，深化认识

例 画出如图 4 所示的一些基本几何体的三视图.



圆柱（1）　正三棱柱（2）　球（3）

图 4

师生活动：学生在画图之前正对几何体，从三个方向观察投影. 教师板演圆柱的三视图，并总结画图步骤. 学生讨论完成正三棱柱、球的三视图. 学生在画正三棱柱时，教师提示：看得见部分的轮廓线画成实线，因被其他部分遮挡而看不见部分的轮廓线画成虚线.

设计意图：通过画图，使学生进一步认识视图与物体形状的联系，体验三视图的形成过程，巩固三视图的概念，进一步培养空间观念.

4. 课堂小结，构建体系

教师与学生一起回顾本节课所学的主要内容.

（1）三视图是怎样形成的？

（2）三视图怎样反映物体的长、宽、高？在位置摆放上有怎样的规定？

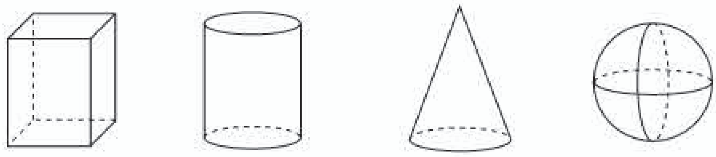
（3）画一个物体三视图的方法是什么？

5. 布置作业

教科书第 75 页练习.

五、目标检测设计

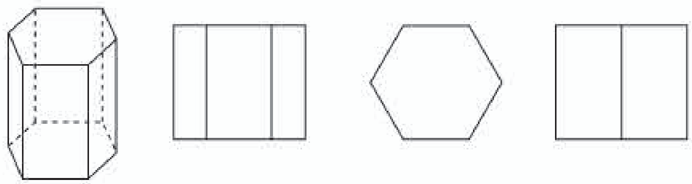
1. 下列几何体中，三视图的三个视图完全相同的几何体是（　　）.



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

设计意图：本题考查三视图的概念.

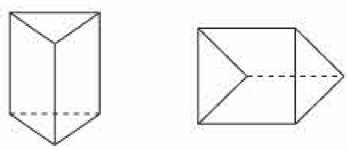
2. 请将下图所示六棱柱的三视图中三个视图的名称分别填在相应的横线上，并按画三视图的要求重新摆放它们的位置.



（第 2 题）　＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿＿＿

设计意图：本题考查三视图的概念及它们之间的摆放位置.

3. 请画出如图所示三棱柱的三视图.



（第 3 题）

设计意图：本题考查三棱柱的三视图.

35.3　课题学习　制作立体模型（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

制作立体模型

2. 内容解析

前面学习了“由物画图”和“由图想物”，本节安排了“由图制物”的实践活动，这是结合实际问题动脑与动手并重的学习内容. 不仅可以检验学生对本章核心内容“三视图”的掌握情况，还可以培养学生的动手能力，发展学生的空间观念. 观察三视图，并综合考虑各视图表达的含义以及视图间的联系，可以想象出三视图所表示的立体图形的形状，这个由视图转化为立体图形的过程需要动脑实现. 将所想象出的物体形状，变为现实的立体模型，检验和校正所想象的结果需要动手完成. 通过根据三视图制作立体模型的实践活动，让学生体验平面图形向立体图形转化的过程，体会

用三视图表示立体图形的作用，进一步感受立体图形与平面图形之间的联系.

本节课的两个问题都是由三视图制作立体模型. 问题 1 需要制作立体图形的展开图或直接制作立体图形的各侧面，再折合或粘合起来；问题 2 是将想出的立体图形直接制作出来，两个问题都是前面三视图知识的综合运用与实践，适合在教师指导下，学生采用独立学习与合作学习相结合的方式完成. 学生在观察、想象、制作、交流中获得体验与经验，使知识转化为能力.

基于以上分析，可以确定本课的教学重点是：“由图制物”.

二、目标和目标解析

1. 目标

经历由视图转化为立体图形的过程，体会平面图形与立体图形之间的联系.

2. 目标解析

达成目标的标志是：能想象出三视图所表示的立体图形的形状，通过动手实践，由图形得出立体模型.

三、教学问题诊断分析

在制作活动之前，学生需要想象出立体图形的形状，这是具有一定难度的，结果是否准确，直接影响制作立体图形的效果. 学生想出的立体图形的形状，还需要用教科书的三视图进行检验，确保结果的准确. 有序地组织学生制作立体模型，按正确的方法进行材料的剪切、拼接是教学的另一难点.

本节课的教学难点是：实现从平面图形到立体图形的转化，感受它们之间的联系.

四、教学支持条件分析

本节课学生要亲自动手，制作立体模型，需准备：刻度尺、剪刀、小刀、胶水、硬纸板、马铃薯（或萝卜）等；教师需准备制作好的模型样品，供学生参考、比较.

五、教学过程设计

1. 复习回顾，提出课题

教师引言：前面我们在“三视图”一节学习了“由物画图”和“由图想物”，我们知道，观察三视图，并综合考虑各视图表达的含义以及视图间的联系，可以想象出三视图所表示的立体图形的形状. 如何检验想象的结果是否正确？如何校正所想象的结果使其更准确？这个由视图转化为立体图形的过程，我们可以通过动手实践，制作实物模型来完成. 本节课我们将一起动手，根据三视图制作立体模型，亲身体验平面图形向立体图形转化的过程，体会用三视图表示立体图形的作用，进一步感受立体图形与平面图形之间的联系.

设计意图：回顾前两节所学的“由物画图”和“由图想物”知识，提出由三视图制作对应的立体模型的新问题. 这样的课题研究学习，既可以体验平面图形向立体图形转化的过程，又能检验和校正“由图想物”的结果是否准确.

2. 观察想象，动手制作

问题 1 以硬纸板为主要材料，分别作出下面的两组视图（图 1）表示的立体模型.

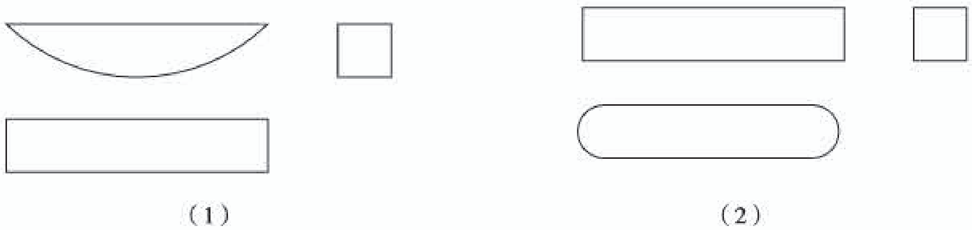


图 1

师生活动：教师展示三视图并标注尺寸，启发学生，由三视图想象出对应的立体模型的形状. 由想象出的立体模型的形状，画出相应的三视图，并与上图比较，检验想象的结果是否准确（这里要给学生充分的时间去想象、比较）. 在确定立体模型形状的情况下，学生动手制作. 图（1）的制作让学生合作完成，图（2）的制作让学生独立完成. 然后教师展示课前制作好的模型样品.

设计意图：学生只有想象出立体模型的形状，才可能正确地进行制作，这一步非常关键，要给学生足够的思考空间. 独立完成与合作学习的方式，可以让学生都能顺利地完成学习任务，并得到共同提高的机会. 展示准备好的模型样品供学生参考、比较.

3. 借鉴经验，类比学习

问题 2 按照下面给出的两组三视图（图 2），用马铃薯（或萝卜）做出相应的实物模型.

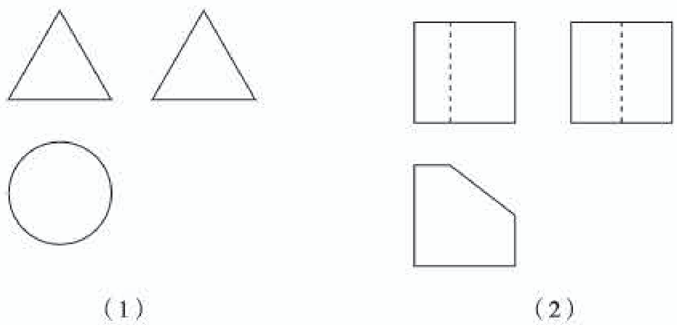


图 2

师生活动：教师提问：想一想，上面两组三视图，分别表示什么实物模型. 学生确定了实物模型的形状后，利用马铃薯（或萝卜）动手制作. 在制作过程中，教师强调安全、有序，确保活动顺利进行. 学生制作完成后，教师展示课前制作好的模型样品，供学生参考、比较.

设计意图：通过动手操作，体会三视图与实物模型的关系，检验和校正“由图想物”的结果，加深理解投影规律、三视图标注尺寸与实物长宽高的大小关系以及虚实线表示的实际含义，进一步培养空间观念. 学生在已有经验上类比学习，提高学生自主动手能力.

4. 展示作品，分享成功

师生活动：教师展示学生的优秀作品，学生共同鉴赏评品.

设计意图：充分展示学生作品，全体同学体验成功感受，分享成功喜悦，增强自信，共同提高.

5. 课堂小结，提炼升华

教师与学生一起回顾本节课经历的主要活动，并请学生回答以下问题：

(1) 你认为根据三视图制作立体模型的关键环节是什么？

(2) 要检验由三视图想象出的立体图形是否正确，可以采用怎样的实践方法？

6. 布置作业

结合具体例子，写一篇短文介绍三视图的应用.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 投影（projection）**基础**

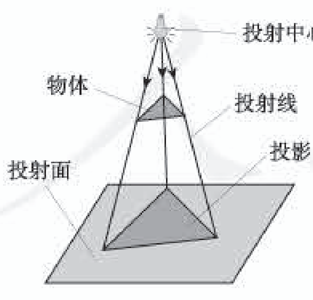
(1) 投影法的基本知识

生活中，投影现象随处可见. 物体在光线的照射下，就会在地面或墙壁等处出现物体的影子. 人们根据这种现象加以几何抽象的研究，总结其中的规律，提出用“投影法”来表示物体. 投影法就是投射线通过物体，向选定的面投射，并在这个面上得到图形的方法. 根据光源、投射线和投影面三要素的相对位置，投影法可分为中心投影法和平行投影法.

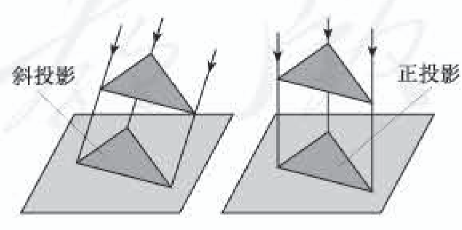
中心投影法：光源叫做投影中心，所选定的平面叫做投影面. 光线等叫做投射线（或投影线），经过物体上某点的投射线与投影面的交点叫做物体上这点在投影面上的投影. 这种投射线都交于一点（投影中心）的投影方法叫做中心投影法.

平行投影法：若将投影中心移到离投影面无穷远处，则所有的投射线都可以看作相互平行，这种投射线相互平行的投影方法，叫做平行投影法.

在平行投影中，投射线与投影面相倾斜的投影称为斜投影，投射线垂直于投影面的投影称为正投影.



中心投影法



平行投影法

(2) 投影的基本知识归纳

投影方法
- 中心投影法（画透视图）
- 平行投影法
  - 斜投影法（画斜轴测图）
  - 直角投影法或正投影法（画工程图样及正轴测图）

2. **日晷的知识**

日晷也是一种利用太阳投影指示时间的工具. 它由晷盘和晷针组成. 晷盘是一个圆盘，晷面上有刻度；晷针安装在晷盘中央与盘面垂直. 太阳照到针上，在盘面上产生投影. 用日晷测时间不是根据日影的长度，而是根据日影的方向. 按照晷盘面放置位置的不同，日晷分为赤道日晷、地平日晷、立晷和斜晷. 赤道日晷的晷盘面平行于赤道面，晷针指向南北极；地平日晷的晷盘面平放于当地的地平面上；立晷的晷盘面垂直于地平面；斜晷的晷平面指向某一方向.

图 35-1 所示是置于北京故宫博物院太和殿前的清朝赤道日晷. 晷盘两面都有刻度，分子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥共十二个时辰，每个时辰又等分为“时初”、“时正”，这正是一日的 24 小时. 由于太阳照射的角度变化，在“春分”以后看晷盘的上面；秋分以后看晷盘的下面. 由于晷盘面平行于赤道面，晷针又垂直于晷盘面，所以晷针是指向地球南、北极的方向，而晷针与地平面的夹角正是当地的纬度. 太阳照射时，晷针的影子随太阳的运动而移动，这样就使得针影的位置不同，由此就能反映太阳的位置不同，也就反映出当天的不同时刻. 正中午时，影子正好在针的正下方.

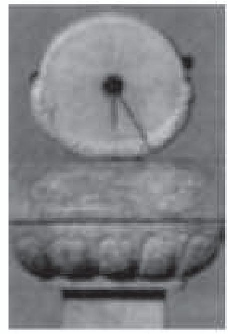


图 35-1

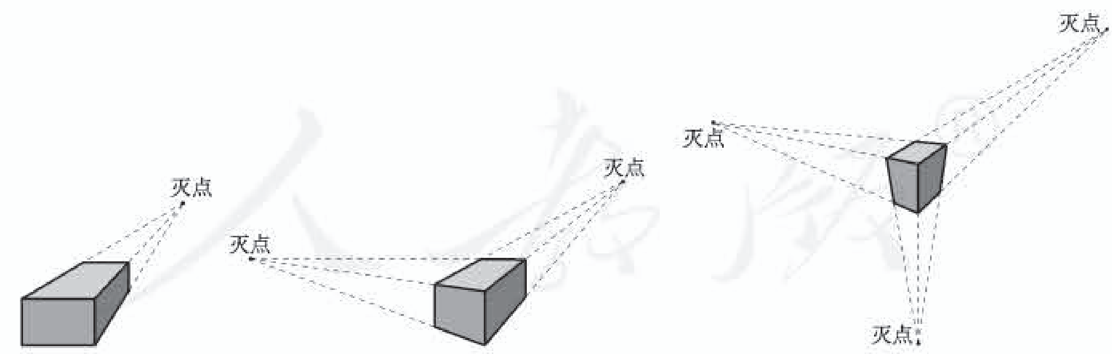
参考文献

摘自：初中物理在线

3. **美术中的透视图**

利用中心投影法生成的图形——称为透视图（将物体放在透明的画面后面，也可以想象画面是透明的，用眼睛进行观察，在画面上画图）.

透视图的特点：与画面相交的平行的直线，在透视投影图中交于一点，这点称为消失点，也称为灭点.（眼睛为投影中心，过眼睛位置作已知直线的平行线，与画面的交点即为该已知直线的灭点），透视投影的灭点有无限多个，与坐标轴平行的平行线在投影面上形成的灭点称为主灭点. 主灭点最多有三个，其对应的透视投影分别被称为一点透视、二点透视、三点透视（图 35-2）.



(1) 一点透视　　(2) 二点透视　　(3) 三点透视

图 35-2

透视原理在美术作品中广泛应用，例如，图 35-3 是一幅名画，在这幅《雅典学院》名画中，文艺复兴时期的意大利画家拉斐尔把希腊、罗马、斯巴达以及意大利的学者和哲学家邀聚一堂，他们正展开热烈的学术讨论，以古希腊的两位大学者柏拉图（左）和亚里士多德（右）为中心，激动

人心的辩论场面向两翼和前景展开. 画面描绘了 50 多个人物，虽然多有不同的性格和活动，但都具有丰富知识和良好修养的大学者风度. 画面用拱廊作背景，构成了宽广的空间，运用建筑的透视，延伸了壁画的纵深感，众多的人物与宽广的背景融成一体，整个画面显示出均衡对称，坚实深厚的效果.

图 35-3

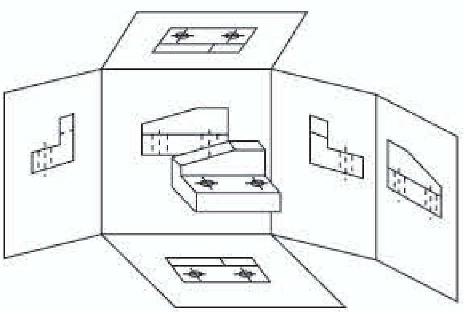
4. 视图基础

（1）正投影简称投影，用正投影法所绘制出物体的图形称为视图.

视图分为基本视图、向视图、局部视图和斜视图. 我们所学习的“三视图”属于基本视图.

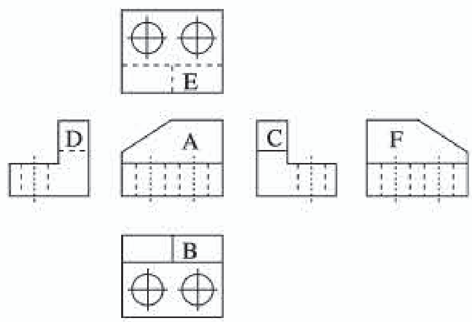
（2）物体的一个视图一般情况下很难表示物体全貌. 要表示出某个物体的全部面貌，需从不同的方向进行投影画出它的几个视图.

在基本视图中，为了能完整清楚地表示物体的结构与形状，可以从六个基本投影方向来描述同一物体. 相应的有六个投影面分别垂直于六个投影方向. 物体向六个基本投影面投影所得到的视图称为基本视图，它们分别为主视图、俯视图、左视图、右视图、仰视图、后视图. 基本投影面的展开过程如图 35-4 所示，得到的基本配置关系如图 35-5 所示. 基本视图之间保持“长对正、高平齐、宽相等”的对应关系.



六个基本视图按投影关系配置

图 35-4



六个基本视图按投影关系配置

图 35-5

实际上并不是所有的物体都需要把六个视图都表示出来. 物体所需要视图的数量应根据其形状、结构的复杂程度等来确定. 在能够明确表示物体的前提下，视图数量应尽可能少. 在课标的要求下，我们所表示的物体较为简单，因此，用“三视图”即可表明物体的形状.

（3）三投影面体系的建立

一般物体都具有长、宽、高三个互相垂直的方向，因此，我们首先在空间设立三个互相垂直的投影面（图 35-6），三投影面是由三个相互垂直的投影面所组成，三个投影面分别是：正投影面，简称正面，用 V 表示；水平投影面，简称水平面，用 H 表示；侧立投影面，简称侧面，用 W 表示. 若将 V，H，W 面看成无限大的平面，它们把空间分为八个部分. 相互垂直的投影面之间的交线称为投影轴，它们分别是：

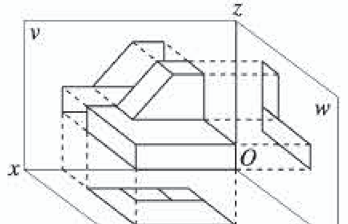


图 35-6

Ox 轴（简称 X 轴）是 V 面与 H 面的交线，它代表长度方向.

Oy 轴（简称 Y 轴）是 H 面与 W 面的交线，它代表宽度方向.

Oz 轴（简称 Z 轴）是 V 面与 W 面的交线，它代表高度方向.

Ox，Oy，Oz 相互垂直，交点 O 称为原点.

（4）物体的三视图

将物体放在三投影面体系第一分角中，按正投影法分别向各投影面投射. 由前向后在正投影面 V 投影所得到的视图称为主视图，由上向下在水平投影面 H 投影所得到的视图称为俯视图，由左向右在侧立投影面 W 投影所得到的视图称为左视图.

物体的形状与三视图之间存在如下对应关系：

主视图：从物体前面向后看，主要得到物体前面的轮廓形状，用粗实线绘出. 而后面的轮廊为不可见，用虚线绘出.

俯视图：从物体上面向下看，主要得到上面的轮廓形状 ，用粗实线绘出. 而物体下面被遮挡的轮廓形状，用虚线绘出.

左视图：从物体左面向右看，主要得到物体左面的轮廓形状，用粗实线绘出. 物体右面被遮挡的轮廓形状，用虚线绘出.

例如：图 35-7 为一种小轿车的三视图.

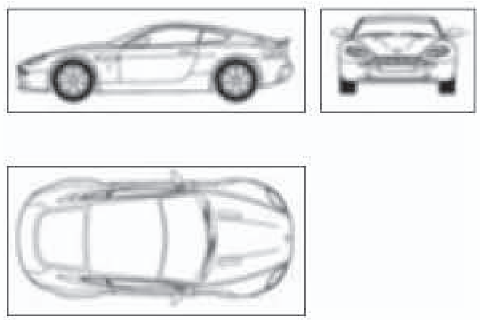


图 35-7

5. 工程上常用的几种投影图

工程上常用的投影图有以下几种：

（1）透视图

利用中心投影法绘制的图样. 透视图具有立体感和真实感，符合人的视觉，因而在建筑的外形设计中使用. 但它度量性差，手工作图费时而且难度大，故在机械图样中很少应用.

（2）轴测图

用平行投影法绘制的图样. 在作图时，将平面图在水平线上，扭转到一定的角度后，把平面图上的各点按同一比例尺寸，向上作设计高度的垂线，然后连接垂直线上端各点，即可求出轴测图. 该图样具有一定的立体感，但度量性不理想，适用于产品外观图.

（3）多面正投影图

用正投影法绘制的图样. 设置一个投影面，应用正投影法得到投影图为单面正投影图. 采用几个相互垂直的投影面，按正投影法从几个不同方向分别向各个投影面投射，所得到的一组正投影图，称为多面正投影图. 这种图虽然立体感差，但能完整地表达物体的形状，度量性好，便于指导加工和装配. 因此多面投影图被广泛应用于工程的设计和制造中.

6. 投影变换

将三维图形向二维平面上投影生成二维图形表示的过程称为投影变换. 根据视点的远近，投影分为平行投影和透视投影. 当投影中心（观察点）与投影平面之间的距离为无穷远时，为平行投影，否则为透视投影.

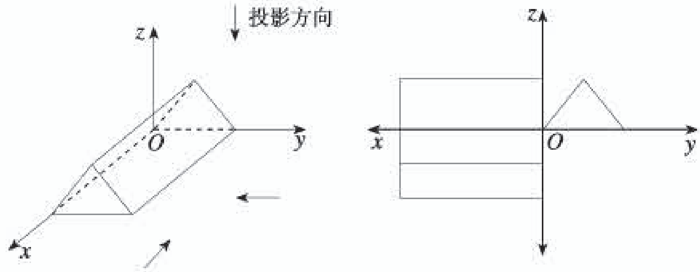


图 35-8

投影方向垂直于投影平面时称为正平行投影，常用于生成工程图的三视图. 三视图（主视图、俯视图、左视图）的生成就是把 x，y，z 坐标下的形体分别投影到 $y=0$，$z=0$，$x=0$ 的平面，然后把 $x=0$ 平面上的图绕 z 轴逆时针旋转 90°，把 $z=0$ 平面上的图绕 x 轴顺时针旋转 90°，这样，在 $y=0$ 的平面上得到一个平面的三视图（图 35-8）. 当然，在实际使用中，为了标注尺寸的需要，三个视图离开原点一定的距离.

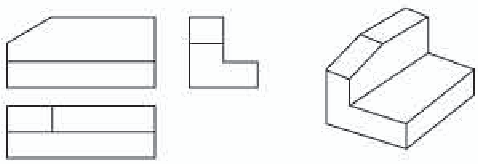


图 35-9　　图 35-10

工程上应用最广泛的图样是多面正投影图，主要是三视图，如图 35-9 所示. 它通常能够比较完整地、确切地表示零件各部分的形状，且作图简便、度量性好；但它的缺点是立体感不强，直观性较差. 如采用轴测投影图来表示同一物体（图 35-10），则立体感强，直观性好，缺乏读图基础的人也能看懂. 可是轴测图不易反映物体各表面的实形，因而度量性差，同时作图较正投影图复杂，因此轴测投影图在工程上一般用来作为辅助图样，帮助人们读懂正投影图，以弥补正投影图的不足.

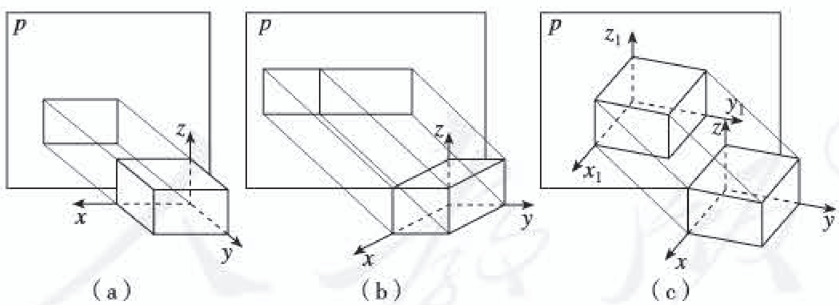


图 35-11

当我们用三视图来表示物体的形状和大小时，为了使作图简单，通常都将物体的某些面处于特殊位置，使其具有实用性. 此时一个投影图只反映物体一个面的形状，没有立体感（图 35-11（a）），若此时将物体绕 z 轴旋转一个角度，投影就可能反映两个面的性质（图 35-11（b）），如再将物体向前倾斜一个角度，则投影图就可能反映三个面的形状（图 35-11（c）），就有一定的立体感了. 这种将物体连同确定其空间位置的直角坐标系，按平行投影法一并投影到单一投影面 p 上所得到的图形，成为轴测投影图，简称轴测图.

参考文献

摘自“中国图学网”现代图形技术——第 3 章　今天的“蓝图”——工程图样和图纸的处理技术.

二、拓展性问题

1. 建筑物的高度

如图 35-12，AB 是直立在地面上的一根标杆，DE 是直立在地面上的一座建筑物，$AB=1$ m. 某一时刻 AB 在阳光下的投影 $BC=0.5$ m.

(1) 请你在图中画出此时 DE 在阳光下的投影；

(2) 在测量 AB 的投影时，同时测量出 DE 在阳光下的投影 EF 长为 9 m，请你计算建筑物的高度.

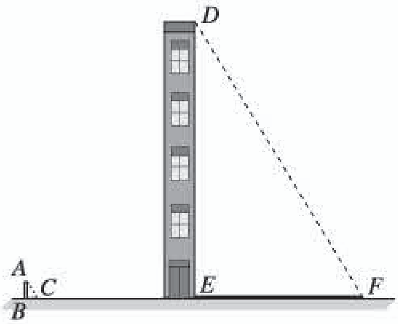


图 35-12

[答案与提示]

(1) 连接 AC，过点 D 作 $DF \parallel AC$，交直线 BC 于点 F，线段 EF 即为 DE 的投影.

(2) $\because AC \parallel DF$，

$\therefore \angle ACB=\angle DFE$.

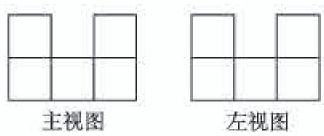
$\because \angle ABC=\angle DEF=90°$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}$，即 $\dfrac{1}{DE}=\dfrac{0.5}{9}$，得 $DE=18$ (m).

2. 正方体的个数

桌上摆着一个由若干个相同正方体形成的几何体，其主视图和左视图如图 35-13 所示，这个几何体最多可以由______个这样的正方体组成.



2	1	2
1	1	1
2	1	2

图 35-13

[答案与提示]

主视图和左视图都为 3 列，可知几何体的俯视图最多为 3×3 的正方形，由主视图可知在俯视图第 1、3 列每个正方形内填 2（表示在此位置有 2 个正方体)，第 2 列每个正方形内填 1（表示在此位置有 1 个正方体)；又由左视图可知，在俯视图的 1、3 行中（观察者需站在俯视图的左侧看)，每个小正方形内都填入 2，第 2 行填 1，重叠交叉处应取两次所填数字中较小的，所以如上图，总体上最多由 13 个正方体组成.

3. 建筑物的形状

某建筑物模型的三视图如图 35-14 所示，请你描述建造的建筑物是什么样子的？共有几层？模型一共需要多少个小方正体.

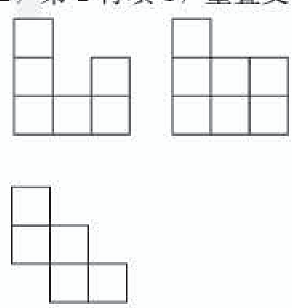


图 35-14

[答案与提示]

(图略)，共三层，需 9 个小正方体.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章内容包括投影及有关概念，正投影的含义和性质，三视图的概念及基本几何体三视图的画法，根据简单几何体的三视图制作立体模型. 其中三视图是全章的核心内容.

对于投影及有关概念，应考查学生是否了解投影有关概念的含义，投影分类的依据.

对于正投影的含义及性质，应考查学生是否知道正投影是特殊位置关系下的平行投影，是否能根据正投影的性质画出简单几何体的正投影.

对于三视图的概念，应考查学生能否了解三视图是物体三个特定的不同方向正投影的组合，能否判断简单物体的三视图，能否正确画出基本几何体的三视图，能否由物体的三视图想象、描述物体的形状并制作实物模型.

对于立体图形与侧面展开图的联系，应考查学生是否了解基本几何体的侧面展开图，能否根据侧面展开图想象和制作实物模型.

2. 考查三视图的概念、立体图形与其三视图、展开图之间的关系，应注意以下问题：

（1）对于三视图概念，应着重考查运用概念由实物画出三视图，根据三视图想象并描述实物的形状，经历体会立体图形与三视图的互相转化的过程，发展学生的空间观念.

（2）对于立体图形与三视图、展开图的联系，应考查学生能否根据三视图、展开图与立体图形的联系，解决现实生活中的实际问题.

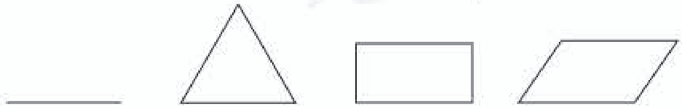
3. 在对三视图概念的理解运用的评价中，要关注学生是否知道三视图中的三个视图在反映物体的形状和大小方面各自的地位和作用，是否了解基本几何体的三视图是画物体三视图基础.

4. 本章内容与实际生活联系紧密，对于学生的考查，在按照常规的进行试题书面检测的同时，应积极探索新的评价方式，例如开展立体模型制作竞赛，设计图纸竞赛等，使学生学有所用，通过评价方式的改革，倡导学习方式和内容方面的改革.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 一个矩形木框在太阳光的照射下，在地面上的投影不可能是（　　）.

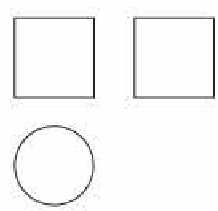


(A)　　(B)　　(C)　　(D)

2. 某几何体的三视图如图所示，则此几何体是（　　）.

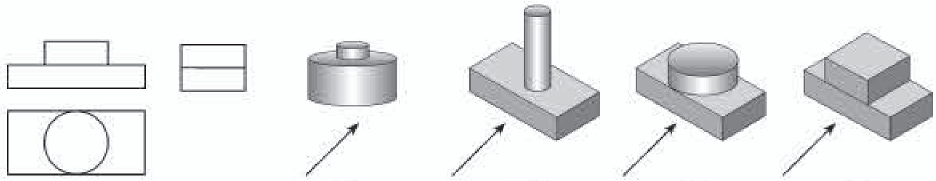
（A）圆锥　　（B）长方体

（C）圆柱　　（D）四棱柱



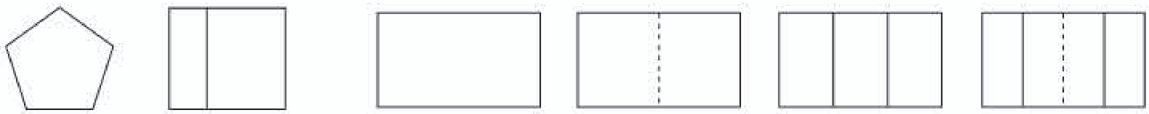
（第 2 题）

3. 已知某物体的三视图如图所示，那么与它对应的物体是（　　）.



（第3题）　(A)　(B)　(C)　(D)

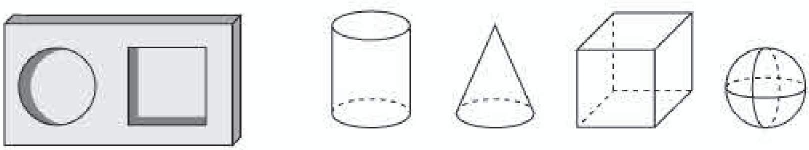
4. 已知一个正五棱柱的俯视图和左视图如图所示，那么它的主视图为（　　）.



俯视图　左视图　(A)　(B)　(C)　(D)

（第4题）

5. 如图是一块带有圆形空洞和方形空洞的小木块，如果以下列物体作为塞子，那么既可以堵住圆形空洞，又可以堵住方形空洞是物体（　　）.

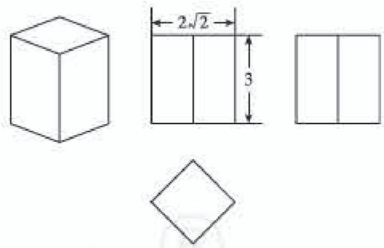


（第5题）　(A)　(B)　(C)　(D)

6. 一个长方体的三视图如图所示，若其俯视图为正方形，则这个长方体的体积为（　　）.

(A) 12　　(B) 16

(C) 18　　(D) 24

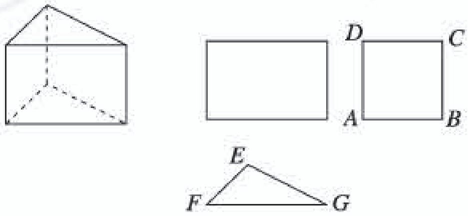


（第 6 题）

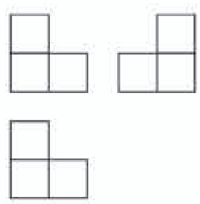
（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. 三视图中的三个视图完全相同的几何体可能是__________（列举出两种即可）.

8. 三棱柱的三视图如图所示，$\triangle EFG$ 中，$EF=8$ cm，$EG=12$ cm，$\angle EGF=30^\circ$，则 AB 的长为______cm.



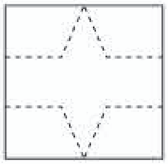
（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图是由几个相同的小立方块组成的三视图，小立方块的个数是________.

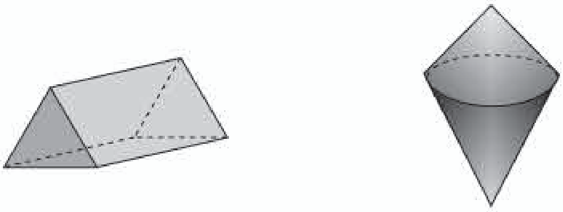
10. 如图，将一张边长为 3 的正方形纸片按虚线裁剪后，恰好围成一个立体图形，那么这个图形是________，它的侧面积为________.



（第 10 题）

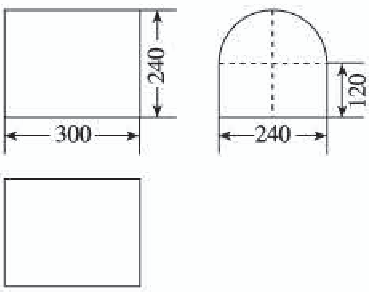
（三）解答题（第 11 题 16 分，第 12，13 题，每题 15 分，共 46 分）

11. 分别画出图中两个几何体（其中第 2 个几何体是两个高不相等的圆锥组成的组合体）的三视图.



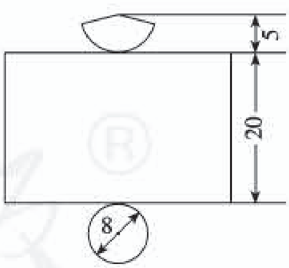
（第 11 题）

12. 某工厂要加工一批无底帐篷，设计者给出了帐篷的三视图. 请你按照三视图确定制作每顶帐篷所需布料的面积（图中尺寸单位：cm).



（第 12 题）

13. 已知某几何体的俯视图是一个圆，下图是这个几何体的展开图（图中尺寸单位：cm)，请求出它的体积，并画出这个几何体的三视图.



（第 13 题）

参考答案

1. B. 本题考查投影的概念.
2. C. 本题考查基本几何体的三视图.
3. C. 本题考查简单组合体的三视图.
4. D. 本题考查三视图与其对应的立体图形的关系.
5. A. 本题考查应用三视图解决简单问题的能力.

6. A. 本题考查三视图与其对应几何体的长、宽、高.

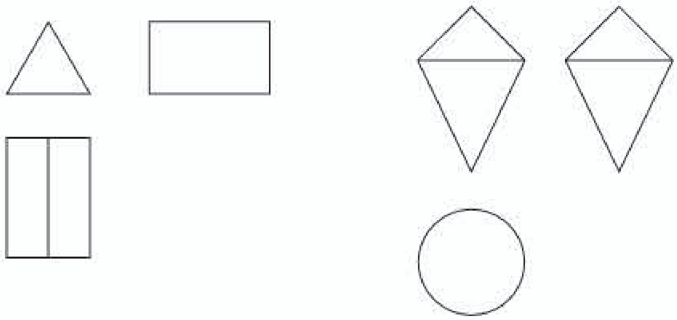
7. 正方体、球体. 本题考查基本几何体的三视图.

8. 6. 本题考查三视图.

9. 4. 本题考查三视图与其对应的立体图形间的联系.

10. 正三棱柱，$9-3\sqrt{3}$. 本题考查展开图与其对应的立体图形间的联系.

11.

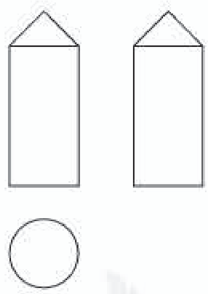


本题考查基本几何体的三视图.

12. $129\ 600+50\ 400\pi\approx287\ 860$ (cm^2). 提示：先由三视图想象出无底帐篷的形状，再画出无底帐篷的展开图，然后通过计算展开图中圆和矩形的面积，得出结果.

本题考查三视图、展开图与立体图形之间的关系.

13. $336\pi\ cm^3$.



提示：先由展开图想象出几何体的形状，知道它是上部分为圆锥，下部分为圆柱的组合体. 由它的俯视图是一个圆可以知道，圆锥的底面积与圆柱的底面积相等，然后通过计算圆锥和圆柱的体积，得出所求结果.

本题考查三视图、展开图与立体图形之间的关系.