义务教育教科书
（五·四学制）

教师教学用书

数学

七年级
下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东

本册主编：薛　彬　雷晓莉　王　冰
主要编者：张劲松　王　嵘　薛　彬　宋莉莉　雷晓莉　吴晓燕　王　冰
贺贤孝　吴增生　王飞兵
责任编辑：李龙才

图书在版编目（CIP）数据

义务教育教科书（五·四学制）教师教学用书．数学．七年级．下册 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．— 北京：人民教育出版社，2013.12
ISBN 978-7-107-27836-5

Ⅰ．①义… Ⅱ．①人… Ⅲ．①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．① G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 012731 号

义务教育教科书（五·四学制）教师教学用书　数学　七年级　下册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　××× 印刷厂
版　　次　2013 年 12 月第 1 版
印　　次　　　年　月第　次印刷
开　　本　787 毫米 ×1 092 毫米　1/16
印　　张　16.5
字　　数　347 千字
定　　价　　　元

说　明

为适应实行五・四学制地区小学、初中数学教学的实际需要，人民教育出版社、课程教材研究所小学和中学数学课程教材研究开发中心以《义务教育数学课程标准（2011 年版）》为依据，在现有的六・三学制《义务教育教科书・数学》（一～九年级）的基础上，对教科书体系进行了适当变动整合，对教科书内容进行了相应调整改编，编写了这套适合五・四学制需要的教科书. 全套书分为八册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体，其中对于“综合与实践”领域的内容，以“课题学习”和“数学活动”等形式分散地编排于各章之中.

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1. 每章开始均用反映本章主要内容的章前图和引言引入本章内容，使学生了解本章内容的概貌，了解本章的主要思想方法和学习方法，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 正文中设置了“思考”“探究”“归纳”等栏目，栏目中以问题、留白或填空等形式引导学生通过观察、分析、猜想、实验、推理、反思、交流等活动获取数学知识，积累学习经验.

3. 适当安排了“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”等选学栏目，为加深学生对相关内容的认识，扩大学生的知识面，运用现代信息技术手段学习等提供资源.

4. 正文的边空设有“小贴士”和“云朵”，“小贴士”介绍与正文内容相关的背景知识，“云朵”中是一些有助于理解正文的问题.

5. 每章安排了几个有一定综合性、实践性、开放性的“数学活动”，体现数学知识的综合应用，可供教师结合相关知识的教学或全章复习时选用.

6. 每章安排了“小结”，包括本章的知识结构图和对本章内容的回顾与思考. “本章知识结构图”体现了本章知识要点、发展脉络和相互联系；“回顾与思考”对本章主要内容及其反映的思想方法进行提炼与概括，并通过在重点、难点和关键环节上提出的有思考力度的具体问题，深化学生对本章核心内容及其反映的数学思想方法的理解.

7. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习题供复习全章时选用. 其中习题、复习题按照习题的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三类.

这套教师教学用书与《义务教育教科书（五・四学制）・数学（六～九年级）》相对应，供教师教学时参考使用. 全套书分为八册，每册书按章编排，每章内容与相应教科书内容对应. 教师教学用书的每一章主要包括以下六部分：

第一部分是总体设计，包括本章学习目标、本章知识结构框图、内容安排、课时安排、编

写本章时考虑的问题、对本章教学的建议等内容.

第二部分是教材分析，这部分含有教科书相应章节的正文，正文旁有教科书正文的注释及教科书中练习的答案和说明，正文下部按小节分条阐述各小节的编写意图，说明本节内容的知识结构、知识点及其发生发展过程（逻辑关系）、重点、学生学习过程中可能出现的困难和问题等.

第三部分是本章习题的参考答案.

第四部分提供了几个教学案例，供教师教学时参考. 每一个教学案例是一个课时的课堂教学设计，内容包括内容和内容解析、目标和目标解析、教学问题诊断分析、教学支持条件分析、教学过程设计、目标检测设计等几方面.

第五部分是拓展资源. 根据每章的教学内容，为教师提供相应的拓展资料，包括知识内容的拓广延伸和相关史料、拓展性问题等.

第六部分是评价建议与测试题. 评价建议从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度等几方面为教师提出本章评价建议，并提供了一套测试题供参考，并说明了每道测试题的设计意图.

本书是七年级下册的教师教学用书，内容包括“二元一次方程组”“不等式与不等式组”“三角形”“全等三角形”“数据的分析”等五章，各章授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第十五章　二元一次方程组	13 课时
第十六章　不等式与不等式组	12 课时
第十七章　三角形	10 课时
第十八章　全等三角形	12 课时
第十九章　数据的分析	13 课时

除已列出的主要编写者外，参加本册教师教学用书编写、讨论的还有曹自由、任子中、孙梅、王伟、赵海英、任韶山、张杰等.

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢.

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2013 年 12 月

目　录

第十五章　二元一次方程组

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 以含有多个未知数的实际问题为背景，经历“分析数量关系→设未知数→列方程组→解方程组和检验结果”的过程，体会方程组是刻画现实世界中含有多个未知数问题的数学模型.

2. 了解二元一次方程及其相关概念，能设两个未知数并列方程组表示实际问题中的等量关系.

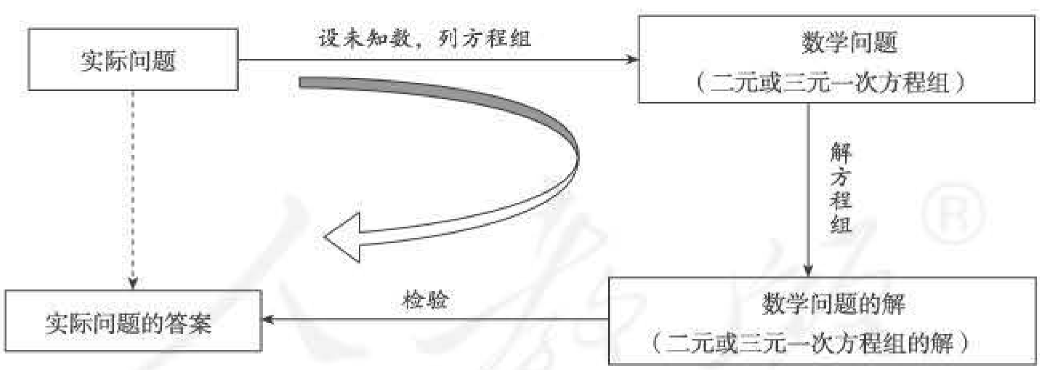
3. 了解解二元一次方程组的基本目标：使方程组逐步转化为 $x=a$，$y=b$ 的形式，体会“消元”思想，掌握解二元一次方程组的方法——代入法和加减法，能根据二元一次方程组的具体形式选择适当的解法.

4. 了解三元一次方程组及其解法，进一步体会“消元”思想，能根据三元一次方程组的具体形式选择适当的解法.

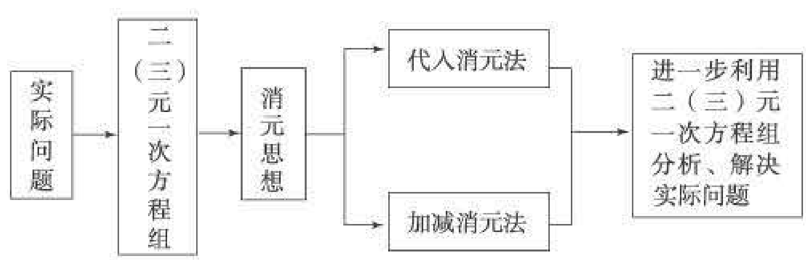
5. 通过探究实际问题，进一步认识利用二（三）元一次方程组解决问题的基本过程，体会数学的应用价值，提高分析问题、解决问题的能力.

二、本章知识结构框图

1. 利用二（三）元一次方程组解决实际问题的基本过程



2. 本章知识的前后顺序



三、内容安排

本章主要内容：二元一次方程组及其相关概念，利用二元一次方程组分析、解决实际问题，消元思想和代入法、加减法解二元一次方程组，以及三元一次方程组的解法.

“15.1　二元一次方程组”首先从一个篮球联赛中的问题入手，引导学生直接设 x 和 y 两个未知数，表示问题中的两个等量关系，得到两个方程. 然后，教科书以这两个方程为例，让学生体验二元一次方程、二元一次方程组的特征，归纳得出二元一次方程组及其解的概念.

“15.2　消元——解二元一次方程组”的标题点出了这一节的核心. 二元一次方程组含有两个未知数，如果消去其中一个未知数，由两个方程得出一个方程，就得到前面已学习过的一元一次方程. 由它可以先解出一个未知数，然后再设法求另一个未知数. 这一节首先从讨论解方程组的需要出发，引导学生从解决问题的基本策略的角度认识消元思想. 然后，教科书讨论了两种通过消元解方程组的方法——代入法和加减法，并结合具体问题用框图形式表示了这两种解法的一般过程.

“15.3　二元一次方程组与实际问题”选择了三个具有一定综合性的问题：“牛饲料问题”“种植计划问题”和“成本与产出问题”. 让学生以方程组为工具进行一定深度的思考，丰富运用方程组解决实际问题的实践，把本章强调的以方程组为工具，把实际问题模型化的思想提到新的高度. 为切实提高利用方程组解决实际问题的能力，这节内容的问题形式包括：估算与精确计算的比较（探究 1），开放地寻求设计方案（探究 2），根据图表所表示的数据信息列方程组（探究 3）. 本节目的在于：一方面通过实际生活中的问题，进一步突出方程组这种数学模型应用的广泛性和有效性；另一方面使学生在实际问题情境中运用所学数学知识，进一步提高分析问题和解决问题的能力.

“15.4　三元一次方程组的解法”的目的是通过解三元一次组方程组进一步体会消元——代入消元、加减消元的思想方法，同时为二次函数中利用待定系数法确定二次函数的解析式做一定的准备. 本节在实际问题的基础上，引入三元一次方程组. 三元一次方程组含有三个未知数，如何消元，先消哪个元是需要认真思考的. 消去其中一个未知数，就得到前面学过的二元一次方程组，把三元一次方程组转化为二元一次方程组，进而转化为一元一次方程. 在求三元一次方程组解的过程中，消元的思想体现得非常充分.

本章在列方程组的讨论中，重视数学与实际的关系，突出其中蕴含的建模思想. 在解方程组的讨论中，重视过程与结果的关系，突出消元、化归思想.

此外，本章对于数学文化也予以关注.“阅读与思考　一次方程组的古今表示及解法”从《九章算术》中有关一次方程组的算筹表示和解法说起，联系现代的矩阵表示和解法，介绍了中国传统数学的光辉成就，感受数学文化的熏陶.

四、课时安排

本章教学约需 13 课时，具体分配如下（仅供参考）：

15.1　二元一次方程组	约 2 课时
15.2　消元——解二元一次方程组	约 4 课时
15.3　二元一次方程组与实际问题	约 3 课时

*15.4　三元一次方程组的解法　　约 2 课时

数学活动

小结　　约 2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 关注实际问题情境，体现数学建模思想

模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径. 本章我们从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，发现和提出问题是数学建模的起点；用二（三）元一次方程组表示数学问题中的数量关系，这是建模最重要的一个环节；求出结果并讨论结果的意义，是建模的目的. 通过“问题情境——建立模型——解释、应用与拓展”的模式展开本章内容的学习，使学生经历数学建模的完整过程.

现实中存在大量问题涉及多个未知数，其中许多问题中的数量关系是一次（也称线性）的，这为学习“二元一次方程组”提供了大量的现实素材. 本章中，实际问题情境贯穿全章，对方程组解法的讨论也是在解决实际问题的过程中进行的. 编写本章时关注二（三）元一次方程组的现实背景，通过大量丰富的实际问题，反映方程组来源自实际又服务于实际，加强对方程组是解决现实问题的一种重要数学模型的认识. 本章明确提出“方程组是解决含有多个未知数问题的重要数学工具”，并在多处体现方程组在解决实际问题中的工具作用，实际上这是在渗透数学模型的思想.

设未知数、列方程组是本章中用数学模型表示和解决实际问题的关键步骤，正确理解问题情境，分析其中的等量关系是设未知数、列方程组的基础. 编写本章时注意从多种角度思考，借助图形、表格、式子等进行分析，寻找等量关系，检验方程的合理性. 利用二（三）元一次方程组解决问题的基本过程（见前面的框图），在本章“小结”中出现，它与“第十一章　一元一次方程”中利用一元一次方程解决问题的基本过程图基本一致. 通过用框图概括这样的基本过程，可以从整体上加强方程（组）模型与实际问题的关系.

2. 注重解法背后的算理，强调消元方法

方程组中含有多个未知数，消元思想——解方程组时“化多为少，由繁至简，各个击破，逐一解决”的基本策略，是产生具体解法的重要基础，而代入法和加减法则是落实消元思想的具体措施. 本章在有关方程组解法的讨论中，注意先使学生了解消元的基本思想，然后在其指导下寻求解决问题的具体方法，从而使具体解法的合理性凸现出来.

在提出消元思想后，教科书对一种具体的消元解法的过程进行了归纳，即对代入法的基本步骤进行概括. 代入法通过“把一个方程（必要时先做适当变形）代入另一个方程”实现消元，注意引导学生认识到为什么要实施这样的步骤，把具体做法与消元结合起来，使学生明确如此操作的目的. 类似地，教科书在两个简单例子之后，对另一种具体的消元解法——加减法的过程进行了归纳. 加减法通过“把两个方程相加减”实现消元，而加减的条件是“两个二元一次方程中同一未知数的系数互为相反数或相等”，同样注意引导学生认识为什么要实施这样的步骤，把具体做法与消元结合起来，使学生明确如此操作的目的性. 教科书还以框图形式表示了两种解法的程序，突出了它们是如何实现消元这一关键步骤的.

加减法和代入法的共同点是，它们都是通过消元解方程组，使二元问题先转化为一元问题，求出一个未知数后再求另一个未知数；它们的不同点是：消元的方法不同，或通过“代入”或通过“加减”. 对一个方程组用哪种消元方法解都可以，但应根据方程组的具体形式选择比较简便的方法. 为使学生认识这些，教科书专门设置了“思考”栏目，让学生逐步积累经验，提高选择能力.

“15.4 三元一次方程组的解法”一节可以使学生更好地体会“消元”的思想方法，并根据三元一次方程组的形式，灵活选择不同的消元方法.

3. 结合具体内容，介绍中国传统数学的成就及其蕴含的数学思想，感受数学文化的熏陶

本套教科书力求能够成为反映科学发展和文化进步的一面镜子，既体现数学的科学性和应用性，又体现数学科学中蕴含的文化. 人们运用方程组解决含有多个未知数的问题已有很长的历史，这个问题对于代数学的发展起了重要的促进作用，现代高等代数中的许多内容都起源于对线性方程组的研究. 中国传统数学在方程及方程组的研究方面也有许多成果，例如，著名的“鸡兔同笼”问题就是可以利用方程组解决的多元问题，《九章算术》等古代数学著作中也记载了有关方程组的一些内容. 它们反映了人类对客观世界中数量关系的不断探究，从中可以看出人类追求真理的长期努力，折射出科学文明的源远流长. 本章对于这方面的内容有所反映，使学生在数学知识和能力方面获得提高，同时，为了传承数学文化，结合方程组的内容进一步挖掘其文化内涵，使学生进一步受到数学文化的熏陶.

六、对本章教学的建议

1. 注意在对方程已有认识基础上的发展，做好从一元到二元、三元以及多元的过渡

本章从一个篮球联赛中的胜负场数问题开始讨论，这个问题中含有两个未知数. 在此之前，学生已经学习过一元一次方程的内容，解决上述问题有两种不同方法：一种方法是，设一个未知数为 x，并用含有 x 的式子表示另一个未知数，根据问题中的等量关系列出一元一次方程；另一种方法是，直接设两个未知数 x 和 y，根据问题中的等量关系列出两个二元一次方程，由它们组成方程组. 比较这两种方法，可以发现，第一种方法的难点在于“列”，第二种方法的难点在于“解”. 列一元一次方程时要综合考虑问题中的各等量关系，因此有一定难度，但是学生已经熟悉一元一次方程的解法；列二元一次方程组时可以分别考虑两个等量关系，分别列出两个方程，一般说这比将这个问题列成一个一元一次方程容易，但是由于方程中出现两个未知数，因此如何解方程组成为新问题. 用方程组解决问题是新方法，这种方法对于解含有多个未知数的问题很有效，并且它的优越性会随着问题中未知数个数的增加体现得更明显. 二元一次方程组是方程组中最基本的类型，通过学习它可以了解一般的一次方程组，提高对多元问题的认识.

由于前面已学一元一次方程的内容，学生对方程有了一定的认识，会用一元一次方程表示问题中的等量关系，并求出它的解. 从解法上说，多元方程消元后要化归为一元方程，因此对一元一次方程的认识为学习二元一次方程组奠定了基础，对二元一次方程组的认识又为学习三元一次方程组奠定了基础. 由“一元”向“二元”“三元”以及“多元”发展的过程中，涉及的实际问题未知数越来越多，数量关系越来越复杂，解法步骤也增加了“消元”和“回代”，更强调未知向已知转化的程序化思想. 本章学习中，应注意所学内容与前面有关内容的联系与区别，明确本章内容的特点，做好从“一元”向“二元”“三元”以及“多元”的转化.

2. **重视解三元以及多元方程组中的消元思想**

本章涉及的数学思想方法主要包括两个：一是由实际问题抽象为方程组这个过程中蕴含的符号化、模型化的思想；二是解方程组的过程中蕴含的消元、化归思想，它在解方程组中具有指导作用. 解二元一次方程组的各个步骤，都是为最终使方程组变形为 $x=a$，$y=b$ 的形式而实施的，即在保持各方程的左右两边相等关系的前提之下，使“未知”逐步转化为“已知”. 解三元以及多元方程组的基本策略是“消元”，即逐步减少未知数的个数，使方程组化归为一元方程，先求出一个未知数，然后逐步求出其他未知数. 代入法和加减法都是消元解方程组的方法，只是具体消元的过程有所不同.

根据方程组的形式，消哪个元，选用哪种消元方法，是本章的难点之一. 教学时要通过一定量的习题训练，让学生逐步克服困难，掌握消元方法.

在本章的教学和学习中，不能仅仅着眼于具体题目的具体解题过程，而应不断加深对以上思想方法的领会，从整体上认识问题的本质. 数学思想方法是通过数学知识的载体来体现的，对于它们的认识需要一个较长的过程，既需要教材的渗透，也需要教师的点拨，最后还需要学生自身的感受和理解. 认识了消元思想，对于代入法、加减法等具体步骤就不会仅是死记硬背，而能够顺势自然地理解，并能够灵活运用. 从这里可以看出，数学思想方法是具体的数学知识的灵魂，数学思想方法对一个人的影响往往要大于具体的数学知识.

3. **加强学习的主动性和探究性**

本章注意加强学生学习的主动性和探究性. 本章内容涉及许多实际问题，多彩的问题情境容易激起学生对数学的兴趣. 在本章的教学中，应注意引导学生从身边的问题研究开始，主动收集、寻找“现实的、有意义的、富有挑战性的”问题作为学习材料，并更多地进行数学活动和互相交流，在主动学习、探究学习的过程中获得知识，培养能力.

对于“15.3　二元一次方程组与实际问题”，应不等同于一般例题内容的教学，而以探究学习的方式完成. 本章“数学活动”及“拓广探索”栏目下的习题等都设置了带有探究性的问题. 对于这些内容的教学，应鼓励学生积极探究，当学生在探究过程中遇到困难时，教师应启发诱导，设计必要的铺垫，让学生在经过自己的努力克服困难的过程中体验如何探究，而不要代替他们思考，不要过早给出答案. 应鼓励学生探究不同的分析、解决问题的方法，使探究过程活跃起来，更好地激发学生积极思维，使他们收获更大.

4. **注重基础知识的掌握，基本能力的提高**

二元一次方程组的基本概念和消元解法是基础知识，通过列、解二元一次方程组分析解决实际问题是基本能力，它们对于解三元一次方程组以及今后进一步学习有重要作用. 教学和学习中应注意打好基础，切实掌握基本方法，并力求能够较灵活地运用它们，逐步提高基本能力. 由于本章多处以分析、解决实际问题为线索展开，而将基础知识寓于分析、解决问题的过程之中，所以教学中应注意对基础知识进行提炼、归纳、整理. 对基础知识和基本能力要有清晰的认识，通过必要的练习使学生掌握基础知识、提高基本能力. 对于代入法和加减法解二元一次方程组的基本过程，可以通过具体案例、结合教科书中的框图帮助他们加深认识，最终切实掌握. 对于教科书中的练习以及“复习巩固”“综合运用”栏目中的题目，应让学生切实掌握. 在此基础上，再让学生探究“拓广探索”栏目中的题目等.

Ⅱ 教材分析

[1] 用一元一次方程可以解决这个问题. 例如，设胜的场数为 x，那么负的场数为 $10-x$，根据题意，可列方程

$$2x+10-x=16.$$

[2] 直接设两个未知数：设胜 x 场、负 y 场，根据问题中的等量关系，容易列出方程

$$x+y=10 \text{ 和 } 2x+y=16.$$

[3] 章前图是篮球比赛的场面，它与引言中的问题呼应. 中学生比较熟悉篮球比赛等体育活动，从这样的实例说起，引入二元一次方程组，使学生感到即将学习的内容与身边的事物有密切的联系，增强求知欲.

[4] 章前图右上方的表格，用 x，y 及含有它们的式子表示篮球联赛问题中的未知数及相关数量：场数和积分. 表格下面是一个二元一次方程组，它表示了问题中的等量关系. 这里用表格和方程组两种不同形式表达同样的内容.

第十五章　二元一次方程组

我们看下面的问题.

篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在 10 场比赛中得到 16 分，那么这个队胜、负场数分别是多少？

在上面的问题中，要求的是两个未知数. 如果用一元一次方程来解决，列方程时，要用一个未知数表示另一个未知数.[1]能不能根据题意直接设两个未知数，使列方程变得容易呢？[2]我们从这个想法出发开始本章的学习.

本章我们将从实际问题出发，认识二元一次方程组，学会解二元一次方程组的方法，并运用二元一次方程组解决一些实际问题. 在此基础上，学习三元一次方程组及其解法，进一步体会消元的思想方法. 通过本章的学习，你将对方程（组）有新的认识.

[4]

	胜	负	合计
场 数	x	y	10
积 分	$2x$	y	16

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16. \end{cases}$$

[3]

1. 方程有广泛的应用，在义务教育阶段数学课程中占有重要地位. 本章在七年级上册“一元一次方程”的基础上进一步讨论方程（组）及其解法.

2. 本章始终在分析、解决实际问题的情境中展开内容，引言中的问题是篮球联赛中的胜负场数问题. 虽然可以用已学的一元一次方程解决，但是直接设两个未知数，列方程组更加直接，本章就从这个想法出发引入新内容.

3. 本章也可以用学生身边的其他实际问题引入. 作为引入二元一次方程组的实际问题，问题情境应该是学生熟悉的，问题中含有两个未知数，直接设未知数 x，y 后，容易列出二元方程表示问题中的等量关系.

4. 本章编写时非常重视以下两点：

（1）实际问题在全章中有重要地位. 方程组概念的引入、方程组解法的讨论等都是在实际问题背景上展开的.

（2）“消元”是方程组解法的基本指导思想.

15.1 二元一次方程组

思考

引言中的问题包含了哪些必须同时满足的条件？设胜的场数是 x，负的场数是 y，你能用方程把这些条件表示出来吗？

由问题知道，题中包含两个必须同时满足的条件：[1]

胜的场数＋负的场数＝总场数，

胜场积分＋负场积分＝总积分.

这两个条件可以用方程

$$x+y=10,$$
$$2x+y=16$$

表示.

这两个方程有什么特点？与一元一次方程有什么关系吗？

上面两个方程中，每个方程都含有两个未知数（x 和 y），并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫做**二元一次方程**[2]（linear equation in two unknowns）.

上面的问题中包含两个必须同时满足的条件，[3]也就是未知数 x，y 必须同时满足方程

$$x+y=10 \quad ①$$

和

$$2x+y=16. \quad ②$$

把这两个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16. \end{cases}$$

就组成了一个**方程组**. 这个方程组中有两个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做**二元一次方程组**[4]（system of linear equations in two unknowns）.

2　第十五章　二元一次方程组

[1] 这里所说的条件是等量关系. 我们用字母表示未知数，用方程表示问题中的等量关系.

[2] 这是二元一次方程的定义. 可以对照一元一次方程的定义，理解这种定义的方式，以及两种方程的区别与联系.

[3] 由于问题中包含两个必须同时满足的等量关系，所以未知数 x，y 必须同时满足方程①②.

[4] 这里先通过描述性语言说明什么是方程组，在此基础上，再给出二元一次方程组的概念.

1. 本节继续以引言中的问题开始，引导学生思考“问题中包含的等量关系”以及“设两个未知数后如何用方程表示等量关系”，然后引导学生列出含有两个未知数的方程，分析其中未知数的特征，得到二元一次方程的定义. 这个定义与一元一次方程的定义类似，两者可以对照. 通过讨论问题，认识到可以用不同方法解决含两个未知数的问题，其中包括直接设各未知数并列出二元方程，对方程的认识从一元方程扩充到二元方程，以至多元方程.

2. 列多元方程也是依据问题中的等量关系，根据需要，方程中含有相关的已知数和多个未知数. 一般地，对含多个未知数的问题，解决它需要同时列多个方程，即分别使用问题中的多个等量关系列多个方程，构成方程组. 本节从篮球联赛问题引出二元一次方程组.

探究[1]

满足方程①，且符合问题的实际意义的 x，y 的值有哪些？把它们填入表中.

x											
y											

上表中哪对 x，y 的值还满足方程②？

由上表可知，$x=0$，$y=10$；$x=1$，$y=9$；…；$x=10$，$y=0$ 使方程 $x+y=10$ 两边的值相等，它们都是方程 $x+y=10$ 的解．如果不考虑方程 $x+y=10$ 与上面实际问题的联系，那么 $x=-1$，$y=11$；$x=0.5$，$y=9.5$；……也都是这个方程的解．

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫做**二元一次方程的解**.[2]

我们还发现，$x=6$，$y=4$ 既满足方程①，又满足方程②．也就是说，$x=6$，$y=4$ 是方程①与方程②的公共解．我们把 $x=6$，$y=4$ 叫做二元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$$

的解．这个解通常记作

$$\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$$

联系前面的问题可知，这个队在 10 场比赛中胜 6 场、负 4 场.

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做**二元一次方程组的解**.[3]

练习

对下面的问题，列出二元一次方程组，并根据问题的实际意义，找出问题的解.

加工某种产品需经两道工序，第一道工序每人每天可完成 900 件，第二道工序每人每天可完成 1 200 件．现有 7 位工人参加这两道工序，应怎样安排人力，才能使每天第一、第二道工序所完成的件数相等？

第十五章　二元一次方程组　3

[1] 探究的目的是让学生通过把具体数代入方程，认识到满足一个二元一次方程的未知数的值有很多对．考虑到问题的实际意义，满足方程①的未知数的值有 11 对，即未知数为0～10的整数.

[2] 二元一次方程的解是满足方程的一对数值，即 $\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}$ 一个二元一次方程有无数多解，并不是说任意一对数值都是它的解.

[3] 二元一次方程组的解，既是方程组中第一个方程的解，又是第二个方程的解.

练习答案

设安排 x 名工人完成第一道工序，y 名工人完成第二道工序．根据题意，得

$$\begin{cases}x+y=7,\\900x=1\,200y.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

3. 二元一次方程的解有以下特点：

(1) 二元一次方程的解是一对数值，即

$$\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}$$

(2) 一个二元一次方程有无数多解，即无数多对数值满足这个二元一次方程.

在教学中引导学生注意这些新变化．需要注意的是，并非任意一对数值都满足一个二元一次方程．实际上，在平面直角坐标系中，以每个二元一次方程的解为坐标的点都在一条直线上，这条直线上有无数个点，每一个点的坐标 (x, y) 都是这个方程的一个解，这条直线外的任意点的坐标都不是这个方程的解.

4. 方程组的解是其中每个方程的公共解．教学中要特别注意“公共解”的含义，即这对数值必须满足方程组中的每一个方程.

习题 15.1

复习巩固

1. 填表，使上下每对 x，y 的值是方程 $3x+y=5$ 的解.[1]

x	-2	0	0.4	2				
y					-0.5	-1	0	3

2. 选择题.

方程组

$$\begin{cases}3x+4y=5,\\-7x+9y=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

的解是（　　）.

(A) $\begin{cases}x=2,\\y=-0.25\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x=-3.5,\\y=4\end{cases}$　(C) $\begin{cases}x=1,\\y=0.5\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=-1,\\y=-0.5\end{cases}$

综合运用

3. 如果三角形的三个内角分别是 $x°$，$y°$，$y°$，求：

(1) x，y 满足的关系式；

(2) 当 $x=90$ 时，y 的值；

(3) 当 $y=60$ 时，x 的值.

4. 我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：[2]“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何.”你能用二元一次方程组表示题中的数量关系吗？试找出问题的解.[3]

拓广探索

5. 把一根长 7 m 的钢管截成 2 m 长和 1 m 长两种规格的钢管，怎样截不造成浪费？你有几种不同的截法？[4]

4　第十五章　二元一次方程组

[1] 由方程 $3x+y=5$ 中一个未知数的值，可以求出对应的另一个未知数的值. 这实际上是解一元一次方程. 设计此题是加深对二元一次方程的解不唯一的认识.

[2]《孙子算经》约成书于公元 4—5 世纪，其中第 35 题即“鸡兔同笼”问题. 它是中国传统数学的经典问题，蕴含丰富的算术、方程思想. 它影响很大，流传甚广，据说日本的“龟鹤算”就是它的变形. 古人解“鸡兔同笼”问题时用了非常巧妙的算术解法，即由 $94\div2-35=12$ 知兔子有 12 只，再由 $35-12=23$ 知鸡有 23 只.

[3] 这里要求根据题意，列出方程组，并尝试得到结果.

[4] 设计这个问题的目的是，本题虽然无法列出二元一次方程组，但是根据问题的实际意义，我们仍然可以直接由二元一次方程，得到问题的答案.

5. 本节练习的要求为列方程组，并尝试得到结果. 目的是使学生进一步熟悉二元一次方程组及其解的概念.

习题 15.1

1. “复习巩固”的题目有两个：(1) 根据表格中的数据，求二元一次方程组的解；(2) 选择题，判断二元一次方程组的解. 目的是复习巩固二元一次方程组的解.

2. “综合运用”的题目为列方程组，并找出问题的解. 设计目的：(1) 培养分析等量关系、列方程组的能力；(2) 培养观察、估算能力；(3) 加深对二元一次方程组及其解的认识.

3. “拓广探索”的题目中有两个未知数，根据等量关系，只能列一个二元一次方程，无法列二元一次方程组. 这时需要结合问题的实际意义：钢管的数量只能为正整数，进行考虑，从而得到问题的答案.

15.2 消元[1]——解二元一次方程组

在 15.1 节中我们已经看到，直接设两个未知数：胜 x 场、负 y 场，可以列方程组$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$表示本章引言中问题的数量关系. 如果只设一个未知数：胜 x 场，那么这个问题也可以用一元一次方程

$$2x+(10-x)=16$$

来解.

思考

上面的二元一次方程组和一元一次方程有什么关系？[2]

我们发现，二元一次方程组中第一个方程 $x+y=10$ 可以写为 $y=10-x$. 由于两个方程中的 y 都表示负的场数，[3]所以，我们把第二个方程 $2x+y=16$ 中的 y 换为 $10-x$，这个方程就化为一元一次方程 $2x+(10-x)=16$. 解这个方程，得 $x=6$. 把 $x=6$ 代入 $y=10-x$，得 $y=4$. 从而得到这个方程组的解.

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化为我们熟悉的一元一次方程. 我们可以先求出一个未知数，然后再求另一个未知数. 这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做**消元**思想.[4]

上面的解法，是把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解. 这种方法叫做**代入消元法**，简称**代入法**[5]（substitution method）.

例 1 用代入法解方程组

$$\begin{cases}x-y=3, & ①\\3x-8y=14. & ②\end{cases}$$

第十五章 二元一次方程组 5

[1] “消元”点出了解二元一次方程组的基本方法. 本节主要内容为二元一次方程组的解法：代入消元法和加减消元法.

[2] 通过观察，可以发现，把方程组中第一个方程变形后代入第二个方程，二元一次方程组就转化为一元一次方程. 这正是下面要讨论的内容.

[3] 同样，两个方程中的 x 都表示胜的场数.

[4] 通过对上面具体方程组的讨论，我们归纳得到“将未知数的个数由多化少、逐一解决”的消元思想. 这是从具体到抽象，从特殊到一般的认识过程. 所谓“消元”就是减少未知数的个数，使多元方程最终转化为一元方程再求解.

[5] 这是对代入法基本步骤的概括，代入法通过“把一个方程（必要时先做适当变形）代入另一个方程”进行等量替换，用含一个未知数的式子表示另一个未知数，从而实现消元.

1. 本节内容为二元一次方程组的解法：代入消元法和加减消元法. “消元”是解二元一次方程组的基本方法. 顾名思义，“消元”就是减少未知数的个数，使多元方程最终转化为一元方程再解出未知数. 本节通过对具体方程组的讨论，先归纳得出“将未知数的个数由多化少、逐一解决”的消元思想，然后在这种思想指导下从具体到抽象，从特殊到一般，逐步认识代入消元法和加减消元法的实施过程.

2. 本节承接上节中的篮球胜、负场数问题，对比列出的二元一次方程组与一元一次方程，发现它们之间的关系，即把方程组中一个方程变形为用含一个未知数的式子表示另一个未知数后，将它代入方程组中另一个方程，原来的二元一次方程组就转化为一元一次方程. 结合这个具体例子，教科书指出这种转化对解二元一次方程组很重要，它的基本思路就是“将未知数的个数由多化少、逐一解决”的消元思想. 消元思想是本节后续内容的基础.

分析：方程①中 x 的系数是 1，用含 y 的式子表示 x，比较简便.

解：由①，得

$$x=y+3. \quad ③$$

把③代入②，[1] 得

$$3(y+3)-8y=14.$$

解这个方程，得

$$y=-1.$$

把 $y=-1$ 代入③，[2] 得

$$x=2.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

把③代入①可以吗？试试看.

把 $y=-1$ 代入①或②可以吗？

例 2 根据市场调查，某种消毒液的大瓶装（500 g）和小瓶装（250 g）两种产品的销售数量（按瓶计算）比为 2∶5.[3] 某厂每天生产这种消毒液 22.5 t，这些消毒液应该分装大、小瓶两种产品各多少瓶？

分析：问题中包含两个条件：

$$\text{大瓶数}:\text{小瓶数}=2:5,$$

$$\text{大瓶所装消毒液}+\text{小瓶所装消毒液}=\text{总生产量}.$$

解：设这些消毒液应该分装 x 大瓶、y 小瓶.

根据大、小瓶数的比，以及消毒液分装量与总生产量的数量关系，得

$$\begin{cases} 5x=2y,^{[4]} & ① \\ 500x+250y=22\ 500\ 000. & ② \end{cases}$$

由①，得

$$y=\frac{5}{2}x.^{[5]} \quad ③$$

把③代入②，得

$$500x+250\times\frac{5}{2}x=22\ 500\ 000.$$

解这个方程，得

6 第十五章 二元一次方程组

[1] 由于方程③由方程①得到，所以它只能代入方程②，而不能代入①. 为使学生认识到这一点，可以让他们试试把③代入①后会出现什么结果.

[2] 得到一个未知数的值后，把它代入方程①②③都能得到另一个未知数的值. 其中代入方程③最简捷.

[3] 两种产品的销售数量比为 2∶5，即销售的大瓶数目与小瓶数目的比为 2∶5. 这里的数目以瓶为单位.

[4] 根据比例的性质：内项的积等于外项的积，由 $x:y=2:5$ 可得 $5x=2y$.

[5] 这是用含 x 的式子表示 y，也可以用含 y 的式子表示 x，得 $x=\frac{2}{5}y$，然后将它代入方程②.

3. 在提出消元思想后，教科书对具体的消元过程进行了归纳，概括了代入法的基本步骤. 代入法是通过“把一个方程（必要时先做适当变形）代入另一个方程”实现消元的方法. 教学中应注意引导学生认识实施这些步骤的依据，把具体做法与消元结合起来，使学生明确操作的目的性.

代入法中把一个未知数替换为含另一个未知数的式子，两者是相等的，这样做的依据是等量代换.

4. 例 1 的目的是巩固对代入法的认识. 虽然前面已有具体例子，但它在归纳之前，而例 1 在归纳之后，可以结合它认识代入法的基本步骤，体会算法思想，并关注具体细节. 例如，例 1 中由于方程③是由方程①得到的，所以它只能代入方程②，而不能代入①，否则会出现不含未知数的恒等式，不能继续解方程. 为使学生认识到这一点，可以让其把③代入①，看会出现什么结果. 通过正反两面的对比，加深理解.

5. 例 2 是一个实际问题，设置的目的是将

[1] 通过一个具体例子，框图展示了代入法的步骤，以及各步骤的作用. 它可以作为代入法解二元一次方程组一般步骤的典型.

[2] 可以先消去 x，具体做法：由①得 $x=\frac{2}{5}y$，再将它代入②.

练习答案

1. (1) $y=2x-3$;
   (2) $y=1-3x$.
2. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}$
   (2) $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$
3. 设有 x 支篮球队和 y 支排球队参赛. 根据题意，得
   $\begin{cases}x+y=48,\\10x+12y=520.\end{cases}$
   解得 $\begin{cases}x=28,\\y=20.\end{cases}$
4. 设骑车用 x h，步行用 y h. 根据题意，得
   $\begin{cases}x+y=1.5,\\15x+5y=20.\end{cases}$
   解得 $\begin{cases}x=\frac{5}{4},\\y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

$x=20\ 000.$

把 $x=20\ 000$ 代入③，得

$y=50\ 000.$

所以这个方程组的解是

$\begin{cases}x=20\ 000,\\y=50\ 000.\end{cases}$

答：这些消毒液应该分装 20 000 大瓶和 50 000 小瓶.

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示：[1]

思考

解这个方程组时，可以先消去 x 吗？试试看.[2]

练习

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式.
(1) $2x-y=3$; (2) $3x+y-1=0$.
2. 用代入法解下列方程组.
(1) $\begin{cases}y=2x-3,\\3x+2y=8;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-y=5,\\3x+4y=2.\end{cases}$
3. 有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛，其中每支篮球队 10 人，每支排球队 12 人，每名运动员只能参加一项比赛. 篮球队、排球队各有多少支参赛？
4. 张翔从学校出发骑自行车去县城，中途因道路施工步行一段路，1.5 h 后到达县城. 他骑车的平均速度是 15 km/h，步行的平均速度是 5 km/h，路程全长 20 km. 他骑车与步行各用多少时间？

列、解二元一次方程组结合起来，体现应用方程组分析、解决问题的全过程，增强应用意识.

例 2 中的两个等量关系为：

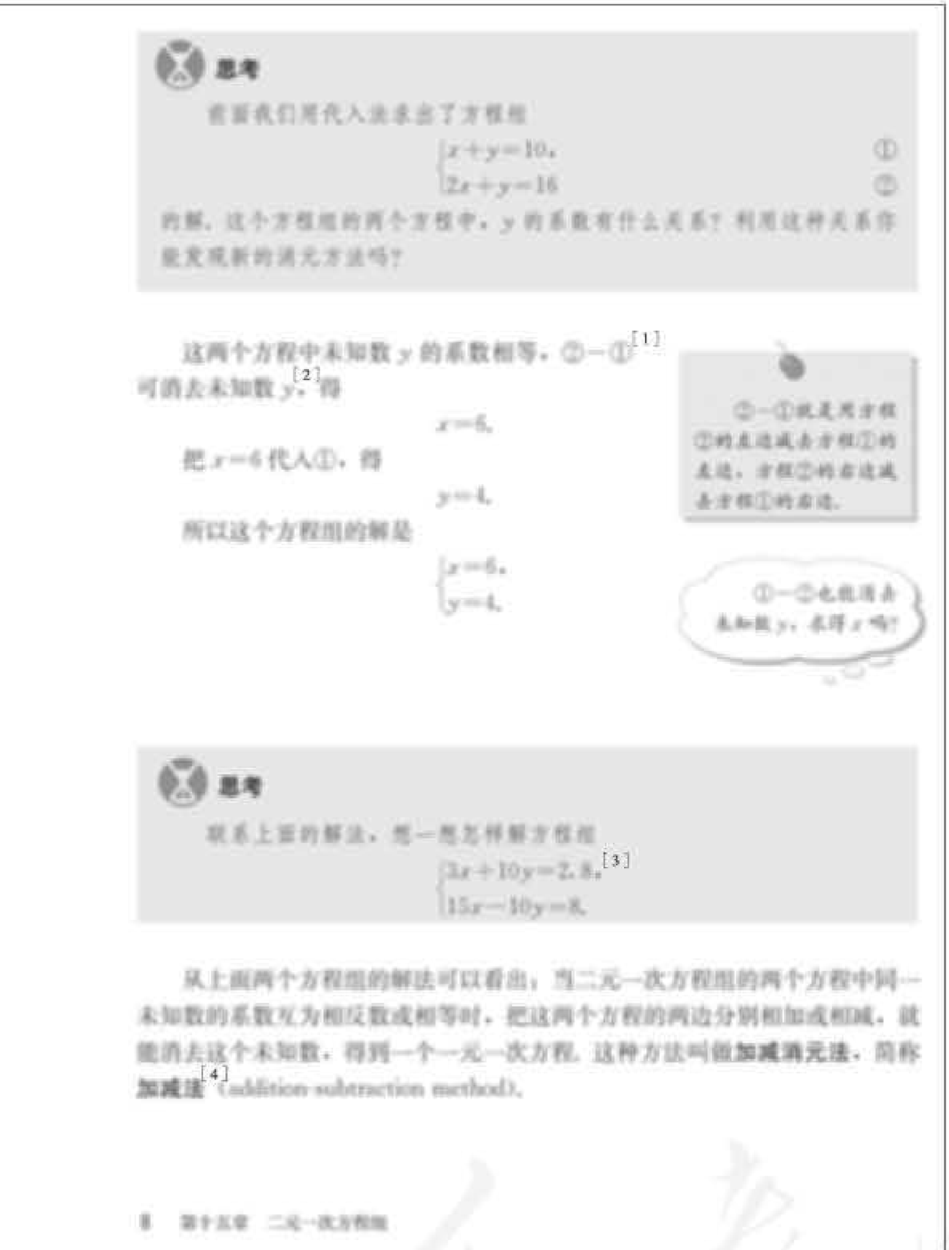
大瓶数∶小瓶数=2∶5，

大瓶所装药量+小瓶所装药量=总生产量.

将这两个等量关系用二元一次方程的形式表示出来，就得到二元一次方程组. 教学中应注意引导学生总结列方程组的一般思路，而不是死记一些题型. 列二元一次方程组时，先找出两个等量关系，然后根据两个等量关系列出两个方程，得到方程组.

6. 例 2 后面的框图不仅展示了代入法解方程组的具体步骤，而且展示了各步骤的作用. 利用框图进行解题后的回顾与反思，很有必要. 一方面，这样做可以渗透算法中程序化的思想；另一方面，它有助于培养良好的学习习惯，提高思考的深度.

7. 本节对加减消元法的讨论仍从方程组


思考

前面我们用代入法求出了方程组

$$\begin{cases}x+y=10, & ①\\ 2x+y=16 & ②\end{cases}$$

的解. 这个方程组的两个方程中，y 的系数有什么关系？利用这种关系你能发现新的消元方法吗？

这两个方程中未知数 y 的系数相等，②－①[1]可消去未知数 y，[2]得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入①，得

$$y=4.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=6,\\ y=4.\end{cases}$$

②－①就是用方程②的左边减去方程①的左边，方程②的右边减去方程①的右边.

①－②也能消去未知数 y，求得 x 吗？

思考

联系上面的解法，想一想怎样解方程组

$$\begin{cases}3x+10y=2.8,\\ 15x-10y=8.\end{cases}$$[3]

从上面两个方程组的解法可以看出，当二元一次方程组的两个方程中同一未知数的系数互为相反数或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程. 这种方法叫做**加减消元法**，简称**加减法**[4](addition-subtraction method).

8 第十五章 二元一次方程组

［1］首先需要明确②－①的意义是什么.

［2］由于两个方程中未知数 y 的系数相同，所以两个方程相减就可以消去 y，②－①，或①－②都行.

［3］由于两个方程中未知数 y 的系数互为相反数，所以两个方程相加就可以消去 y.

［4］这是对加减法基本步骤的概括，加减法通过两个方程相加或相减实现消元. 两方程相加减前应先使要消去的未知数的系数互为相反数或相等，为此需要根据等式的性质（等式两边乘除相等的量，结果仍相等）先进行方程的变形.

$\begin{cases}x+y=10,\\ 2x+y=16\end{cases}$说起. 由于学习了代入法，学生已经能够解这个方程组. 教科书在此基础上提出观察方程组里两个方程中 y 的系数，发现它们之间相等，由此得出新的解法——通过两个方程相减实现消元. 然后，教科书又引导学生对方程组 $\begin{cases}3x+10y=2.8,\\ 15x-10y=8\end{cases}$ 进行类似的思考. 发现两个方程中 y 的系数互为相反数，由此得出新的解法——通过两方程相加实现消元.

上面两个方程组是引出加减法的具体实例，其中未知数的系数互为相反数或相等，是直接使用加减法消元的条件.

8. 教科书在两个简单例子之后，对另一种消元解法——加减法的过程进行了归纳. 加减法通过“把两个方程相加减”实现消元，加减的条件是“两个二元一次方程中同一未知数的系数互为相反数或相等”. 教学中要引导学生认识为什

[1] 由于两个方程中同一未知数的系数既不互为相反数也不相等，所以不能直接通过加减来消元. 为了消元，需要在方程两边乘适当的数，使同一未知数在两个方程中的系数互为相反数或相等.

[2] 如果先消去 x，可以①×5−②×3. 解方程组时，先消去哪个未知数都可以，结果是确定的，不会因先消去哪个未知数而产生变化. 一般地，先消去哪个未知数简便就先消去哪个.

[3] hm^2 表示公顷.

[4] $2x+5y$.

[5] $3x+2y$.

例 3 用加减法解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=16, & ①\\ 5x-6y=33. & ②\end{cases}$$

分析： 这两个方程中没有同一个未知数的系数互为相反数或相等，直接加减这两个方程不能消元. 我们对方程变形，使得这两个方程中某个未知数的系数互为相反数或相等.[1]

解： ①×3，得

$$9x+12y=48. \quad ③$$

②×2，得

$$10x-12y=66. \quad ④$$

③+④，得

$$19x=114,$$
$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入①，得

$$3\times6+4y=16,$$
$$4y=-2,$$
$$y=-\frac{1}{2}.$$

把 $x=6$ 代入②可以解得 y 吗？

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=6,\\ y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

如果用加减法消去 x 应如何做？解得的结果一样吗？[2]

例 4 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 h 共收割小麦 3.6 hm^2，[3] 3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 h 共收割小麦 8 hm^2. 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦多少公顷？

分析： 如果 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2，那么 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦______[4] hm^2，3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦______[5] hm^2. 由此得到两个相等关系，列出方程组.

解： 设 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2.

根据两种工作方式中的相等关系，得方程组

第十五章 二元一次方程组 9

么要实施这样的步骤，把具体做法与消元结合起来，使学生明确操作的目的性.

加减法的依据是等式的性质，即“等式两边都加（减）相等的量，结果仍相等.”

9. 例 3 给出的方程组不能直接通过加减两个方程消元，因为同一未知数的系数既不互为相反数又不相等. 因此，加减两个方程之前，先对方程变形，使其满足条件. 具体做法是在方程两边乘适当的数，使同一未知数在两个方程中的系数互为相反数或相等. 类比通分等以前学过的知识，学生容易想到或接受这样的变形. 这样做的依据也是等式的性质“等式两边乘同一个数，结果仍相等”.

10. 例 4 是收割机工作效率问题，设置的目的是将列、解二元一次方程组结合起来，体现应用方程组分析、解决问题的全过程，增强应用意识，同时加深和巩固对加减法解二元一次方程组的认识.

$$\begin{cases}2(2x+5y)=3.6,\\5(3x+2y)=8.\end{cases}$$

去括号，得

$$\begin{cases}4x+10y=3.6, & ①\\15x+10y=8. & ②\end{cases}$$

②－①，得

$$11x=4.4.$$

解这个方程，得

$$x=0.4.$$

把 $x=0.4$ 代入①，得

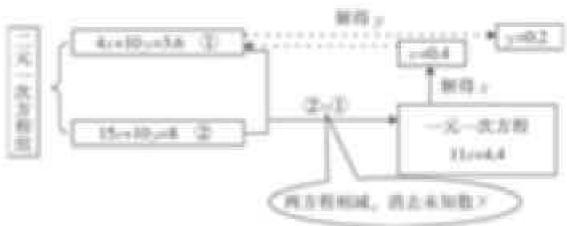
$$y=0.2.$$

因此，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=0.4,\\y=0.2.\end{cases}$$

答：1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 0.4 hm^2 和 0.2 hm^2.

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示.[1]



练习

1. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y=9,\\3x-2y=-1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}5x+2y=25,\\3x+4y=15;\end{cases}$

10 第十五章 二元一次方程组

［1］通过一个具体例子，框图展示了加减法的步骤，以及各步骤的作用. 它可以作为加减法解二元一次方程组的一般步骤的典型.

练习答案

1. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=\dfrac{7}{2};\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=5,\\y=0;\end{cases}$

为表示问题中的两个等量关系，教科书在分析过程中设置了两个填空，要求学生用含 x，y 的式子表示相关的量. 能够正确表示这些量就具有了列相应二元一次方程组的基础. 此题中，“工作量＝工作效率×工作时间”是基本的等量关系.

11. 解例 4 中的方程组，可以用代入法或加减法. 由于这里刚刚学习加减法，为巩固新知识，应先考虑用加减法.

类似于前面的例 2，例 4 后面的框图不仅展示了加减法解这个方程组的具体步骤，而且展示了各步骤的作用. 教学中可以引导学生利用这个框图进行解题后的回顾与反思.

12. 加减法和代入法的共同点是，它们都是通过消元解方程组，使二元问题先转化为一元问题，求出一个未知数后再求另一个未知数；它们的不同点是，消元的方法不同，或通过“代入”或通过“加减”. 对一个方程组用哪种消元方法解都可以，应根据方程组的形式选择比较简便的

练习答案

(3) $\begin{cases} x=\dfrac{9}{11}, \\ y=\dfrac{14}{11}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=\dfrac{6}{13}, \\ y=\dfrac{22}{13}. \end{cases}$

2. 设轮船在静水中的速度为 x km/h，水的流速为 y km/h. 根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=20, \\ x-y=16. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=18, \\ y=2. \end{cases}$

3. 设每节火车车厢平均装 x t 化肥，每辆汽车平均装 y t 化肥. 根据题意，得

$$\begin{cases} 6x+15y=360, \\ 8x+10y=440. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=50, \\ y=4. \end{cases}$

[1] 加减法和代入法都是通过消元解方程组，对一个方程组用哪种方法解都可以. 应根据具体方程组选择简便的方法. 此处第一个方程组用代入法简便，第二个方程组用加减法简便.

(3) $\begin{cases} 2x+5y=8, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x-2y=-2. \end{cases}$

2. 一条船顺流航行，每小时行 20 km；逆流航行，每小时行 16 km. 求轮船在静水中的速度与水的流速.

3. 运输 360 t 化肥，装载了 6 节火车车厢和 15 辆汽车；运输 440 t 化肥，装载了 8 节火车车厢和 10 辆汽车. 每节火车车厢与每辆汽车平均各装多少吨化肥？

代入消元法和加减消元法是二元一次方程组的两种解法，它们都是通过消元使方程组转化为一元一次方程，只是消元的方法不同. 我们应根据方程组的具体情况，选择适合它的解法.

思考

(1) 你怎样解下面的方程组？[1]

$\begin{cases} 2x+y=1.5, \\ 0.8x+0.6y=1.3; \end{cases}$　　$\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

(2) 选择你认为简便的方法解习题 15.1 中的第 4 题（“鸡兔同笼”问题）.

习题 15.2

复习巩固

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

(1) $\dfrac{3}{2}x+2y=1$；　　(2) $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}y=2$；

(3) $5x-3y=x+2y$；　　(4) $2(3y-3)=6x+4$.

2. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+3, \\ 7x+5y=9; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3s-t=5, \\ 5s+2t=15; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+y=15, \\ 3x-2y=3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 4(x+2)+5y=1, \\ 2x+3(y+2)=3. \end{cases}$

方法. 为使学生认识这些，要引导他们用不同方法解同一个方程组，然后对不同方法加以比较，逐步积累经验，提高选择能力.

习题 15.2

1. “复习巩固”中的第 1 题是为代入法作准备的. 第 2，3 题分别为巩固代入法、加减法解二元一次方程组而设置，根据实际需要可以适当补充此类题目. 第 4 题是简单的应用问题，解此题时需要完成设未知数、列方程组、解方程组等全过程.

2. “综合运用”中的第 5 题是解二元一次方程组. 这些方程形式比较复杂，需要先整理后再选择适当解法. 其余各题都是实际问题，要解决这些问题，需要经历“弄清题意→分析数量关系→设未知数→列方程组和解方程组”等过程. 通过完成这部分习题，使学生熟悉上述过程，掌握解题的程序，不断提高分析、解决问题的能力.


3. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3u+2t=7,\\6u-2t=11;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2a+b=3,\\3a+b=4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x-5y=-3,\\-4x+y=-3;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-1,\\2x+y=3.\end{cases}$

4. 某班去看演出，甲种票每张 24 元，乙种票每张 18 元. 如果 35 名学生购票恰好用去 750 元，甲、乙两种票各买了多少张？

综合运用

5. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3(x-1)=y+5,\\5(y-1)=3(x+5);\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\frac{2u}{3}+\frac{3v}{4}=\frac{1}{2},\\\frac{4u}{5}+\frac{5v}{6}=\frac{7}{15}.\end{cases}$

6. 某旅行社组织 200 人到花果岭和云水洞旅游，到花果岭的人数比到云水洞的人数的 2 倍少 1，到两地旅游的人数各是多少？

7. 小方、小程两人相距 6 km，两人同时出发相向而行，1 h 相遇；同时出发同向而行，小方 3 h 可追上小程. 两人的平均速度各是多少？[1]

8. 一种商品有大、小盒两种包装，3 大盒、4 小盒共装 108 瓶，2 大盒、3 小盒共装 76 瓶. 大盒与小盒每盒各装多少瓶？

拓广探索

9. 一个长方形的长减少 5 cm，宽增加 2 cm，就成为一个正方形，并且这两个图形的面积相等. 这个长方形的长、宽各是多少？[2]

12 第十五章 二元一次方程组

[1] 注意问题中“相向而行”与“同向而行”的含义. 分析这类问题时，借助示意图有助于问题的解决.

[2] 由此题的解答可以发现，面积相等的正方形和长方形相比，正方形的周长小于长方形的周长. 从另一个角度讲，周长相等的长方形和正方形相比，正方形的面积大于长方形的面积. 在数学上，通常把这类问题称为等积（或等周）问题.

解方程组时，具体使用代入法还是加减法，根据所列方程组的形式确定.

3. “拓广探索”第 9 题中，等量关系涉及长方形的边长、面积等关系. 列出的方程虽然从形式上看含 xy 的项，不符合二元一次方程的要求，但是可以化简这样的方程，消去含 xy 的项，得到二元一次方程组. 通过本题，可以使学生进一步认识解方程（组）之前整理化简的作用.

4. 本节重点是二元一次方程组的解法，但是教科书不是单纯讨论解法，而是结合一些实际问题的解决过程讨论解法，在习题设计上也保持了这个特点.

[1] 本节正文有三个探究问题，学生先独立探究，然后合作交流.

[2] 估算有很强的实用价值，要结合具体问题，培养学生的估算能力. 估算会产生一定误差，通过精算可以对估算结果进行检验.

[3] $\begin{cases}30x+15y=675,\\42x+20y=940.\end{cases}$

[4] $\begin{cases}x=20,\\y=5.\end{cases}$

[5] 20，5. 较准确，偏高.

[6] 问题要达到的结果是“甲、乙两种作物的总产量的比是 3∶4”，为达到这一点需要确定两个长方形.

15.3 二元一次方程组与实际问题

前面我们讨论了二元一次方程组的解法，并用二元一次方程组解决了一些实际问题. 本节我们继续探究如何用二元一次方程组解决实际问题. 同学们可以先独立分析问题中的数量关系，列出方程组，得出问题的解答，然后再互相交流.[1]

探究 1

养牛场原有 30 头大牛和 15 头小牛，1 天约用饲料 675 kg；一周后又购进 12 头大牛和 5 头小牛，这时 1 天约用饲料 940 kg. 饲养员李大叔估计每头大牛 1 天约需饲料 18～20 kg，每头小牛 1 天约需饲料 7～8 kg. 你能通过计算检验他的估计吗？[2]

分析：设每头大牛和每头小牛 1 天各约用饲料 x kg 和 y kg.

根据两种情况的饲料用量，找出相等关系，列方程组

$$\begin{cases}\underline{\qquad\qquad\qquad},\\\underline{\qquad\qquad\qquad}.\end{cases}$$ [3]

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=\underline{\qquad\qquad},\\y=\underline{\qquad\qquad}.\end{cases}$$ [4]

这就是说，每头大牛 1 天约需饲料________kg，每头小牛 1 天约需饲料______kg. 因此，饲养员李大叔对大牛的食量估计______，对小牛的食量估计______.[5]

探究 2

据统计资料，甲、乙两种作物的单位面积产量的比是 1∶2. 现要把一块长 200 m、宽 100 m 的长方形土地，分为两块小长方形土地，分别种植这两种作物. 怎样划分这块土地，使甲、乙两种作物的总产量的比是 3∶4？[6]

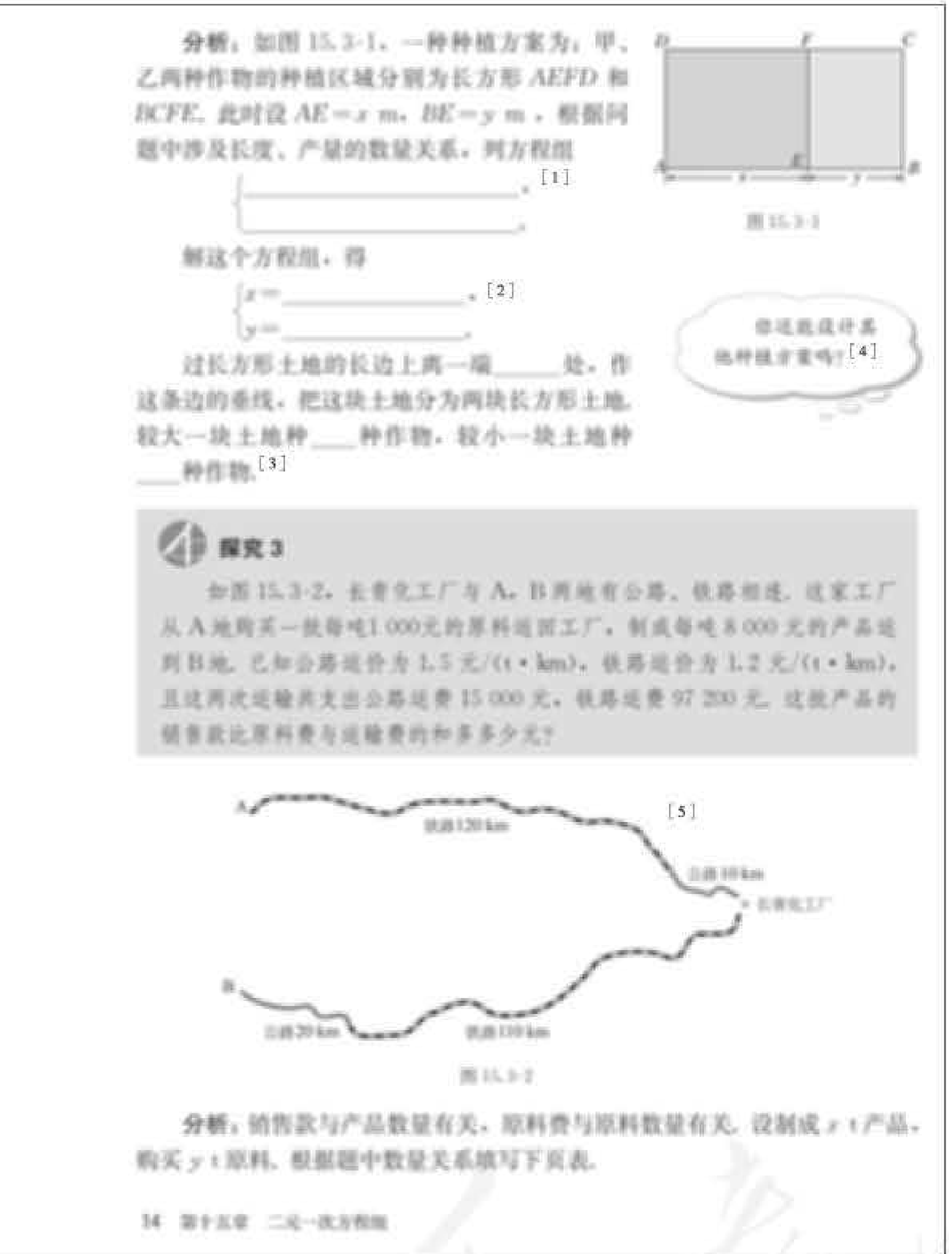
1. 本节主要目的：在探究如何用二元一次方程组解决实际问题的过程中，进一步提高分析问题中的等量关系、设未知数、列方程组、解方程组的能力.

2. 本节共安排了三个实际问题，分析、解决这些问题的难度比以前的问题要大. 对于这些问题，教学中应发挥学生自主学习的积极性，引导学生先独立探究，再进行合作交流.

3. “探究 1”是有关牛饲料的问题. 事实上每头牛所需的饲料量有差别，为使问题便于分析解决，考虑的是平均每头大牛 1 天所需饲料和平均每头小牛 1 天所需饲料. 问题设置了饲养员根据经验估计饲料量的情境，并以检验这个估计作为问题. 为此需要借助二元一次方程组进行计算.

4. “探究 1”的问题中，原来 1 天所需饲料量和后来 1 天所需饲料量各自对应不同的大牛数和小牛数，由此得到方程组

$$\begin{cases}30x+15y=675,\\42x+20y=940.\end{cases}$$


分析：如图 15.3-1，一种种植方案为：甲、乙两种作物的种植区域分别为长方形 $AEFD$ 和 $BCFE$. 此时设 $AE=x$ m，$BE=y$ m，根据问题中涉及长度、产量的数量关系，列方程组

$$\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$$ [1]

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=\_\_\_\_\_\_, \\ y=\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$$ [2]

过长方形土地的长边上离一端_____处，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地. 较大一块土地种____种作物，较小一块土地种____种作物.[3]

图 15.3-1

你还能设计其他种植方案吗？[4]

探究 3

如图 15.3-2，长青化工厂与 A，B 两地有公路、铁路相连. 这家工厂从 A 地购买一批每吨 1 000 元的原料运回工厂，制成每吨 8 000 元的产品运到 B 地. 已知公路运价为 1.5 元/(t·km)，铁路运价为 1.2 元/(t·km)，且这两次运输共支出公路运费 15 000 元，铁路运费 97 200 元. 这批产品的销售款比原料费与运输费的和多多少元？

图 15.3-2

分析：销售款与产品数量有关，原料费与原料数量有关. 设制成 x t 产品，购买 y t 原料. 根据题中数量关系填写下页表.

14　第十五章　二元一次方程组

[1]

$$\begin{cases}x+y=200, \\ 100x:(2\times100y)=3:4,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+y=200, \\ 3\times(2\times100y)=4\times100x.\end{cases}$$

[2] $\begin{cases}x=120, \\ y=80.\end{cases}$

[3] 120 m，甲，乙.

[4] 还有其他方案，例如画出与这块土地的长边平行的一条线，将这块土地分割为两个长方形. 这条直线的具体确定方法，可以通过列、解方程组，由方程组的解得出.

本题是一道开放题，答案不唯一.

[5] 图形及标注的数据也是给出已知条件的方式.

其中 x，y 分别是每头大牛和每头小牛 1 天的饲料用量. 解方程组得 x，y 的值分别为 20 和 5. 对照饲养员的估计，可以得出检验结果.

5. “探究 2”是一个开放问题，解决方法不止一种. 通过此题让学生体会一题多解的问题情境，从多种角度考虑问题.

分析本问题时注意下面两点：

(1) 要把这块地分为两个长方形；

(2) 两块地分别种甲、乙两种作物，它们的产量比是 3 : 4.

首先考虑第一个要求，容易想到划分的方法是沿这块土地的边的方向画线. 在此基础上，考虑第二个要求，这与长方形面积以及两种作物的产量比有关. 通过以上分析，列出方程组

$$\begin{cases}x+y=200, \\ 100x:(2\times100y)=3:4.\end{cases}$$

解方程组，得到问题的答案.

另一种方法与上面类似.

[1]（横排）

$1.5\times20x$，$1.5\times10y$，

$1.5\times(20x+10y)$；

$1.2\times110x$，$1.2\times120y$，

$1.2\times(110x+120y)$；

$8\ 000x$，$1\ 000y$.

[2] 产品销售款－（原料费＋运输费），x（产品数量），y（原料数量）

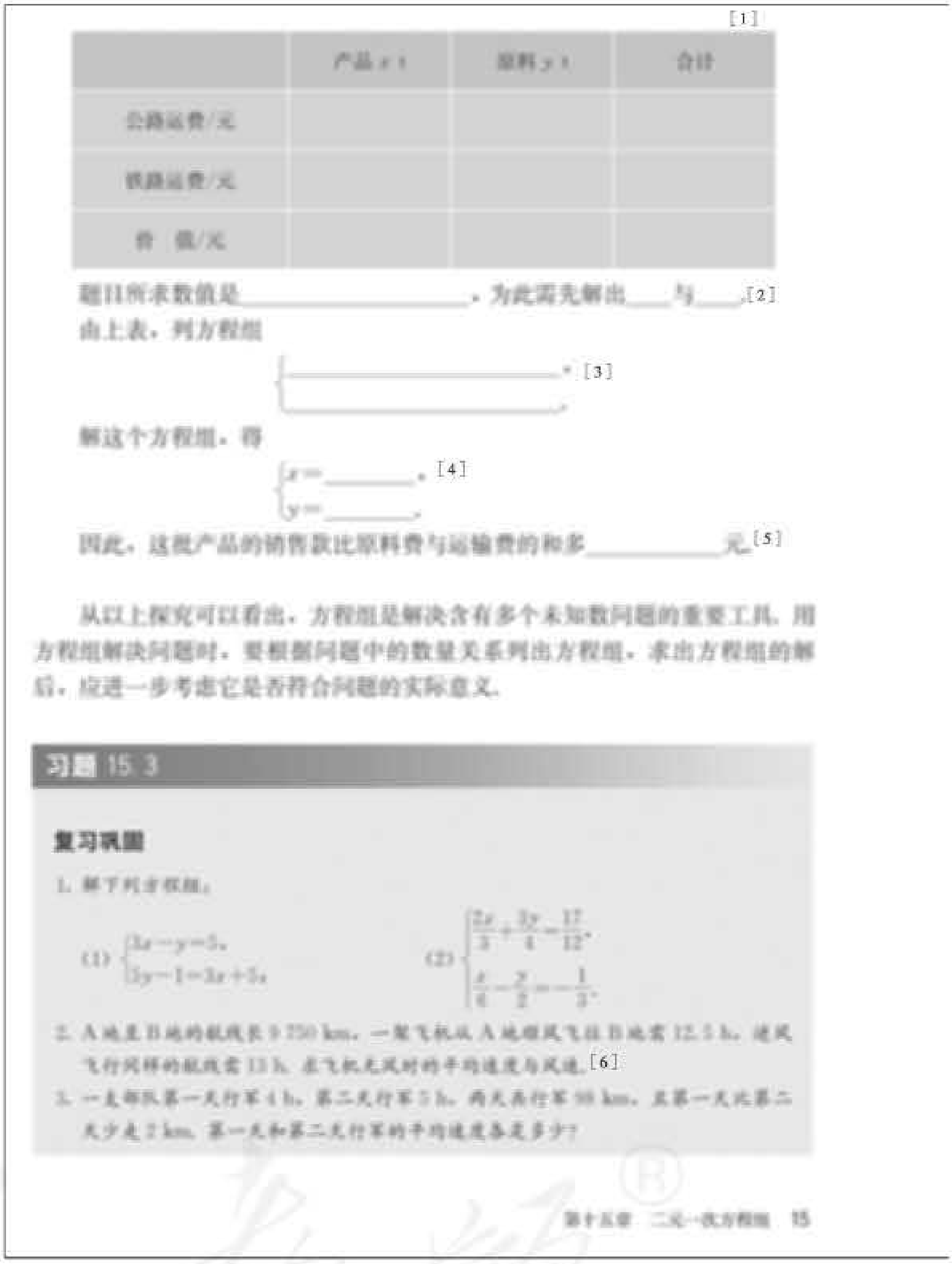
[3]

$$\begin{cases}1.5\times(20x+10y)=15\ 000,\\1.2\times(110x+120y)=97\ 200.\end{cases}$$

[4] $\begin{cases}x=300,\\y=400.\end{cases}$

[5] 1 887 800.

[6] 本题中假设风速恒定.



	产品 x t	原料 y t	合计
公路运费/元			
铁路运费/元			
价 值/元			

题目所求数值是______，为此需先解出____与____.[2]

由上表，列方程组

$$\begin{cases}\_\_\_\_\_\_,\\\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$$ [3]

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=\_\_\_\_,\\y=\_\_\_\_.\end{cases}$$ [4]

因此，这批产品的销售款比原料费与运输费的和多______元.[5]

从以上探究可以看出，方程组是解决含有多个未知数问题的重要工具. 用方程组解决问题时，要根据问题中的数量关系列出方程组，求出方程组的解后，应进一步考虑它是否符合问题的实际意义.

习题 15.3

复习巩固

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-y=5,\\5y-1=3x+5;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\frac{2x}{3}+\frac{3y}{4}=\frac{17}{12},\\\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

2. A 地至 B 地的航线长 9 750 km，一架飞机从 A 地顺风飞往 B 地需 12.5 h，它逆风飞行同样的航线需 13 h. 求飞机无风时的平均速度与风速.[6]

3. 一支部队第一天行军 4 h，第二天行军 5 h，两天共行军 98 km，且第一天比第二天少走 2 km. 第一天和第二天行军的平均速度各是多少？

第十五章 二元一次方程组 15

6. “探究 3”要得到的答案是一个数值，但是，直接设这个数值为未知数列方程不容易. 为此，我们设间接未知数，即先设产品数量和原料数量分别为 x t，y t，解出它们后再计算问题所要得到的答案.

7. “探究 3”中的一些条件用示意图给出，这种表达形式比较简明. 通过分析这个问题，可以培养学生从图表获取信息的能力. 本题设置了一个表，通过填表对有关数量进行整理，发现等量关系，列出方程组

$$\begin{cases}1.5\times(20x+10y)=15\ 000,\\1.2\times(110x+120y)=97\ 200.\end{cases}$$

解出 x，y 后，再代入式子 $8\ 000x-1\ 000y-15\ 000-97\ 200$ 求值.

通过“探究 3”可以使学生进一步感受设间接未知数迂回解决问题的策略.

综合运用

4. 用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可制盒身 25 个或盒底 40 个，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒. 现有 36 张白铁皮，用多少张制盒身，多少张制盒底可以使盒身与盒底正好配套？[1]
5. 有大小两种货车，2 辆大货车与 3 辆小货车一次可以运货 15.5 t，5 辆大货车与 6 辆小货车一次可以运货 35 t. 3 辆大货车与 5 辆小货车一次可以运货多少吨？
6. 从甲地到乙地有一段上坡与一段平路. 如果保持上坡每小时走 3 km，平路每小时走 4 km，下坡每小时走 5 km，那么从甲地到乙地需 54 min，从乙地到甲地需 42 min. 甲地到乙地全程是多少？[2]
7. 用含药 30% 和 75% 的两种防腐药水，配制含药 50% 的防腐药水 18 kg，两种药水各需多少千克？[3]

拓广探索

8. 打折前，买 60 件 A 商品和 30 件 B 商品用了 1 080 元，买 50 件 A 商品和 10 件 B 商品用了 840 元. 打折后，买 500 件 A 商品和 500 件 B 商品用了 9 600 元，比不打折少花多少钱？[4]
9. 某家商店的账目记录显示，某天卖出 39 支牙刷和 21 盒牙膏，收入 396 元；另一天，以同样的价格卖出同样的 52 支牙刷和 28 盒牙膏，收入 518 元. 这个记录是否有误？请说明理由.[5]

16 第十五章 二元一次方程组

[1] 当盒底数量是盒身数量的 2 倍时，两者正好配套.

[2] 如果从甲到乙时有一段上坡，那么从乙到甲时这段上坡就变成了下坡. 求出这段坡路和这段平路的长度，就可求出甲、乙间的路长.

[3] 含药百分比 $= \dfrac{\text{药的质量}}{\text{药水的质量}} \times 100\%$，例如，含药 30% 的药水 100 kg 中，药的质量为 30 kg，药水的质量为 100 kg.

[4] 先求出打折前两种商品的单价，然后再求题目中要求的数据.

[5] 两种商品的价格保持不变，由此可以列出方程组，求出这些价格. 根据结果是否合理判断账目是否有误.

习题 15.3

1. “复习巩固”中的第 1 题是为巩固代入法、加减法解二元一次方程组而设置的.

第 2，3 题是行程问题，“路程＝速度×时间”是问题中的基本等量关系.

2. “综合运用”中的第 4 题是成龙配套问题，应抓住盒身与盒底之间的比例关系；第 5 题是运输问题，第 6 题是行程问题，第 7 题是溶液问题. 虽然不同问题中有各自的数量关系，但应抓住问题中的等量关系，关注解这些问题时共同需要的灵活分析问题的能力，熟练掌握设未知数、列方程组、解方程组、检验答案等全过程.

3. “拓广探索”中的第 8 题是购物问题，需要设间接未知数，然后代入表示问题答案的式子求值. 第 9 题是判断题中信息是否准确的问题，可以通过列方程组求出有关量，然后根据这些量是否合理对题中信息进行判断.

[1] 引例非常简单，主要目的是引出三元一次方程和三元一次方程组.

[2] 类比二元一次方程组的概念，给出三元一次方程组的概念.

[3] 类比二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法，让学生尝试用这两种方法解三元一次方程组.

*15.4 三元一次方程组的解法

前面我们学习了二元一次方程组及其解法——消元法. 有些有两个未知数的问题，可以列出二元一次方程组来解决. 实际上，有不少问题含有更多未知数. 我们看下面的问题：

小明手头有 12 张面额分别为 1 元、2 元、5 元的纸币，共计 22 元，其中 1 元纸币的数量是 2 元纸币数量的 4 倍. 求 1 元、2 元、5 元纸币各多少张.[1]

自然的想法是，设 1 元、2 元、5 元的纸币分别为 x 张、y 张、z 张，根据题意，可以得到下面三个方程：

$$x+y+z=12,$$
$$x+2y+5z=22,$$
$$x=4y.$$

这个问题的解必须同时满足上面三个条件，因此，我们把这三个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ x+2y+5z=22, \\ x=4y. \end{cases}$$

这个方程组含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是 1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做**三元一次方程组**.[2]

怎样解三元一次方程组呢？我们知道，二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，化成一元一次方程求解. 那么，能不能用同样的思路，用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，把它化成二元一次方程组呢？[3]

让我们看前面列出的三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=12, & ① \\ x+2y+5z=22, & ② \\ x=4y. & ③ \end{cases}$$

仿照前面学过的代入法，我们可以把③分别代入①②，得到两个只含 y，

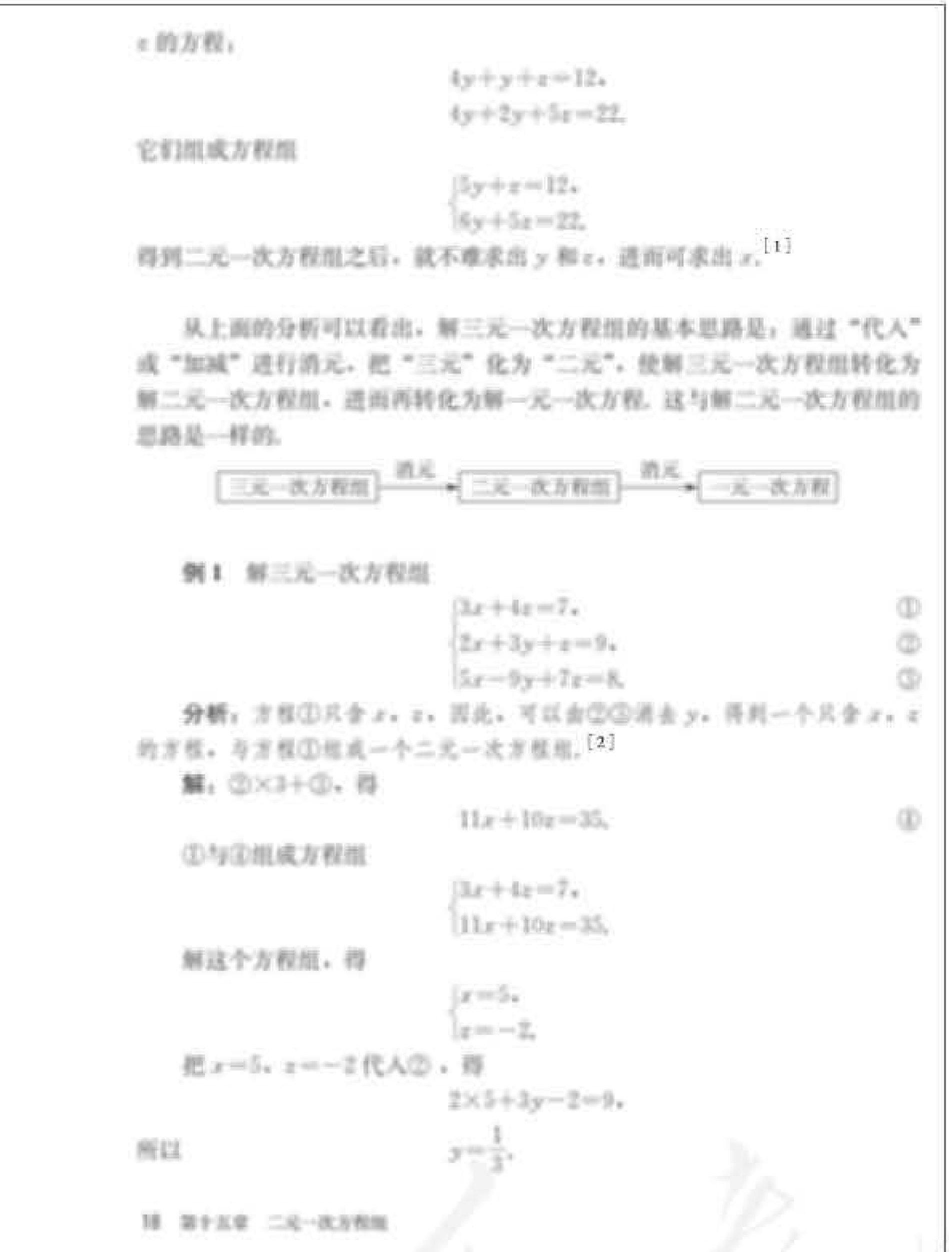
* 本节内容为选学内容.

第十五章 二元一次方程组 17

1. 从本节的标题不难看出，本节侧重通过具体的三元一次方程组讲述它的解法. 同二元一次方程组的解法一样，三元一次方程组的解法仍然是消元. 通过消元，把三元一次方程组转化为二元一次方程组，进而转化为一元一次方程，最后得到三元一次方程组的解.

2. 三元一次方程是代数方程的一种. 代数方程一般按照其中未知数（元）的个数和未知数的项的最高次数（指数）分类. 二元一次方程组是最简单的多元（未知数不止 1 个）一次方程组，通过对它的学习，可以了解三元一次方程组以及多元一次方程组的概念和解法. 本节在二元一次方程组解法的基础上，学习三元一次方程组的解法.

3. 与引入二元一次方程组时，类比一元一次方程类似，我们在引入三元一次方程组时，类比二元一次方程组：类比方程组的形式和解法. 按照“实际问题——建立模型（三元一次方程



z 的方程，

$$4y+y+z=12,$$
$$4y+2y+5z=22.$$

它们组成方程组

$$\begin{cases}5y+z=12,\\6y+5z=22.\end{cases}$$

得到二元一次方程组之后，就不难求出 y 和 z，进而可求出 x.[1]

从上面的分析可以看出，解三元一次方程组的基本思路是：通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 这与解二元一次方程组的思路是一样的.

$$\boxed{\text{三元一次方程组}}\xrightarrow{\text{消元}}\boxed{\text{二元一次方程组}}\xrightarrow{\text{消元}}\boxed{\text{一元一次方程}}$$

例 1 解三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7, & ①\\2x+3y+z=9, & ②\\5x-9y+7z=8. & ③\end{cases}$$

分析：方程①只含 x，z，因此，可以由②③消去 y，得到一个只含 x，z 的方程，与方程①组成一个二元一次方程组.[2]

解：②×3+③，得

$$11x+10z=35. \qquad ④$$

①与④组成方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7,\\11x+10z=35.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=5,\\z=-2.\end{cases}$$

把 $x=5$，$z=-2$ 代入②，得

$$2\times5+3y-2=9,$$

所以 $$y=\frac{1}{3}.$$

18 第十五章 二元一次方程组

[1] 解三元一次方程组主要是把它转化为二元一次方程组，进而转化为一元一次方程.

[2] 观察三元一次方程组中三个三元一次方程系数的特点，然后选择用代入消元法还是加减消元法.

组）——解释、拓展与应用”的模式展开本节的内容.

4. 列三元一次方程组也是根据问题中的等量关系. 一般地，对含有三个未知数的问题，列三元一次方程时需要同时列三个方程，即分别使用问题中的三个等量关系，列三个三元一次方程，这些未知数必须同时满足这三个方程，这三个方程组成一个三元一次方程组.

5. 解三元一次方程组的过程中，“消元”思想体现得非常充分. 怎么消元，先消哪个元，是需要认真考虑的.

6. 三元一次方程组及其解法也是学习二次函数的基础. 我们常常需要由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上任意 3 个点的坐标，确定它的系数 a，b，c. 本节虽然没有给出二次函数的概念，但给出了上述方法，这些都是为以后的学习作准备的.

因此，这个三元一次方程组的解为

$$\begin{cases} x=5, \\ y=\dfrac{1}{3}, \\ z=-2. \end{cases}$$

你还有其他解法吗？试一试，并与这种解法进行比较。

例 2 在等式 $y=ax^2+bx+c$[1] 中，当 $x=-1$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=3$；当 $x=5$ 时，$y=60$. 求 a，b，c 的值.[2]

分析：把 a，b，c 看作三个未知数，分别把已知的 x，y 值代入原等式，就可以得到一个三元一次方程组.[3]

解：根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases} a-b+c=0,[4] & ① \\ 4a+2b+c=3, & ② \\ 25a+5b+c=60. & ③ \end{cases}$$

②－①，得

$$a+b=1;\qquad ④$$

③－①，得

$$4a+b=10.\qquad ⑤$$

④与⑤组成二元一次方程组

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 4a+b=10. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-2. \end{cases}$$

把 $a=3$，$b=-2$ 代入①，得

$$c=-5.$$

因此

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-2, \\ c=-5. \end{cases}$$

即 a，b，c 的值分别为 3，-2，-5.

第十五章 二元一次方程组 19

[1] 这是二次函数的形式，在以后的学习中会碰到.

[2] 把 a，b，c 看作未知数，求这三个未知数的值. 已知二次函数图象上 3 个点的坐标，可由这 3 个点的坐标唯一确定二次函数的三个系数.

[3] 此例实际上是利用“待定系数法”求 a，b，c 的值.

[4] 观察三元一次方程组中三个未知数系数的特点，发现 c 的系数都是 1，先消去 c 容易.

习题 15.4

1. “复习巩固”的题目有两类：(1) 三元一次方程组中的三个方程中至少有一个方程只含有两个未知数. 此时可直接用代入消元法，把三元一次方程组转化为二元一次方程组. 第 1 题就是这种题目. (2) 三元一次方程组的三个方程中至多有一个方程只含有两个未知数. 此时，需要仔细观察方程系数的特点，灵活运用代入消元法或加减消元法. 常用的一种方法是，先通过加减消元法消去其中的一个未知数，把它转化为二元一次方程组，第 2 题就是这种题目.

2. “综合运用”的第 3 题需要根据题目中的等量关系，先列三元一次方程组，然后解三元一次方程组，最后求出这个三位数. 第 4 题从形式上看不是三元一次方程组，我们需要根据比例的性质，把它变形为三元一次方程组的形式，然后求解.

练习

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x-2y=-9, \\ y-z=3, \\ 2x+z=47; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 2x+3y-z=12, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

2. 甲、乙、丙三个数的和是35，甲数的2倍比乙数大5，乙数的$\frac{1}{3}$等于丙数的$\frac{1}{2}$. 求这三个数.

习题 15.4

复习巩固

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-7, \\ 5x+3y+2z=2, \\ 3x-4z=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x+9y=12, \\ 3y-2z=1, \\ 7x+5z=\frac{19}{4}. \end{cases}$

2. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 4x-9z=17, \\ 3x+y+15z=18, \\ x+2y+3z=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9, \\ 3x-2y+5z=11, \\ 5x-6y+7z=13. \end{cases}$

综合运用

3. 一个三位数，个位、百位上的数的和等于十位上的数，百位上的数的7倍比个位、十位上的数的和大2，且个位、十位、百位上的数的和是14. 求这个三位数.

4. 解方程组

$$\begin{cases} x:y=3:2, \\ y:z=5:4, \\ x+y+z=66. \end{cases}$$ [1]

拓广探索

5. 在等式$y=ax^2+bx+c$中，当$x=1$时，$y=-2$；当$x=-1$时，$y=20$；当$x=\frac{3}{2}$与$x=\frac{1}{3}$时，y的值相等. 求a，b，c的值.

20 第十五章 二元一次方程组

3. “拓广探索”中的题目与例2类似，根据题意，列出关于a，b，c三个未知数的三元一次方程组，然后求出它们的值.

4. 本节题目的主要目的是求解三元一次方程组，重点应放在如何解三元一次方程组上.

练习答案

1. (1) $\begin{cases} x=22, \\ y=\dfrac{31}{2}, \\ z=\dfrac{25}{2}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=1. \end{cases}$

2. 设甲、乙、丙三个数分别为x，y，z. 根据题意，得

$$\begin{cases} x+y+z=35, \\ 2x-y=5, \\ \dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{2}z. \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=10, \\ y=15, \\ z=10. \end{cases}$

[1] 由$x:y=3:2$可得$2x-3y=0$. 同样，由$y:z=5:4$可得$4y-5z=0$. 这样，这个方程组就变形为三元一次方程组.

[1]《九章算术》“方程”章的第一题原文为：“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗．问上、中、下禾实一秉各几何．”

[2]《九章算术》中，这幅图是竖排的．为便于与现在的方程组书写格式相比较，这里将图改为横排，每一行表示一个三元一次方程．

阅读与思考

一次方程组的古今表示及解法

我国古代很早就开始对一次方程组进行研究，其中不少成果被收入古代数学著作《九章算术》中．《九章算术》的“方程”一章，有许多关于一次方程组的内容．这一章的第一个问题译成现代汉语是这样的：[1]

上等谷3束，中等谷2束，下等谷1束，可得粮食39斗；上等谷2束，中等谷3束，下等谷1束，可得粮食34斗；上等谷1束，中等谷2束，下等谷3束，可得粮食26斗．求上等谷、中等谷、下等谷每束各可得粮食几斗．

斗是过去的容积计量单位．

下面的算筹图代表了古代解决这个问题的方法，它是什么意思呢？

上等谷(束)　中等谷(束)　下等谷(束)　斗数

《九章算术》中的算筹图是竖排的，为看图方便，上图改为横排，这三个横行表示三句话的含义．[2]

不妨先用我们熟悉的数学符号来表述怎样解这个有3个未知数的问题．

设上等谷、中等谷、下等谷每束各可得粮食 x 斗，y 斗，z 斗．

根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+2y+z=39, & ①\\ 2x+3y+z=34, & ②\\ x+2y+3z=26. & ③\end{cases}\qquad (*)$$

通过消元，可以求出各未知数．

上图实际上就是用算筹列出的方程组(*)，它省略了各未知数，只用算筹表示出未知

第十五章　二元一次方程组　21

阅读与思考

这篇供选学用的短文介绍的是有关一次方程组数学史方面的知识．短文从中国古代数学著作《九章算术》中的一个问题说起．《九章算术》是中国古代一部重要的数学著作，编写时间不能确定，但至少在约公元前100—公元100年成书．书中有246个问题，分为9章．这篇短文展示了古代如何用算筹图表示和解多元一次方程组，然后对照现在学习的一次方程组的表示法和解法，联系高等代数中有关矩阵的内容，指出一次方程组的古今表示法与解法是一脉相承的．从而传播数学文化，介绍中国传统数学成就以及数学发展的一个侧面．

这篇短文中，介绍了用算筹图表示一次方程组．算筹是中国古代的一种计算工具，有很长的使用历史，在七年级上册中有过介绍．

从算筹图到矩阵，反映了数学逐渐进步的发展过程．在信息技术飞速发展的今天，计算机承

数的系数与相应的常数项.

我国古代解方程组时，也用算筹做计算工具. 具体解法是，在一个方程两边乘另一个方程中某未知数的系数，然后再累减另一个方程. 例如，解方程组(*)，在②的两边乘3，然后累减①两次消去 x（这与②×3−①×2 的结果一样）；在③的两边乘3，然后减①消去 x，从而得到二元一次方程组

$$\begin{cases}5y+z=24,\\4y+8z=39.\end{cases}$$

再用上面的方法消去 y，求得 z.

用现代高等代数的符号，可以将方程组(*)中所有方程的系数与相应的常数项排成一个表

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 39\\2 & 3 & 1 & 34\\1 & 2 & 3 & 26\end{pmatrix}.$$ [1]

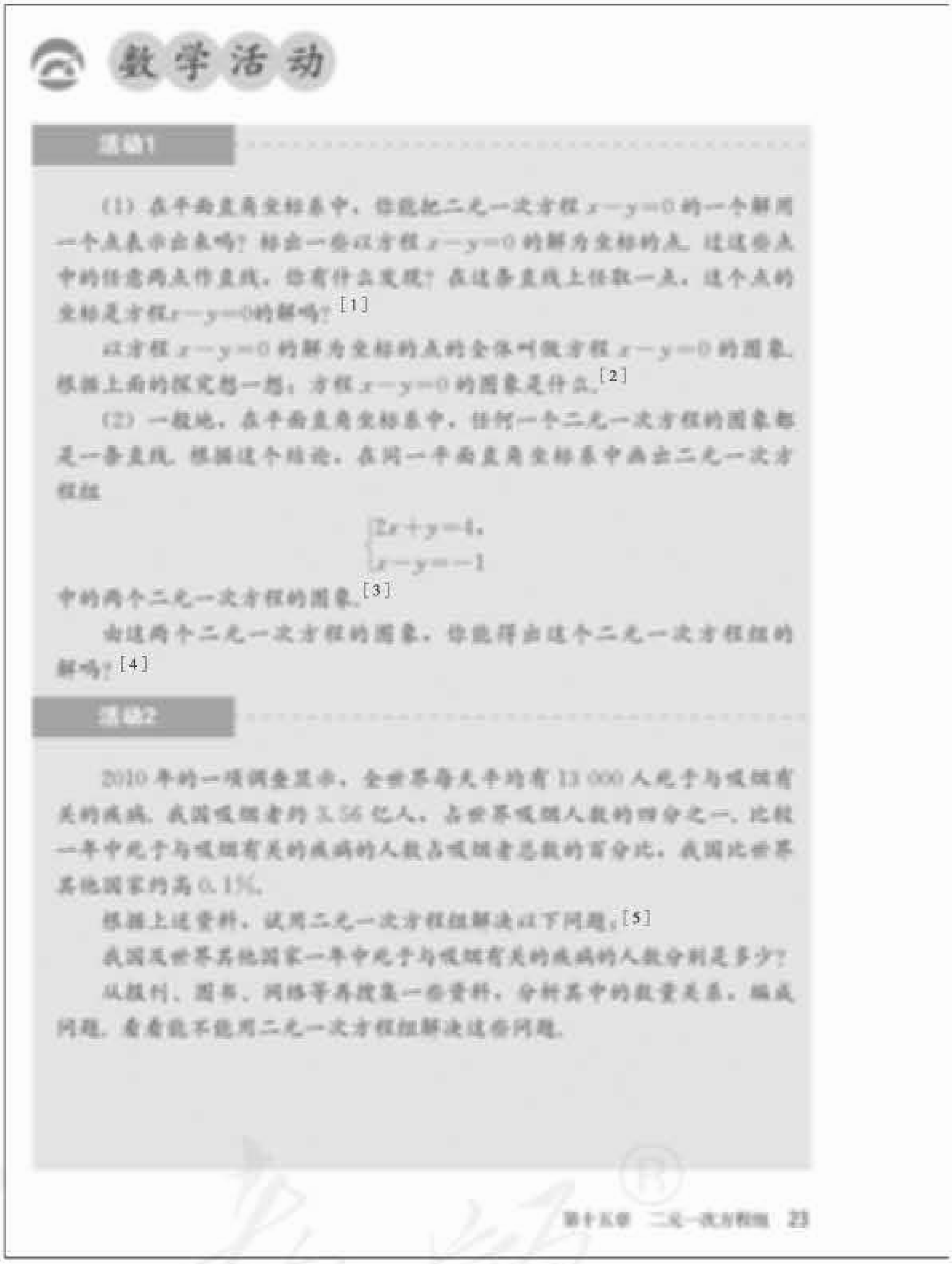
这种由数排成的表叫做矩阵[2]. 容易看出，这个矩阵与上面的算筹图是一致的，只是用阿拉伯数字替代了算筹. 利用矩阵解一次方程组的方法，与前面说的算筹方法也是一致的. 我们祖先掌握上述解法，比起欧洲人来，要早一千多年，这是我国古代数学的一个光辉成就.

22 第十五章 二元一次方程组

[1] 这是用矩阵形式表示三元一次方程组，其中省略了未知数以及加号、等号. 这种表示一次方程组的方法是近代高等代数中开始使用的.

[2] 矩阵是高等代数中的一个概念. 它是按一定规则排成的矩形数表，可以用来表示一次方程组. 矩阵有相应的运算法则，对矩阵进行变换可以解出其表示的方程组，这种做法的基本思想是消元.

担了大量复杂的计算，用计算机可以很容易地完成解大型方程组的任务，但消元的基本思想并未改变.



数学活动

活动1

(1) 在平面直角坐标系中，你能把二元一次方程 $x-y=0$ 的一个解用一个点表示出来吗？标出一些以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点．过这些点中的任意两点作直线，你有什么发现？在这条直线上任取一点，这个点的坐标是方程 $x-y=0$ 的解吗？[1]

以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点的全体叫做方程 $x-y=0$ 的图象．根据上面的探究想一想：方程 $x-y=0$ 的图象是什么．[2]

(2) 一般地，在平面直角坐标系中，任何一个二元一次方程的图象都是一条直线．根据这个结论，在同一平面直角坐标系中画出二元一次方程组

$$\begin{cases}2x+y=4,\\x-y=-1\end{cases}$$

中的两个二元一次方程的图象．[3]

由这两个二元一次方程的图象，你能得出这个二元一次方程组的解吗？[4]

活动2

2010 年的一项调查显示，全世界每天平均有 13 000 人死于与吸烟有关的疾病．我国吸烟者约 3.56 亿人，占世界吸烟人数的四分之一．比较一年中死于与吸烟有关的疾病的人数占吸烟者总数的百分比，我国比世界其他国家约高 0.1%．

根据上述资料，试用二元一次方程组解决以下问题：[5]

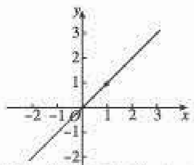
我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病的人数分别是多少？

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题，看看能不能用二元一次方程组解决这些问题．

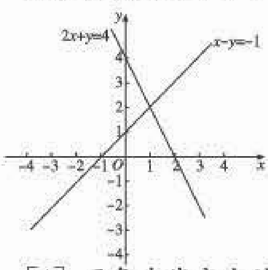
第十五章　二元一次方程组　23

[1] 能；这些点在一条直线上；是．

[2] 方程 $x-y=0$ 的图象是过原点和以 (1，1) 为坐标的点的一条直线．



[3] 所画图象如下：



[4] 两条直线交点的坐标(1，2)是方程组的解．

[5] 设我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病人数分别为 x，y．根据题意，得

$$\begin{cases}x+y=13\ 000\times365,\\ \dfrac{x}{3.56\times10^{8}}-\dfrac{y}{3.56\times3\times10^{8}}\\ =0.1\%.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1\ 453\ 250,\\y=3\ 291\ 750.\end{cases}$

根据问题的实际意义以及精确度，我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病人数分别为 1 453 000，3 292 000．

1．“活动 1”的设计意图是让学生认识二元一次方程的几何意义，从图形角度认识解二元一次方程组就是求两个二元一次方程的公共解，这也为今后学习一次函数等埋下伏笔．

2．“活动 1（1）”先以一个具体的二元一次方程组为例进行探索活动，得出：以这个方程组的解为坐标的点都在同一条直线上，这条直线上任意一点的坐标都是这个方程组的解．

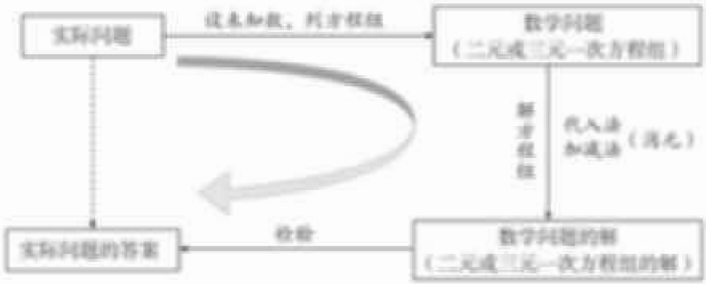
“活动 1（2）”将以上对于特殊对象的认识推广到一般情形，这种从特殊到一般的认识方法很重要．有了一般性认识，用图象法解二元一次方程组就有了根据．

3．“活动 2”的内容选自统计材料，通过计算可以进一步发现已知统计数据中隐含的更多信息．这个问题同时有助于对学生进行健康教育，以及搜集资料、分析数量关系、编制数学问题，加强与实际的联系．

小　结

一、本章知识结构图

[1]



二、回顾与思考

本章我们通过实际问题引入了二元一次方程（组），并学习了二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法，在此基础上，学习了简单的三元一次方程组及其解法.

消元是解二（三）元一次方程组的基本方法，通过消元，我们把“三元”转化为“二元”，把“二元”转化为“一元”，这一过程体现了化归思想.

二（三）元一次方程组是刻画实际问题的重要数学模型，在现实中具有广泛的应用，用它解决实际问题时，要注意分析问题中的各种等量关系，引进适当的未知量，建立相应的方程组.

请你带着下面问题，复习一下全章内容吧.

1. 举例说明怎样用代入法和加减法解二元一次方程组. “代入”与“加减”的目的是什么？[2]

2. 比较解三元一次方程组与解二元一次方程组的联系与区别. 你能说说“消元”的思想方法在解三元一次方程组中的体现吗？

3. 用二元或三元一次方程组解决一个实际问题，你能说说用方程组解决实际问题的基本思路吗？[3]

24　第十五章　二元一次方程组

[1] 这幅框图表示运用二元或三元一次方程组解决问题的基本过程，以及通过消元解二元或三元一次方程组的主要方法.

[2] “代入”与“加减”的目的都是消元，把二元一次方程组转化为一元一次方程.

[3] 可以结合具体问题以及上面的框图进行说明.

1. 教学中引导学生以分析、解决具体问题为例，认识本章知识结构图，加深学生对数学建模思想和列、解二元一次方程组基本过程的认识.

2. 消元思想是逐步使方程中未知数的个数减少，直至化为一元，它是解方程组的基本思想. 通过“小结”不仅使学生牢固掌握二元一次方程组的解法——代入法和加减法，而且加深对上述思想的认识.

3. 应注意结合学生学习过程中的实际情况，用“小结”复习和引申本章的重点内容，使学生通过“小结”切实解决存在的问题，深刻体会本章重点内容. “小结”教学时，应重视学生的实际情况，事先做好调查研究，特别要注意学生在基础知识和基本技能、能力方面还需要如何巩固提高，进而设计有针对性的“小结”内容.

[1] 在环形路上运动，同时同地出发，如果反向而行，两人运动路程之和等于环形周长时，两人相遇；如果同向而行，两人运动路程之差等于环形周长时，两人相遇.

复习题 15

复习巩固

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} a=2b+3, \\ a=3b+20; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-y=13, \\ x=6y-7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=4, \\ 4x+2y=-1; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 5x-y=110, \\ 9y-x=110. \end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3m+b=11, \\ -4m-b=11; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 0.6x-0.4y=1.1, \\ 0.2x-0.4y=2.3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4f+g=15, \\ 3g-4f=-3; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+3y=-6, \\ \frac{1}{2}x+y=2. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4(x-y-1)=3(1-y)-2, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \frac{2(x-y)}{3}-\frac{x+y}{4}=-1, \\ 6(x+y)-4(2x-y)=16. \end{cases}$

*4. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ 2x+y-3z=11, \\ x+y+z=12; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 5x-4y+4z=13, \\ 2x+7y-3z=19, \\ 3x+2y-z=18. \end{cases}$

5. 1号仓库与2号仓库共存粮450 t，现从1号仓库运出存粮的60%，从2号仓库运出存粮的40%，结果2号仓库所余粮食比1号仓库所余粮食多30 t. 1号仓库与2号仓库原来各存粮多少吨？

综合运用

6. 甲、乙二人都以不变的速度在环形路上跑步，如果同时同地出发，反向而行，每隔2 min相遇一次；如果同时同地出发，同向而行，每隔6 min相遇一次. 已知甲比乙跑得快，甲、乙二人每分各跑多少圈？[1]

7. 用1块A型钢板可制成2块C型钢板、1块D型钢板；用1块B型钢板可制成1块C型钢板、2块D型

（第6题）

第十五章　二元一次方程组　25

复习题 15

1. “复习巩固”的题目有两类：（1）解二（三）元一次方程组；（2）用二元一次方程组解决实际问题. 这些题目虽然简单，但是基础性强，应让学生熟练掌握.

2. “综合运用”中的第6题是追及问题. 除路程、时间、速度三者的关系外，还应注意在环形路上运动的特殊规律. 第7题是用料问题，问题中要考虑某种需求下不同材料恰好各需多少. 第8题是古代数学问题，选自《九章算术》中“盈不足”一章.

3. “拓广探索”中的第9，11题都有三个未知数. 第9题虽然有3个要求的未知数，但题中只给出两个等量关系，即只能列出两个方程. 就数学式子而言，未知数个数多于方程个数的问题属于不定方程问题. 但是，结合问题的实际意义，硬币的个数必须是整数，根据它可以确定答

钢板. 现需15块C型钢板、18块D型钢板，可恰好用A型钢板、B型钢板各多少块?[1]

8. （我国古代问题）有大小两种盛酒的桶，已知5个大桶加上1个小桶可以盛酒3斛（斛，音hú，是古代的一种容量单位），1个大桶加上5个小桶可以盛酒2斛. 1个大桶、1个小桶分别可以盛酒多少斛?[2]

拓广探索

9. 现有1角、5角、1元硬币各10枚，从中取出15枚，共7元. 1角、5角、1元硬币各取多少枚?[3]

10. 某电脑公司有A型、B型、C型三种型号的电脑，其中A型每台6 000元，B型每台4 000元，C型每台2 500元. 某中学现有资金100 500元，计划全部用于从这家电脑公司购进36台两种型号的电脑. 请你设计几种不同的购买方案供这个学校选择，并说明理由.

*11. 甲地到乙地全程是3.3 km，一段上坡，一段平路，一段下坡. 如果保持上坡每小时走3 km，平路每小时走4 km，下坡每小时走5 km，那么从甲地到乙地需51 min，从乙地到甲地需53.4 min. 从甲地到乙地时，上坡、平路、下坡的路程各是多少?

26 第十五章 二元一次方程组

[1] 这是一个用料问题，要求出的A，B两种类型的钢板的数量都应是整数.

[2] 这道题选自《九章算术》中的“盈不足”一章. 原文为“今有大器五小器一容三斛，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何.”

[3] 问题中有三个未知数，可以设其中两个为x，y，列出一个二元一次方程. 这是一个不定方程，根据x，y都是不超过10的非负整数，经观察尝试，得到答案.

案，即通过观察尝试作出合乎实际意义的选择. 这个问题不是二元一次方程组的常规问题，而是与二元一次方程有关且又有一定灵活性的问题. 解决这样的问题对于提高拓广探索能力是有益的.

第10题是通过解多个二元一次方程组，再结合问题的实际意义，确定购买方案的问题. 这是实际中常见的问题，对于加强与现实生活的联系，培养学生分析、解决问题的能力很有帮助.

第11题打“*”，是与三元一次方程组匹配的题目. 它既可用三元一次方程组解决，也可用二元一次方程组解决，两种方式都可以. 可以做一个比较，看看这两种方程组的差异.

Ⅲ 习题解答

习题 15.1

1.

x	-2	0	0.4	2	$\frac{11}{6}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
y	11	5	3.8	-1	-0.5	-1	0	3

2. C.

3. (1) $x+2y=180$；(2) $y=45$；(3) $x=60$.

4. 设有 x 只鸡、y 只兔. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=23,\\y=12.\end{cases}$

5. 设截成 x 根 2 m 长的钢管、y 根 1 m 长的钢管. 根据题意，得 $2x+y=7$.
根据问题的实际意义，$x=1$，$y=5$；$x=2$，$y=3$；$x=3$，$y=1$ 都是上述方程的解. 因此有 3 种不同的截法.

习题 15.2

1. (1) $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x$；(2) $y=\frac{8}{7}-\frac{1}{7}x$；(3) $y=\frac{4}{5}x$；(4) $y=x+\frac{5}{3}$.

2. (1) $\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=\frac{5}{2};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}s=\frac{25}{11},\\t=\frac{20}{11};\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=3,\\y=3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=-3,\\y=1.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}u=2,\\t=\frac{1}{2};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}a=1,\\b=1;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

4. 设甲、乙两种票分别买了 x 张、y 张. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=35,\\24x+18y=750.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=20,\\y=15.\end{cases}$

5. (1) $\begin{cases}x=5,\\y=7;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}u=-\frac{3}{2},\\v=2.\end{cases}$

6. 设到花果岭、云水洞的人数分别为 x，y. 根据题意，得$\begin{cases}x=2y-1,\\x+y=200.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=133,\\y=67.\end{cases}$

7. 设小方、小程的平均速度分别为 x km/h，y km/h. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=6,\\3x-3y=6.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

8. 设大盒、小盒每盒分别装 x 瓶、y 瓶. 根据题意，得$\begin{cases}3x+4y=108,\\2x+3y=76.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=20,\\y=12.\end{cases}$

9. 设这个长方形的长为 x cm、宽为 y cm. 根据题意，得$\begin{cases}x-5=y+2,\\(x-5)(y+2)=xy.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{25}{3},\\y=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

习题 15.3

1. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{31}{12},\\y=\dfrac{11}{4};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

2. 设飞机的平均速度为 x km/h，风速为 y km/h. 根据题意，得$\begin{cases}12.5(x+y)=9\ 750,\\13(x-y)=9\ 750.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=765,\\y=15.\end{cases}$

3. 设第一天和第二天行军的平均速度分别为 x km/h，y km/h. 根据题意，得$\begin{cases}4x+5y=98,\\4x+2=5y.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=12,\\y=10.\end{cases}$

4. 设用 x 张铁皮制盒身、y 张铁皮制盒底使盒身与盒底正好配套. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=36,\\2\times25x=40y.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=16,\\y=20.\end{cases}$

5. 设 1 辆大货车一次可以运货 x t，1 辆小货车一次可以运货 y t. 根据题意，得$\begin{cases}2x+3y=15.5,\\5x+6y=35.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=4,\\y=2.5.\end{cases}$ 因此 $3x+5y=24.5$.

6. 设坡路长 x km，平路长 y km. 根据题意，得$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{54}{60},\\\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{42}{60}.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1.5,\\y=1.6.\end{cases}$ 因此 $x+y=3.1$.

7. 设取含药 30% 的药水 x kg，含药 75% 的药水 y kg. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=18,\\0.3x+0.75y=0.5\times18.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=10,\\y=8.\end{cases}$

8. 设打折前 A 和 B 两种商品的单价分别为 x 元、y 元. 根据题意，得$\begin{cases}60x+30y=1\ 080,\\50x+10y=840.\end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x=16, \\ y=4. \end{cases}$ 因此 $500x+500y-9\ 600=400$.

9. 设每支牙刷 x 元，每盒牙膏 y 元. 根据题意，得 $\begin{cases} 39x+21y=396, \\ 52x+28y=518. \end{cases}$ 化简，得 $\begin{cases} 13x+7y=132, \\ 13x+7y=129.5. \end{cases}$ 此方程组无解，说明记录有误.

习题 15.4

1. (1) $\begin{cases} x=2, \\ y=-3, \\ z=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{4}, \\ y=\dfrac{5}{3}, \\ z=2. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=5, \\ y=-2, \\ z=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-1, \\ y=\dfrac{1}{2}, \\ z=3. \end{cases}$

3. 设百位、十位、个位上的数分别为 x，y，z. 根据题意，得 $\begin{cases} x+z=y, \\ 7x-y-z=2, \\ x+y+z=14. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=7, \\ z=5. \end{cases}$ 这个三位数是 275.

4. 原方程组可转化为 $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 4y-5z=0, \\ x+y+z=66. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=30, \\ y=20, \\ z=16. \end{cases}$

5. $\begin{cases} a+b+c=-2, \\ a-b+c=20, \\ \dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c=\dfrac{1}{9}a+\dfrac{1}{3}b+c. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=6, \\ b=-11, \\ c=3. \end{cases}$

复习题 15

1. (1) $\begin{cases} a=-31, \\ b=-17; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=17, \\ y=4; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=\dfrac{7}{6}, \\ y=-\dfrac{17}{6}; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=25, \\ y=15. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} m=-22, \\ b=77; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-3, \\ y=-\dfrac{29}{4}; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} f=3, \\ g=3; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=12, \\ y=-4. \end{cases}$

3. (1) $\begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$

*4. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{29}{9},\\ y=\dfrac{139}{18},\\ z=\dfrac{19}{18};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=5,\\ y=0,\\ z=-3.\end{cases}$

5. 设1号仓库原来存粮 x t，2号仓库原来存粮 y t. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=450,\\ (1-0.6)x=(1-0.4)y-30.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=240,\\ y=210.\end{cases}$

6. 设甲每分跑 x 圈，乙每分跑 y 圈. 根据题意，得$\begin{cases}2x+2y=1,\\ 6x-6y=1.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

7. 设恰好用 x 块 A 型钢板，y 块 B 型钢板. 根据题意，得$\begin{cases}2x+y=15,\\ x+2y=18.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\ y=7.\end{cases}$

8. 设1个大桶可盛酒 x 斛，1个小桶可盛酒 y 斛. 根据题意，得$\begin{cases}5x+y=3,\\ x+5y=2.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{13}{24},\\ y=\dfrac{7}{24}.\end{cases}$

9. 设取 x 枚1角硬币，y 枚5角硬币. 根据题意，得$0.1x+0.5y+(15-x-y)=7$.化简，得方程 $9x+5y=80$. 根据 $0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant y\leqslant 10$，得 $x=5$，$y=7$，$15-x-y=3$.

10. 设从这家电脑公司购进A型电脑 x 台、B型电脑 y 台、C型电脑 z 台. 分以下三种情况考虑.

(1) 只购进A型电脑和B型电脑. 根据题意，得$\begin{cases}6\,000x+4\,000y=100\,500,\\ x+y=36.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-21.75,\\ y=57.75.\end{cases}$不合题意，舍去.

(2) 只购进A型电脑和C型电脑. 根据题意，得$\begin{cases}6\,000x+2\,500z=100\,500,\\ x+z=36.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3,\\ z=33.\end{cases}$

(3) 只购进B型电脑和C型电脑. 根据题意，得$\begin{cases}4\,000y+2\,500z=100\,500,\\ y+z=36.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}y=7,\\ z=29.\end{cases}$

综上可知，有两种方案供这个学校选择：第一种方案是购进A型电脑3台、C型电脑33台；第二种方案是购进B型电脑7台、C型电脑29台.

*11. 设从甲地到乙地时，上坡、平路、下坡的距离分别为 x km，y km，z km. 根据题意，得$\begin{cases}x+y+z=3.3,\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=\dfrac{51}{60},\\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=\dfrac{53.4}{60}.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1.2,\\ y=0.6,\\ z=1.5.\end{cases}$

Ⅳ 教学设计案例

15.2 消元——解二元一次方程组（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

代入消元法解二元一次方程组.

2. 内容解析

实际生活中涉及多个未知数的问题是普遍存在的，而二元一次方程组是解决含有两个未知数的问题的有力工具. 同时，二元一次方程组也是解决后续一些数学问题的基础，其解法将为解决这些问题提供运算的工具，如用待定系数法求一次函数解析式，在平面直角坐标系中求两条直线的交点坐标等.

解二元一次方程组就是要把“二元”化归为“一元”，而化归的方法可以是代入消元法. 这一过程同样是解三元（多元）一次方程组的基本思路，是通法. 由算术到方程再到方程组，其中蕴含的“数式通性”（已知数、未知数共同参与运算，用运算律化简方程（组），确定未知数的值）在本节内容中有很好的体现.

本节课的教学重点是：会用代入消元法解简单的二元一次方程组，体会解二元一次方程组的思路是“消元”.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）会用代入消元法解简单的二元一次方程组.

（2）理解解二元一次方程组的思路是“消元”，经历从未知向已知转化的过程，体会化归思想.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：学生掌握代入消元法解二元一次方程组的一般步骤，并能正确求出简单二元一次方程组的解.

达成目标（2）的标志是：让学生经历探究的过程，体会二元一次方程组的解法与一元一次方程的解法的关系，进一步体会消元思想和化归思想.

三、教学问题诊断分析

1. 学生第一次遇到多元问题，为什么要向一元转化，为什么可以转化，如何进行转化，需要结合实际问题进行分析. 由于方程组的两个方程中同一未知数表示的是同一数量，通过观察对照，可以发现二元一次方程组向一元一次方程转化的思路.

2. 解二元一次方程组的步骤多，需要理解每一步的目的和依据，正确地进行操作，把探究过

程分解细化，逐一实施.

本节课的教学难点是：理解“二元”向“一元”的转化，掌握代入消元法解二元一次方程组的一般步骤.

四、教学过程设计

1. 探究新知

问题1 篮球联赛中，每场都要分出胜负，每队胜1场得2分，负1场得1分. 某队10场比赛中得到16分，那么这个队胜、负场数分别是多少？你能根据问题中的等量关系列出二元一次方程组吗？

师生活动：学生回答：设胜 x 场，负 y 场. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16.\end{cases}$教师引出本节课内容：这是我们在引言中探讨的问题，我们在上节课列出了方程组，并通过列表找公共解的办法得到了这个方程组的解$\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$显然这样的方法需要一个个尝试，有些麻烦，不好操作. 所以这节课我们就来探究如何解二元一次方程组.

追问（1）：这个实际问题能列一元一次方程求解吗？

师生活动：学生回答：设胜 x 场，则负（$10-x$）场. 根据题意，得$2x+(10-x)=16$.

追问（2）：对比方程和方程组，你能发现它们之间的关系吗？

师生活动：通过对实际问题的分析，认识方程组中的两个方程中的 y 都是这个队负的场数，具有相同的实际意义. 因此可以由一个方程得到 y 的表达式，并把它代入另一个方程，从而把二元一次方程组转化为一元一次方程. 先求出一个未知数，再求另一个未知数. 教师总结：这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做消元思想.

设计意图：用引言中的问题引入本节课内容，先列二元一次方程组，再列一元一次方程，对比方程和方程组，发现方程组的解法.

问题2 对于二元一次方程组$\begin{cases}x+y=10, & ①\\2x+y=16, & ②\end{cases}$你能写出求 x 的值的过程吗？

师生活动：学生回答：

由①，得 $y=10-x$. ③

把③代入②，得 $2x+(10-x)=16$.

解得 $x=6$.

设计意图：通过解具体的方程组明确消元的过程.

追问：把③代入①可以吗？试试看？

师生活动：学生把③代入①，观察结果.

设计意图：由于方程③是由方程①得到的，它只能代入方程②，不能代入方程①. 让学生实际操作，得到恒等式，更好地认识这一点.

问题3 怎样求 y 的值？

师生活动：学生回答：把 $x=6$ 代入③，得 $y=4$.

追问（1）：代入①或代入②可不可以？哪种运算更简便？

师生活动：学生回答：代入③更简便.

追问（2）：你能写出这个方程组的解，并给出问题的答案吗？

师生活动：学生回答：这个方程组的解是$\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$这个队胜 6 场，负 4 场.

设计意图：让学生考虑求另一个未知数的过程，并思考如何优化解法.

问题 4　在这种解法中，哪一步是最关键的步骤？为什么？

师生活动：学生回答“代入”. 教师总结：这种方法叫做代入消元法，简称代入法.

设计意图：使学生明确代入消元法的关键是“代入”，把二元一次方程组转化成一元一次方程.

问题 5　是否有办法得到关于 y 的一元一次方程？

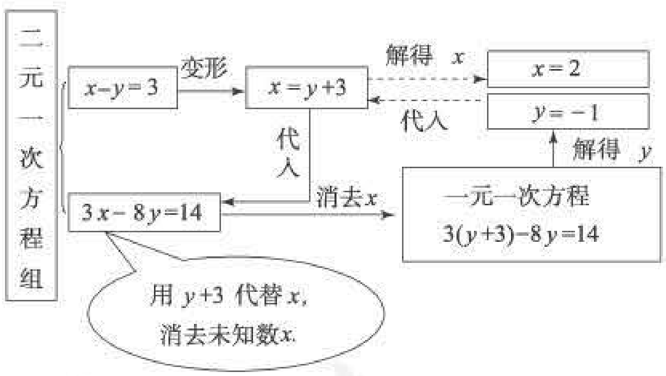
师生活动：学生具体操作.

设计意图：让学生尝试不同的代入消元方法，并为后面学生选择简单的代入方法作铺垫.

2. ***应用新知***

例　用代入法解方程组$\begin{cases}x-y=3,\\3x-8y=14.\end{cases}$

师生活动：学生写出用代入法解这个方程组的过程，教师用下面的框图说明这个过程. 学生结合框图，概括代入法解二元一次方程组的基本步骤和注意事项.



设计意图：借助本题，让学生先分析解题思路，并对比、确定消哪一个元计算更简捷. 使学生再次经历代入法解二元一次方程组的过程，并利用此题给出解方程组的框图，让学生体会程序化思想.

3. ***加深认识***

练习　用代入法解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}3s+t=5,\\s+2t=15;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x+4y=16,\\5x-6y=33.\end{cases}$

师生活动：学生写出用代入法解这个方程组的过程.

（这两道题的答案：(1) $\begin{cases}s=-1,\\t=8;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=6,\\y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$）

设计意图：本题需要先分析方程组的结构特征，再选择适当的解法. 通过此练习，使学生熟练地掌握用代入法解二元一次方程组.

4. **归纳总结**

回顾本节课的学习过程，并回答以下问题：

(1) 代入法解二元一次方程组有哪些步骤？

(2) 解二元一次方程组的基本思路是什么？

(3) 在探究解法的过程中用到了什么思想方法？你还有哪些收获？

设计意图：让学生总结本节课的主要内容和思想方法.

5. **布置作业**

教科书第 7 页练习第 2 题.

五、目标检测设计

用代入法解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+3, \\ 7x+5y=9; \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+4y=2. \end{cases}$

设计意图：本题主要考查学生对代入法解二元一次方程组的掌握.

15.3　二元一次方程组与实际问题（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

用二元一次方程组解决"探究 1"和"探究 2"中的实际问题.

2. **内容解析**

实际生活中常会遇到解决两个未知量的问题，这两个未知量之间存在数量关系，运用二元一次方程组可以解决这类问题. 分析问题中的数量关系→发现等量关系→列出二元一次方程组→解二元一次方程组→得到实际问题的答案，这一典型的数学建模过程，是数学应用的具体体现. 它对于运用其他数学模型（如不等式、函数等）解决实际问题具有很强的示范作用.

本节课要研究两个问题."探究 1"中的数量关系比较简单，但需要学生理解如何确定未知数；"探究 2"中的数量关系比较复杂，作物总产量比、单位面积产量比、面积比、长度比之间的转化是列方程组的关键. 通过"探究 1"的学习，学生初步认识运用方程组解决实际问题的建模过程，然后尝试独立解决"探究 2"，加深对建模过程的认识. 在两个探究过程中同时关注如何用数学问题的答案解释具体的实际问题.

本节课的教学重点是：探究用二元一次方程组解决实际问题的过程.

二、目标和目标解析

1. **目标**

能分析实际问题中的数量关系，会设未知数，列方程组并求解，得到实际问题的答案，体会数学建模思想.

2. **目标解析**

学生能够准确分析数量关系，发现等量关系，依据实际问题列出方程组，解方程组. 在此基础上，用方程组的解解释实际问题. 这一典型的数学建模过程，需要学生在方程、方程组以及后续的不等式、函数的学习中，逐渐体会.

在“探究 1”中学生首先要分析数量关系，找到等量关系，正确设出未知数，列出方程组，理解“通过计算检验估计”的含义. 在“探究 2”中学生要借助图形发现隐含的等量关系，把总产量的比转化为长度比，从而列出方程组，并用语言描述作物的种植方案.

三、教学问题诊断分析

受阅读能力、分析能力的制约，如何从实际背景中提取数学信息，并转化成数学语言，对初一学生来说是个难点. 本节课涉及的实际问题都含有两个未知数，包含两个等量关系，需要列出两个二元一次方程. 数量关系比一元问题复杂，需要学生更好地分析问题，抓住关键词，发现等量关系，列出方程组.

“探究 1”中的问题没有直接提出求“大牛和小牛一天的饲料”，而是要求“通过计算检验他的估计”. 也就是说，本题没有明确的未知数. 学生要理解需要通过计算验证“估计的值”，进而明确需要求哪些未知量. “探究 2”中的问题是“怎样划分土地”，理解题意，选择适当的未知数，是本题的难点. 由于问题具有较强的实际意义，由数学问题的解得到实际问题的答案这一步骤显得更加重要. 在“探究 2”中如何依据方程组的解，描述土地划分方案，对于学生也是一个难点.

本节课的教学难点是：发现问题中隐含的未知数，寻找等量关系并列出方程组. 由方程组的解解释实际问题.

四、教学过程设计

1. **探究 1 的教学**

问题 1　如何理解“通过计算检验他的估计”这句话？

师生活动：学生自由发言，体会对于估算的结果要通过精确求值来检验，理解要想检验估计是否准确，需要求出大牛、小牛 1 天所需要的饲料.

设计意图：使学生明确估算的值不是这道题目中的已知量，是需要检验的量，也就是要求的未知数.

问题 2　题目中哪些是已知量，哪些是未知量？有几个等量关系？

师生活动：学生充分读题，可以适当讨论. 教师引导学生关注有两个未知数，两个等量关系.

设计意图：引导学生发现未知数和等量关系，运用二元一次方程组解决.

问题 3　如何解决这一问题？

师生活动：学生依据发现的等量关系，建立方程组：设每头大牛和每头小牛 1 天分别约用饲料 x kg 和 y kg，根据题意，得$\begin{cases}30x+15y=675,\\42x+20y=940.\end{cases}$

追问：列一元一次方程能解决这个问题吗？

师生活动：学生体会列方程组比列一元一次方程简单.

设计意图：让学生经历分析数量关系，得到等量关系，列方程组的过程. 一般情况下，学生会自觉选择列方程组解决. 教师引导学生体会有两个未知量时，列方程组更为简单.

问题 4　请你解这个方程组，并交流一下你是如何解这个方程组的.

师生活动：学生独立解方程组，并发言交流. 可能有的学生直接用消元法解方程组，有的学生先化简整理为 $\begin{cases}2x+y=45,\\21x+10y=470,\end{cases}$ 再解方程组. 教师引导学生对比，发现先化简再解更简捷.

设计意图：让学生认识到，由实际问题列出的方程组，有时系数较为复杂，先化简再求解，可以简化运算.

问题 5　饲养员李大叔的估计正确吗？

师生活动：学生对比计算结果和李大叔的估计，得到结论.

设计意图：引导学生用方程组的解去分析、解释实际问题.

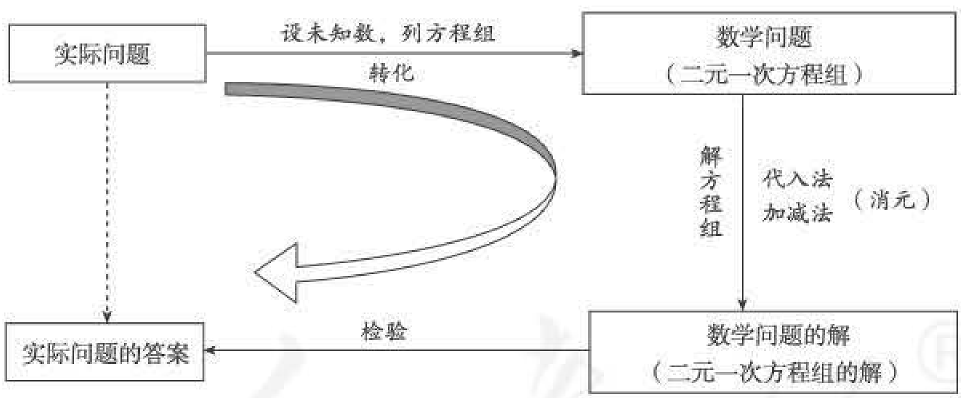
“探究 1”小结

师生共同回顾解决“探究 1”的过程，教师提问：

（1）在列方程组之前我们先做了哪些工作？

（2）列方程组解决实际问题的一般步骤是什么？

师生活动：教师引导学生回顾如何分析数量关系，发现等量关系，选择适当的未知数和列出方程组，并用下面的框图说明列方程组解决实际问题的一般步骤.



设计意图：引导学生总结运用方程组建立数学模型，解决实际问题的过程.

2. **探究 2 的教学**

问题 6　结合上面的框图，以及“探究 1”的解决过程，如何解决“探究 2”中的问题？

师生活动：独立思考，互相讨论交流解决问题的过程，尝试列方程组解决问题.

“探究 2”有一定难度. 如果学生不能独立解决，进行以下追问，尽可能让学生多思考，追问的问题不要一次给出.

追问（1）：这里研究的实际上是长方形面积的分割问题，你能画出示意图帮助自己理解吗？

师生活动：画图分析题意，把文字语言转化为图形语言. 如图 1，一种种植方案为：甲、乙两种作物的种植区域分别为长方形 $AEFD$ 和

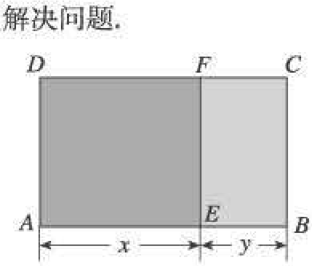


图 1

$BCFE$. 此时设 $AE=x$ m，$BE=y$ m.

追问（2）：作物产量比与种植面积的比有什么关系？

师生活动：学生思考分析，发现甲、乙两种作物的产量比等于甲作物的种植面积与乙作物的种植面积的 2 倍的比.

追问（3）：能求出 x，y 吗？

师生活动：学生列出方程组$\begin{cases}x+y=200,\\100x:100y\times2=3:4.\end{cases}$将这个方程组转化为二元一次方程组$\begin{cases}x+y=200,\\3\times2y=4x,\end{cases}$进而求出 x，y.

设计意图：让学生经历列方程组解决实际问题的完整过程，加深对建模一般步骤的理解.

问题 7 如何表述你的种植方案？

师生活动：学生自由发言，互相启发，不断补充完善种植方案. 如过长方形土地的长边上离一端 120 m 处，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地，较大一块土地种甲种作物，较小一块土地种乙种作物.

设计意图：让学生体会如何利用方程组的解解释实际问题.

问题 8 还有其他设计方案吗？

师生活动：过长方形土地的短边上一点，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地. 再次经历列方程组解决实际问题的过程.

设计意图：一题多解，体现思维的多样性.

“探究 2”小结

师生共同回顾解决“探究 2”的过程，教师提问：

（1）列一元一次方程解决实际问题的一般过程是什么？

（2）你认为列二元一次方程组解决实际问题和列一元一次方程解决实际问题有哪些相同点和不同点？

师生活动：学生回答. 对于问题（2），教师可总结：①能列二元一次方程组解决的实际问题，一般都可以通过列一元一次方程加以解决. 但是，随着实际问题中未知量的增多和数量关系的复杂化，列方程组将更加简单直接. 因为问题有几个等量关系就可以列出几个方程. ②两者的相同点是都需要先分析题意，把实际问题转化为数学问题（设未知数，列方程或方程组），再检验解的合理性，进而得到实际问题的解. 这一过程就是建模的过程.

设计意图：对于问题（2），学生对相同点的总结有利于更好地体会建模思想，理解建模的一般步骤，学生对不同点的总结将更好地认识到列方程组更为容易.

3. 布置作业

教科书习题 15.3 第 2，3，4，5 题.

五、目标检测设计

教科书复习题 15 第 10 题.

设计意图：与本节课的两个探究活动一致，本题也没有直接给出要求的未知数．需要学生理解题意，特别是“全部用于购进 36 台两种型号”，发现等量关系，设出未知数．题目蕴含的等量关系与“探究 1”类似，而对购买方案的描述又与“探究 2”类似．

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 一次方程组的相关史料

未知量是一次的方程组，叫做线性方程组．它既是最简单也是最重要的一类代数方程组．一次方程组是重要的数学模型，它来源于实际问题，又用于解决实际问题．对于一次方程组，我们研究它是否有解，有多少解，以及怎么解．

我国是世界上引进和求解一次方程组最早的国家之一．公元 3 世纪，我国著名数学家刘徽把“方程”解释为：程，课程也．群物众杂，各列有数，总言其实．令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程．其中，“令每行为率”是按条件列等式的意思；“如物数程之”是说有几个未知数就列几个等式．最后用竹制的算筹布列出一个方阵，就是我们今天的方程组．

一次方程组的解法在我国古代数学名著《九章算术》“方程”章中已有比较完整的论述．所用的方法相当于对现代对方程组的增广矩阵施行行初等变换，消去未知数．

在西方，一次方程组的研究始于 17 世纪后期的莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716）．他曾研究含有两个未知数的三个一次方程组成的方程组，证明当方程组的结式等于零时方程组有解．马克劳林（C. Maclaurin，1698—1746）在 18 世纪上半叶研究了有二、三、四个未知数组成的一次方程组，并得到了现在称为克莱姆法则的结果．克莱姆不久也发表了这个法则．到了 19 世纪，英国数学家史密斯引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的术语，道奇森证明了含有 n 个未知数的 m 个方程组成的方程组相容的充要条件，使方程组理论臻于完善．

2. 用行列式和矩阵解一次方程组举例

一次方程组的解只与未知数的系数有关．无论是代入消元法，还是加减消元法，本质上都是对未知数的系数进行运算．一次方程组的行列式解法和矩阵解法就是通过对未知数的系数进行运算，求出一次方程组的解的方法．

例如，解二元一次方程组

$$\begin{cases}3x+2y=5, & ①\\4x+5y=3. & ②\end{cases}$$

（1）先用加减消元法求它的解．

①×5－②×2，得$(3\times5-4\times2)x=5\times5-3\times2$，则 $x=\dfrac{5\times5-3\times2}{3\times5-4\times2}=\dfrac{19}{7}$．

①×4－②×3，得$(2\times4-5\times3)y=5\times4-3\times3$，则 $y=\dfrac{5\times4-3\times3}{2\times4-5\times3}=-\dfrac{11}{7}$．

因此，原方程组的解为$\begin{cases}x=\dfrac{19}{7},\\ y=-\dfrac{11}{7}.\end{cases}$

一般情况下，对于方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$当$a_1b_2\neq a_2b_1$时，利用加减消元法可得方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\end{cases}$$

（2）接下来，用行列式法求解上述二元一次方程组.

记$D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=3\times5-2\times4=7$，$D_x=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5\times5-2\times3=19$，$D_y=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3\times3-5\times4=-11$，

则原方程组的解为$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{19}{7},\\ y=\dfrac{D_y}{D}=-\dfrac{11}{7}.\end{cases}$

对于一般的二元一次方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$我们记

$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$，$D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$，$D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$，

其中D，D_x，D_y叫做行列式，D叫做系数行列式. 当系数行列式$D\neq0$时，方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D},\\ y=\dfrac{D_y}{D}.\end{cases}$$

当未知数不断增多时，行列式解法的优越性就会逐渐体现出来.

（3）下面，看一下如何用矩阵解上述二元一次方程组.

在用矩阵解这个方程组之前，不难发现下面的事实：

①交换方程组中任意一个方程的位置，方程组的解不变；

②方程组中任意一个方程的两边都乘或除以同一个非零数，方程组的解不变；

③方程组中任意一个方程的两边都加上或减去方程组中的另外一个方程，方程组的解不变.

上述事实是方程组的同解原理，它保证变形后的方程组的解不变.

解上述二元一次方程组，就是运用方程组的同解原理把表示上述二元一次方程组的矩阵

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

逐渐转化为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\end{pmatrix}$$

的形式. 此时二元一次方程组的解为$\begin{cases}x=a,\\ y=b.\end{cases}$

下面我们给出具体的变形过程：

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行}-\text{第 1 行}}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行与第 1 行互换}}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行}-\text{第 1 行}\times 3}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行}\times\left(-\frac{1}{7}\right)}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -\frac{11}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 1 行}-\text{第 2 行}\times 3}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{19}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{11}{7}\end{pmatrix}$$

当未知数不断增多时，用矩阵解方程组的作用会更加明显.

二、拓展性问题

1. 我国古代数学名题

(1)《九章算术》中有一道题，原文是："今有善行者行一百步，不善行者行六十步. 今不善行者先行一百步，善行者追之，问几何步及之." 意思是：同样时间段内，走路快的人能走 100 步，走路慢的人只能走 60 步. 走路慢的人先走 100 步，走路快的人走多少步才能追上走路慢的人?

答案：设走路快的人走 x 步才能追上走路慢的人，此时走路慢的人走了 y 步，则

$$\begin{cases}x-y=100,\\ x=\dfrac{100}{60}y,\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x=250,\\ y=150.\end{cases}$$

(2)《孙子算经》中有一道题，原文是："今有木，不知长短. 引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺. 木长几何?" 意思是：用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺. 将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺，问木长多少尺.

答案：设木长 x 尺、绳子长 y 尺，则

$$\begin{cases}y=x+4.5,\\ \dfrac{1}{2}y=x-1.\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x=6.5,\\ y=11.\end{cases}$$

(3) 我国民间流传着这样一道题：只闻隔壁人分银，不知多少银和人；每人 7 两多 7 两，每人半斤少半斤. 试问各位善算者，多少人分多少银.（注：古代 1 斤＝16 两.）

答案：设有 x 人，分 y 两银，则

$$\begin{cases}7x=y-7,\\ 8x=y+8.\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x=15,\\ y=112.\end{cases}$$

2. 步行者与公交车问题

小王沿街匀速行走，发现每隔 6 min 从背后驶过一辆 18 路公交车，每隔 3 min 从迎面驶来一辆 18 路公交车. 假设每辆 18 路公交车行驶速度相同，而且 18 路公交车总站每隔固定时间发一辆车.

(1) 18 路公交车行驶速度是小王行走速度的多少倍?

(2) 18 路公交车总站间隔多长时间发一辆车?

答案：设 18 路公交车的速度是 x m/min，小王行走的速度是 y m /min，相邻两车的距离为 s m.

每隔 6 min 从背后驶过一辆 18 路公交车，当背后驶过的公交车行驶的路程是 $6x$ m 时，小王行走的路程是 $6y$ m，此时刚刚驶过的公交车比小王行走的路程多 s m，也就是相邻两车的距离，即

$$6x-6y=s. \qquad ①$$

每隔 3 min 从迎面驶来一辆 18 路公交车，当迎面刚刚驶来的公交车驶过的路程是 $3x$ m 时，小王行走的路程是 $3y$ m，此时迎面驶来的公交车与小王行走的路程的和是 s m，也就是两车的距离，即

$$3x+3y=s. \qquad ②$$

由①②，可得 $x=3y$. 所以 $\frac{s}{x}=4$.

因此，18 路公交车的行驶速度是小王行走速度的 3 倍，18 路公交车总站间隔 4 min 发一辆车.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章主要内容是：二元一次方程组及其相关概念，消元思想和代入法、加减法解二元一次方程组，利用二元一次方程组解决实际问题. 对于二元一次方程组的相关概念，主要考查学生是否知道什么是二元一次方程组，什么是二元一次方程组的解；对于解二元一次方程组，主要考查学生能否熟练地利用代入消元法和加减消元法解二元一次方程组；对于利用二元一次方程组解决实际问题，主要考查学生能否建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，并利用二元一次方程组解决实际问题.

2. 本章的考查应注意以下问题：

(1) 能否选择恰当的方法（代入法或加减法）解二元一次方程组，解方程组的熟练程度，检验方程组的解.

(2) 能否正确建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，检验求得的结果是否合理.

3. 除纸笔测试这种结果性评价外，还要关注对学生在学习过程中表现的过程性评价. 既要注重培养学生消元思想和化归思想，又要关注学生在解决实际问题、探索数量关系等活动中的参与程度和思维水平. 例如，让学生以小组合作学习的形式，分析解决一些开放性的问题，并说出心得体会，在学生的交流中对其进行评价. 让学生主动观察生活实际，据此编制有关应用问题，从学生编制的应用问题中评价其应用意识的水平.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

(一) 选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 下列方程组中是二元一次方程组的是（　　）.

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=4,\\x-y=1.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}4x+3y=6,\\2y+z=4.\end{cases}$　　(C) $\begin{cases}x+y=4,\\x-y=1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x+y=5,\\x^2+y^2=13.\end{cases}$

2. 如果方程 $x-y=3$ 与下面方程中的一个组成的方程组的解为$\begin{cases}x=4,\\y=1,\end{cases}$那么这个方程可以是(　　).

(A) $3x-4y=16$　　(B) $\dfrac{1}{4}x+2y=5$　　(C) $\dfrac{1}{2}x+3y=8$　　(D) $2(x-y)=6y$

3. 由$\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$可以得到用 x 表示 y 的式子为(　　).

(A) $y=\dfrac{2x-2}{3}$　　(B) $y=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{3}$　　(C) $y=\dfrac{2x}{3}-2$　　(D) $y=2-\dfrac{2}{3}x$

4. 方程组$\begin{cases}x-y=1,\\2x+y=5\end{cases}$的解是(　　).

(A) $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$　　(C) $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

5. 已知 $x=4$，$y=-2$ 与 $x=-2$，$y=-5$ 都是方程 $y=kx+b$ 的解，则 k 与 b 的值分别为(　　).

(A) $k=\dfrac{1}{2}$，$b=-4$　　(B) $k=-\dfrac{1}{2}$，$b=4$　　(C) $k=\dfrac{1}{2}$，$b=4$　　(D) $k=-\dfrac{1}{2}$，$b=-4$

6. 某班为奖励在校运动会上取得好成绩的同学，花了 200 元钱购买甲、乙两种奖品共 30 件，其中甲种奖品每件 8 元，乙种奖品每件 6 元. 若设购买甲种奖品 x 件，乙种奖品 y 件，则所列方程组正确的是(　　).

(A) $\begin{cases}x+y=30,\\6x+8y=200.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x+y=30,\\8x+6y=200.\end{cases}$　　(C) $\begin{cases}6x+8y=30,\\x+y=200.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}8x+6y=30,\\x+y=200.\end{cases}$

(二) **填空题**（每小题 6 分，共 24 分）

7. 已知 $x=1$，$y=-8$ 是方程 $3mx-y=-1$ 的解，则 m 的值为________.

8. 已知 x，y 满足方程组$\begin{cases}2x+y=5,\\x+2y=4,\end{cases}$则 $x-y$ 的值为________.

9. 若$(3x-y+5)^2+|2x-y+3|=0$，则 $x+y$ 的值为________.

10. 用 16 元钱买了 80 分、120 分的两种邮票共 17 枚，则买了 80 分的邮票________枚，120 分的邮票________枚.

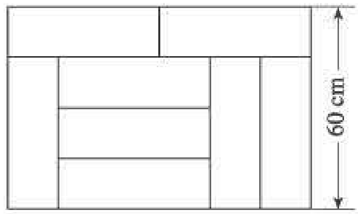
(三) **解答题**（第 11 题 20 分，第 12，13 题每题 10 分，共 40 分）

11. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+4y=2,\\2x-y=5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{x}{4}-y=-1,\\x=3y;\end{cases}$　　(3) $\begin{cases}3(x+y)-4(x-y)=4,\\\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{6}=1.\end{cases}$

12. 几个人一起买物品，若每人出 8 元，则盈余 3 元；若每人出 7 元，则还差 4 元. 人数和价格各是多少?

13. 如图，8 块相同的长方形地砖拼成一个长方形，每块长方形地砖的长和宽分别是多少？



（第 13 题）

（四）选做题（共 10 分）

14. 解三元一次方程组

$$\begin{cases}x+2y+3z=14,\\2x+y+z=7,\\3x+y+2z=11.\end{cases}$$

参考答案

1. C. 本题主要考查学生对二元一次方程组概念的理解.

2. D. 本题主要考查学生对二元一次方程组的解的概念的理解.

3. C. 本题主要考查学生代数式的恒等变形能力.

4. D. 本题主要考查学生解二元一次方程组的能力.

5. A. 本题主要考查学生对二元一次方程组的解的理解，以及解二元一次方程组的能力.

6. B. 本题主要考查学生建立实际问题的数学模型——二元一次方程组的能力.

7. -3. 本题主要考查学生对二元一次方程的解的理解.

8. 1. 本题主要考查学生对二元一次方程组灵活变形的能力.

9. -3. 本题主要考查学生对平方和绝对值的性质的理解，以及解二元一次方程组的能力.

10. 11，6 . 本题主要考查学生运用二元一次方程组解决实际问题的能力.

11. （1）$\begin{cases}x=2,\\y=-1;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x=12,\\y=4;\end{cases}$ （3）$\begin{cases}x=\dfrac{17}{15},\\y=\dfrac{11}{15}.\end{cases}$ 本题主要考查学生解二元一次方程组的能力.

12. 共有 7 人，价格为 53 元. 提示：设共有 x 人，价格为 y 元，则 $\begin{cases}8x=y+3,\\7x=y-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=7,\\y=53.\end{cases}$ 本题主要考查学生建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，以及解二元一次方程组的能力.

13. 每块长方形地砖的长是 45 cm，宽是 15 cm. 提示：设每块长方形地砖的长是 x cm，宽是 y cm，则 $\begin{cases}2x=x+3y,\\x+y=60,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=45,\\y=15.\end{cases}$ 本题主要考查学生由图形提取信息，建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，以及解二元一次方程组的能力.

14. $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3.\end{cases}$ 本题主要考查学生解三元一次方程组的能力.

第十六章　不等式与不等式组

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 了解一元一次不等式及其相关概念，经历“把实际问题抽象为不等式”的过程，能够“列出不等式或不等式组表示问题中的不等关系”，体会不等式是刻画现实世界中不等关系的一种有效的数学模型.

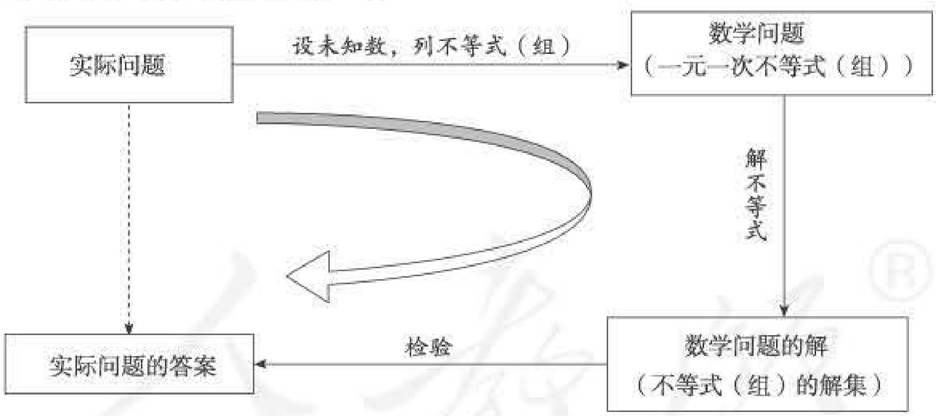
2. 通过观察、对比和归纳，探索不等式的性质，能利用它们探究一元一次不等式的解法.

3. 了解解一元一次不等式的基本目标（使不等式逐步转化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式），熟悉解一元一次不等式的一般步骤，掌握一元一次不等式的解法，并能在数轴上表示出解集，体会解法中蕴含的化归思想.

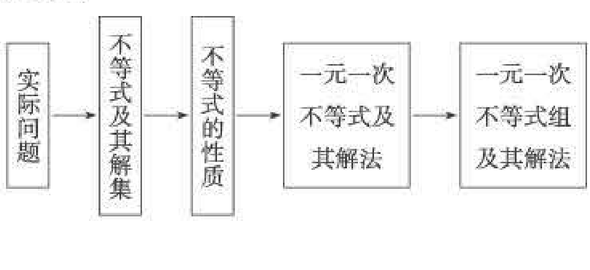
4. 了解不等式组及其相关概念，会解由两个一元一次不等式组成的不等式组，并会用数轴确定解集.

二、本章知识结构框图

1. 利用不等式解决实际问题的基本过程



2. 本章知识安排的前后顺序



三、内容安排

本章的主要内容包括：不等式及其解集，不等式的性质，一元一次不等式（组）及其相关概念，一元一次不等式（组）的解法及其解集的几何表示，利用一元一次不等式分析与解决实际问题. 其中，以不等式为工具分析问题、解决问题是重点；一元一次不等式（组）及其相关概念、不等式的性质是基础知识；一元一次不等式（组）的解法及解集的几何表示是基本技能. 本章注重体现列不等式中蕴含的建模思想和解不等式中蕴含的化归思想.

第 16.1 节中，首先以实际问题为例，结合问题中的不等关系，引出不等式及其解集的概念，然后类比等式性质，通过观察、对比，归纳得出不等式的三个性质，并运用它们解简单的不等式. 不等式的性质是解不等式的重要依据，解不等式就是求出对其中未知数的大小的限制，有了这样明确的目标，再加上对于不等式性质的认识，解不等式的方法就能很自然地产生. 教学中可以类比方程、等式的性质等来讨论不等式、不等式的性质等.

第 16.2 节中，首先介绍了一元一次不等式及其解法，然后利用一元一次不等式解决实际问题. 类比一元一次方程的解法，通过典型例题将化归思想程序化，给出一元一次不等式的解法，并利用归纳栏目概括出一元一次不等式与一元一次方程在解法上的异同及应注意之处. 在具备基本知识和技能基础上，教科书借助两个实际问题（空气质量和购物花费），说明如何建立不等式模型解决实际问题，而这正是本章的核心内容.

第 16.3 节中，结合污水抽取问题，引进了一元一次不等式组及其解集的概念. 在第十五章刚学习了二元一次方程组的基础上，讨论不等式组是比较自然的安排. 这里公共解集中的“公共”，是指各不等式解集的公共部分（交集）. 二元一次方程组的解可以通过消元直接产生，而一元一次不等式组的解集可以借助画出数轴（或在头脑中想象数轴）得出. 在这个问题上借助直观容易确定不等式的解集.

四、课时安排

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

16.1 不等式	约 3 课时
16.2 一元一次不等式	约 4 课时
16.3 一元一次不等式组	约 3 课时
数学活动	
小结	约 2 课时

五、编写本章时考虑的问题

使学生经历建立一元一次不等式这样的数学模型并应用它解决实际问题的过程，体会不等式的特点和作用，掌握运用它们解决问题的一般方法，提高分析问题、解决问题的能力，增强创新精神和应用数学的意识，是本章的中心任务. 由于不等式所解决的是含有不等关系的问题，这与以前较多讨论的等量关系既有联系又有区别，所以学习本章时会遇到如何通过比较新旧知识取得新进展的

问题. 因此，本章编写时从指导思想和内容安排方面主要考虑了以下两个问题.

1. 突出建模思想，实际问题作为大背景贯穿全章

同前面的“第十一章　一元一次方程”“第十五章　二元一次方程组”一样，本章安排了一些有代表性的实际问题作为知识的发生、发展的背景材料，实际问题贯穿全章，对不等式等概念及其应用的讨论，都是在建立和运用不等式这种数学模型的过程中进行的.

引入不等式及不等式的解时，教科书选用了一个行程问题，引导学生从时间和路程两个不同角度考虑这个问题，然后再引导学生列出含未知数的式子表示有关的量，并进一步依据不等关系列出含未知数的不等式.

讨论一元一次不等式时，“如何根据实际问题列不等式”是重点讨论的问题. 教科书选用了生活中常见的有关空气质量和购物花费两个问题，让学生进一步学习如何利用不等式将实际问题转化为数学问题. 例如，解决空气质量良好天数这个问题时，就需要将实际问题情境中的“明年（365天）这样的比值要超过 70%”，转化为不等式“$\dfrac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$”，采用符号后，进一步转化为$\dfrac{x+365\times60\%}{365}>70\%$. 这种“转化”就是一个数学抽象的过程，其中蕴含了符号化、模型化的思想.

此外，教科书在练习和习题中也选配了不同背景的实际问题. 总之，实际问题在本章中既是线索、素材，又是检验教学效果的尺度.

2. 注重知识的前后联系，强调通过比较来认识新事物

本章在全套教科书中，位居一次方程（组）之后. 方程（组）是讨论等量关系的数学工具，不等式（组）是讨论不等关系的数学工具. 两者既有联系又有差异. 在认识一次方程（组）的基础上，通过类比的方式接受新知识——一元一次不等式（组），充分发挥心理学所说的正向迁移的作用，可以起到很好的温故而知新的效果.

第 16.1 节的结构与一元一次方程的相应部分类似，教科书在各概念的引入、展开时注意类比方程、等式的性质等来讨论不等式、不等式的性质等，反映了知识间的横向联系，突出了不等式的特点.

解方程与解不等式都是通过适当的式子变形，使未知数转化为已知，但两者的目标有所不同，前者要转化为 $x=a$ 的形式，后者则要转化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式. 为实现这样的目标，都需要运用化归思想，根据等式或不等式的性质，对方程或不等式进行由繁至简的变形. 在 16.2 节探讨一元一次不等式解法时，教科书注意了这样的联系，类比解方程的步骤介绍了解不等式的步骤. 同时又强调了解不等式与解方程的不同之处，突出了应注意的问题，例如当不等式的两边乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向改变.

方程组与不等式组在形式上类似，而且方程组的解是组成方程组的各方程解集的公共部分，不等式组的解集是组成不等式组的各不等式解集的公共部分，这也有类似之处. 教科书在第 16.3 节引入不等式组及其解集时注意渗透了这种联系.

六、对本章教学的建议

使用本章进行教学时，应关注以下问题.

1. **注重类比，做好从方程到不等式的迁移**

从《课程标准》看，方程与不等式是同属“数与代数”领域内同一标题下的两部分内容，它们之间有密切的联系，存在许多可以进行类比的内容. 在前面学过有关方程（组）内容的基础上，学生已经对方程有一定的认识，会用方程表示问题情境中的等量关系，会解一元一次方程和二元一次方程组，即对于方程的认识已经具备一定的积累. 充分发挥心理学中正向迁移的积极作用，借助已有的对方程的认识，可以为进一步学习不等式（组）提供一条合理的学习之路.

本章的主要内容有不等式的性质、一元一次不等式（组）、一元一次不等式（组）的解法、利用不等式分析解决实际问题等，它们与等式的性质、一元一次方程、一元一次方程的解法、方程组、利用方程分析解决实际问题等有明显的对应关系，其中有许多共同点，不同之处在于方程是表达相等关系的数学模型，不等式是表达不等关系的数学模型. 了解它们的联系与区别（例如通过类比等式性质学习不等式性质），有助于学生在已有知识基础上以效率较高的方式得到新的提高.

2. **重视数学思想，由思想到方法、步骤**

本章所涉及的数学思想主要包括两个：一个是由实际问题抽象为不等式这个过程中蕴含的符号化、模型化的思想，另一个是解不等式（组）的过程中蕴含的化归思想.

数学建模的思想在前面章节（如方程）已有渗透，只不过本章的学习对象是不等式. 因此，本章教学时，需要以不等式的知识为载体，将符号化、模型化的思想进一步发展和加强. 在这个思想指导下，需要教师引导学生完成用数学模型表示和解决实际问题的步骤：正确地理解问题情境，分析其中的不等关系，设未知数，列不等式等.

解不等式（组），最终要使不等式（组）变形为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，即依据不等式的性质，使不等式（组）逐步化简，直至明确求出未知数的大小范围. 在教学中，需要注意指导学生由这种化归的思想，类比解方程，获得解不等式的步骤，即关注“如何由思想转化为具体的步骤”，而不是单纯地教步骤、教操作.

总之，数学思想是通过数学知识的载体来体现的，对于它们的认识不是一次完成的，而需要一个逐步认识的过程，既需要教科书的不断渗透，也需要教师的经常点拨，这样有利于学生感受和理解它们. 数学思想对一个人的影响往往要大于具体的数学知识，因此，教学中应在如何深入浅出地进行数学思想的渗透传播方面不断探索.

3. **关注基础知识和基本技能**

虽然以不等式为工具分析问题、解决问题是本章的重难点，但是教科书编写时，对于基本知识和基本技能也给予了充分的关注. 例如安排一元一次不等式内容时，采用了“概念—解法—应用”的结构，即先利用简单的一元一次不等式完成一元一次不等式概念和解法这些基本知识和基本技能的学习，然后再利用实际问题学习一元一次不等式的应用. 因此，在本章教学时，应注意打好基础，对基础知识和基本技能、能力等进行及时地归纳整理，安排必要的、适量的练习，使得学生对基础知识留下较深刻的印象，对基本技能达到一定的掌握程度，发展基本能力. 如此一来，不仅有利于突破本章的教学重难点，而且对于理解和掌握后续知识（其他的不等式以及函数等）的学习会有很大的帮助.

第十六章　不等式与不等式组

数量有大小之分，它们之间有相等关系，也有不等关系.[1] 现实世界和日常生活中存在大量涉及不等关系的问题. 例如，当两家商场推出不同的优惠方案时，到哪家商场购物花费少？这个问题就蕴含了不等关系. 对于这样的问题，我们常常把要比较的对象数量化，分析其中的不等关系，列出相应的数学式子——不等式（组），并通过解不等式（组）而得出结论. 这样的思路与利用方程（组）研究相等关系是类似的.

本章我们将从什么是不等式说起，类比等式和方程，讨论不等式的性质，学习一元一次不等式（组）及其解法，并利用这些知识解决一些问题，感受不等式在研究不等关系问题中的重要作用.

Ⅱ 教材分析

[1] 数量有大小之分，这是人们熟知的客观事实. 有大小，就会有相等或不等. 用等式（包括方程）可以研究相等关系，要研究不等关系也需要专门的数学工具，这就是不等式.

[2] 这幅章前图是一个大型商场内部的实景照片，它与第 16.2 节的选择购物商场问题的情境相配合.

[3] 章前图中的文字和不等式出自第 16.2 节的选择购物商场问题，它们出现在本章章前图中，可以从一个侧面反映不等式在实际问题中的应用.

1. 等式表示相等关系，方程是含未知数的等式，它是应用广泛的数学工具. 不等式表示不等关系，不等式中可以含未知数，它也是应用广泛的数学工具. 方程与不等式有许多可以类比之处，它们在义务教育阶段的数学课程体系中构成一个重要的方面. 教学之前应先分析以前的哪些知识对本章影响较大.

2. 引言中以选择购物商场为例说明现实世界和日常生活中存在大量涉及不等关系的问题，解不等式的问题，留待本章正文讨论. 教学中需注意充分发挥引言的“导引”的作用，激发学生学习不等式的兴趣，并从整体上初步了解本章的知识线索.

3. 本章编写时，一方面，实际问题情境贯穿于全章始终，实际问题在本章中占有突出地位；另一方面，知识层次分明，从概念到解法再到应用. 教学中应注意把握好这两个方面.

16.1 不等式

16.1.1 不等式及其解集

问题 一辆匀速行驶的汽车在 11:20 距离 A 地 50 km，要在 12:00 之前驶过 A 地，车速应满足什么条件？

分析：设车速是 x km/h.

从时间上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 50 km 所用的时间不到 $\frac{2}{3}$ h，[1] 即

$$\frac{50}{x}<\frac{2}{3}. \qquad ①$$

从路程上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 $\frac{2}{3}$ h 的路程要超过 50 km，即

$$\frac{2}{3}x>50. \qquad ②$$

式子①和②从不同角度表示了车速应满足的条件.[2]

像①和②这样用符号“<”或“>”表示大小关系的式子，叫做**不等式**（inequality）. 像 $a+2\neq a-2$ 这样用符号“≠”表示不等关系的式子也是不等式.[3]

有些不等式中不含未知数，例如 $3<4$，$-1>-2$. 有些不等式中含有未知数，例如①和②式中字母 x 表示未知数.

虽然①和②式表示了车速应满足的条件，但是我们希望更明确地得出 x 应取哪些值. 例如对不等式②，[4] 当 $x=80$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=78$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=75$ 时，$\frac{2}{3}x=50$；当 $x=72$ 时，$\frac{2}{3}x<50$. 这就是说，当 x 取某些值（如 80，78）时，不等式 $\frac{2}{3}x>50$ 成立；当 x 取某些值（如 75，72）时，不等式 $\frac{2}{3}x>50$ 不成立. 与方程的解类似，我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**.[5]

28 第十六章 不等式与不等式组

[1] 从问题中有关时间的信息可知，汽车行驶 50 km（驶过 A 地）所用时间，必须在 11:00～12:00 这 40 min 之内，即所用时间要小于 $\frac{2}{3}$ h.

[2] ①式中的 $\frac{50}{x}$ 是 $\frac{路程}{速度}$，表示行驶时间；②式中的 $\frac{2}{3}x$ 是“时间×速度”，表示行驶路程.

[3] “>”是大于号，读作“大于”；“<”是小于号，读作“小于”；“≠”是不等于号，读作“不等于”，它表示“大于”或“小于”. 这 3 个符号统称不等号.

[4] 由于不等式①中未知数在分母中，①属于分式不等式，所以我们暂不讨论.

[5] 一般地，不等式的一个解是满足不等式的未知数的一个值. 此处暂不继续讨论如何解 $\frac{2}{3}x>50$，学习了后面内容，这个悬念便能得到解决.

1. 本节先通过一个具体行程问题，引导学生从时间和路程两个不同角度考虑：汽车到达 A 地的行驶时间要小于 $\frac{2}{3}$ h；或者说，汽车行驶 $\frac{2}{3}$ h 所走路程要大于 50 km. 这两个不等关系实际上是一致的，是从两个不同角度看同一个问题，选取其中任何一个不等关系都可以列不等式解决本题. 这里列两个不等式体现解决问题的方法有多种，不等式的形式也有多种.

2. 代数不等式也可以根据未知数是否在分母中分为整式不等式和分式不等式，本章只讨论最简单的一元一次不等式（组）的解法，为此对于不等式①，教科书的处理是只列出而不进行更深入的讨论. 下面只对不等式②进行进一步讨论，从中引出不等式的解的概念.

3. 未知数取某个值时不等式能够成立，这个值就是不等式的一个解. 教学中，对于这个概念，应结合具体例子让学生认识. 不等式可以有

例如80和78是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解，而75和72不是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解.

思考

除了80和78，不等式$\frac{2}{3}x>50$还有其他解吗？如果有，这些解应满足什么条件？[1]

可以发现，当$x>75$时，不等式$\frac{2}{3}x>50$总成立；而当$x<75$或$x=75$时，不等式$\frac{2}{3}x>50$不成立. 这就是说，任何一个大于75的数都是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解，这样的解有无数个；任何一个小于或等于75的数都不是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解. 因此，$x>75$表示了能使不等式$\frac{2}{3}x>50$成立的x的取值范围，它可以在数轴上表示[2]（图16.1-1）.

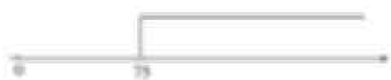


图16.1-1

在表示75的点上画空心圆圈，表示不包含这一点.

由上可知，在前面问题中，汽车要在12:00之前驶过A地，车速必须大于75 km/h.

由不等式①能得出这个结果吗？[4]

一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的**解集**[3]（solution set）. 求不等式的解集的过程叫做**解不等式**.[5]

练习

1. 用不等式表示：

(1) a是正数；　　(2) a是负数；

(3) a与5的和小于7；　　(4) a与2的差大于-1；

(5) a的4倍大于8；　　(6) a的一半小于3.

第十六章　不等式与不等式组　29

[1] 一般地，不等式的解不止一个，甚至可以有无数多个. 例如，$\frac{2}{3}x>50$有无数多个解，而这些解都满足条件$x>75$.

[2] 数轴可以看作是由它上面的所有点组成的集合，每个点都表示一个实数，数轴上的点与实数一一对应.

[3] 不等式的解集是由不等式的所有解组成的集合. 这里集合是个原始概念，不对它下定义，但可以借助例子解释. 例如，一个班是由它的所有学生组成的集合.

[4] 让学生验证可知，当$x>75$时不等式①成立，因此由不等式①可得同样的结果.

[5] 解不等式是要求出不等式的解集，即得出一个集合.

无数多个解，这些解应满足什么条件？对这一点也应结合具体例子，让学生通过比较来发现规律. 第16.1.1小节“思考”中的问题就是为此设计的.

4. 不等式的解集的概念是不等式的解的概念的发展. 不等式的解是对孤立的数值而言的，而不等式的解集则是对这些数值的整体而言的. 它们是元素与集合的关系，通俗说是个体成员与集体的关系，教学中可以借助一些通俗的事例对此进行解释. 务必使学生认识到不等式的解集包括了不等式的全体的解，解集中任何一个数都是不等式的一个解.

本节中，对于不等式的解集的表示方法主要有两种：一是用式子形式（如$x>2$），即用最简形式的不等式（$x>a$或$x<a$）表示；另一是用数轴，标出数轴上的某一区间，其中的点对应的数值都是不等式的解. 这两种形式分别是用“数”和“形”表示不等式的解集.

练习答案

1. (1) $a>0$；
   (2) $a<0$；
   (3) $a+5<7$；
   (4) $a-2>-1$；
   (5) $4a>8$；
   (6) $\frac{1}{2}a<3$.
2. 3.2，4.8，8，12 是不等式的解，其余数不是.
3. (1) $x>3$；
   (2) $x<4$；
   (3) $x>2$.

2. 下列数中哪些是不等式 $x+3>6$ 的解？哪些不是？

$$-4,\ -2.5,\ 0,\ 1,\ 2.5,\ 3,\ 3.2,\ 4.8,\ 8,\ 12.$$

3. 直接说出下列不等式的解集：

(1) $x+3>6$；　(2) $2x<8$；　(3) $x-2>0$.

16.1.2　不等式的性质

对于某些简单的不等式，我们可以直接得出它们的解集，例如不等式 $x+3>6$ 的解集是 $x>3$，不等式 $2x<8$ 的解集是 $x<4$. 但是对于比较复杂的不等式，例如 $\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接得出解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式. 与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需要依据不等式的性质. 为此，我们先来看看不等式有什么性质.[1]

我们知道，等式两边加或减同一个数（或式子），乘或除以同一个数（除数不为 0），结果仍相等. 不等式是否也有类似的性质呢？

思考

用“>”或“<”填空，并总结其中的规律.[2]

(1) $5>3$，$5+2$ ____ $3+2$，$5-2$ ____ $3-2$；

(2) $-1<3$，$-1+3$ ____ $3+3$，$-1-3$ ____ $3-3$；

(3) $6>2$，6×5 ____ 2×5，$6\times(-5)$ ____ $2\times(-5)$；

(4) $-2<3$，$(-2)\times6$ ____ 3×6，$(-2)\times(-6)$ ____ $3\times(-6)$.

根据发现的规律填空：当不等式两边加或减同一个数（正数或负数）时，不等号的方向________；当不等式两边乘同一个正数时，不等号的方向________；而乘同一个负数时，不等号的方向________.[3]

换一些其他的数，验证这个发现.

30　第十六章　不等式与不等式组

[1] 这里是通过计算和比较，从特殊到一般，从具体到抽象地归纳出不等式的性质.

[2] (1) >，>；
(2) <，<；
(3) >，<；
(4) <，>.

[3] 不变，不变，改变.

5. 求不等式的解集的过程，叫做解不等式. 一般地，只求出不等式的部分解并没有达到解不等式的要求，解不等式的结果应是一个解集.

6. 为解不等式，需要先讨论不等式的基本性质，它们是解不等式的依据. 教科书设计了“思考”栏目，通过观察具体数字运算的大小比较，联系学过的等式的性质，让学生归纳出不等式的三条性质，并分别用式子的形式表示它们. 用式子表示是个抽象概括的过程，只有理解了相关内容才会概括并表示它们.

等式性质与不等式性质的主要区别在于“等号”与“不等号”，特别是不等式的两边乘同一个非 0 数时，需要分这个数是正还是负两种情况考虑. 对于乘负数要改变不等号的方向要格外留意.

7. 不等式的性质是本章的基础知识，教学中注意让学生经历从观察具体数值到获得猜想（即归纳一般规律），再到应用性质的过程，但并

一般地，不等式有以下性质.

不等式的性质 1 不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，那么 } a\pm c>b\pm c.}$$

不等式的性质 2 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c>0\text{，那么 } ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right).}$$

不等式的性质 3 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.[1]

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c<0\text{，那么 } ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).}$$

比较上面的性质 2 和性质 3，指出它们有什么区别. 再比较等式的性质和不等式的性质，它们有什么异同？[2]

练习

设 $a>b$，用“<”“>”填空：

(1) $a+2$ ___ $b+2$；　(2) $a-3$ ___ $b-3$；

(3) $-4a$ ___ $-4b$；　(4) $\frac{a}{2}$ ___ $\frac{b}{2}$.

例 1 利用不等式的性质解下列不等式：[3]

(1) $x-7>26$；　(2) $3x<2x+1$；

(3) $\frac{2}{3}x>50$；　(4) $-4x>3$.

分析： 解不等式，就是要借助不等式的性质使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$（a 为常数）的形式.

解： (1) 根据不等式的性质 1，不等式两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7,$$

$$x>33.$$

第十六章　不等式与不等式组　31

[1] 性质 3 的认识需要与性质 2 进行对比，还可以用具体数值加以说明.

[2] 等式的性质有两条，它们表明了等式两边进行同样的加（减）、乘（除）运算时，相等关系不变. 不等式的性质有三条，它们表明了不等式两边进行同样的加（减）、乘（除）运算时，大小关系有时不变，有时改变. 对于乘法运算，不等式性质要分乘数的正、负分别论述，两者的结果不同.

练习答案

(1) $>$；
(2) $>$；
(3) $<$；
(4) $>$.

[3] 这些不等式比较简单，可以利用不等式的性质直接求解，从而使学生加深对这些性质的认识.

不要求用求差法对这些性质进行证明.

8. 例 1 的设计目的是巩固对不等式性质的理解，体会这些性质在解不等式中的作用. 例 1 中的 4 个不等式都是很简单的一元一次不等式，分析中指出了解不等式的目的，即使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式. 为达到这个目的，就需要对不等式进行变形，变形的依据就是不等式的性质. 这些不等式的求解过程，分别运用了不等式的性质 1，2 和 3. 教学中注意化归思想的渗透.

在等式的性质后也有例 1 这种类型的例题，不同之处是例 1 不仅要根据性质解题，而且增加了对结果的几何表示. 由于例 1 是解不等式的开始，所以此处对不等式的解集除用式子表示外，再用数轴表示很有必要. 一方面可以加深学生对不等式的解集以及解不等式的理解，另一方面也为学生后面学习不等式组时用数轴确定不等式组的解集作了准备.

[1] $x \geqslant a$ 表示 $x>a$ 或者 $x=a$；$x \leqslant a$ 表示 $x<a$ 或者 $x=a$. “≥”和“≤”分别比“>”和“<”各多了一层含义.

[2] 若 $a \geqslant b$，则

①$a \pm c \geqslant b \pm c$；

②$ac \geqslant bc$（$c>0$）；

③$ac \leqslant bc$（$c<0$）.

（2）根据不等式的性质1，不等式两边减 $2x$，不等号的方向不变，所以

$$3x-2x<2x+1-2x,$$
$$x<1.$$

（3）根据不等式的性质2，不等式两边乘 $\frac{3}{2}$，不等号的方向不变，所以

$$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}x>\frac{3}{2}\times 50,$$
$$x>75.$$

（4）根据不等式的性质3，不等式两边除以 -4，不等号的方向改变，所以

$$\frac{-4x}{-4}<\frac{3}{-4},$$
$$x<-\frac{3}{4}.$$

不等式的解集也可以在数轴上表示，如上例中不等式 $x-7>26$ 的解集在数轴上的表示如图16.1-2所示.

图16.1-2

不等式 $3x<2x+1$ 的解集在数轴上的表示如图16.1-3所示.

图16.1-3

请你在数轴上表示例1中其他两个不等式的解集.

像 $a \geqslant b$ 或 $a \leqslant b$ 这样的式子，也经常用来表示两个数量的大小关系. 例如，为了表示2011年9月1日北京的最低气温是19 ℃，最高气温是28 ℃，我们可以用 t 表示这天的气温，t 是随时间变化的，但是它有一定的变化范围，即 $t \geqslant 19$ ℃并且 $t \leqslant 28$ ℃. 符号“≥”读作“大于或等于”，也可说是“不小于”；符号“≤”读作“小于或等于”，也可说是“不大于”. $a \geqslant b$ 或 $a \leqslant b$ 形式的式子，具有与前面所说的不等式的性质类似的性质.[2]

符号“≥”与“>”的意思有什么区别？“≤”与“<”呢？[1]

32 第十六章 不等式与不等式组

9. 教科书给出了例1的第（1）（2）小题解集的数轴表示，后面的2个小题要求学生完成. 教学中应注意，解完全部题目后应引导学生总结不等式的性质以及解集的两种表示形式.

10. 由于解方程中在式子两边同时除以未知数的系数时不需要特别关注系数的正负，所以在解不等式时，学生容易忽略不等号的方向问题，这是学习新知识过程中的新问题，对此可以结合本节例1的第（3）（4）小题提醒学生予以注意.

11. 符号“≥”和“≤”分别比“>”和“<”各多了一层相等的含义，它们是不等号与等号的合写形式. 通常我们把用符号“≥”和“≤”表示大小关系的式子，也称为不等式. 它们具有类似前面所说的不等式的性质，只是要把“>”和“<”改为“≥”和“≤”，因此这些不等式的解法可以不单独讨论.

12. 本节例2是关于容积与容器内液体体积的问题，题中的基本数量关系为：容器中液体体

例2 某长方体形状的容器长 5 cm，宽 3 cm，高 10 cm. 容器内原有水的高度为 3 cm，现准备向它继续注水. 用 V（单位：cm^3）表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围.

解： 新注入水的体积 V 与原有水的体积的和不能超过容器的容积[1]，即

$$V+3\times5\times3\leqslant3\times5\times10,$$

$$V\leqslant105.$$

又由于新注入水的体积 V 不能是负数，因此，V 的取值范围是

$$V\geqslant0 \text{ 并且 } V\leqslant105.$$

在数轴上表示 V 的取值范围如图 16.1-4 所示.

图 16.1-4

在表示 0 和 105 的点上画实心圆点，表示取值范围包含这两个数.

练习

1. 用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+5>-1$； (2) $4x<3x-5$；

(3) $\frac{1}{7}x<\frac{6}{7}$； (4) $-8x>10$.

2. 用不等式表示下列语句，写出它们的解集，并在数轴上表示解集：

(1) x 的 3 倍大于或等于 1； (2) x 与 3 的和不小于 6；

(3) y 与 1 的差不大于 0； (4) y 的 $\frac{1}{4}$ 小于或等于 -2.

习题 16.1

复习巩固

1. 下列数值中哪些是不等式 $2x+3>9$ 的解？哪些不是？

$-4,\ -2,\ 0,\ 3,\ 3.01,\ 4,\ 6,\ 100.$

第十六章 不等式与不等式组 33

[1] 容器中水的体积≤容积.

练习答案

1. (1) $x>-6$；
   (2) $x<-5$；
   (3) $x<6$；
   (4) $x<-\frac{5}{4}$.
2. (1) $3x\geqslant1$，$x\geqslant\frac{1}{3}$；
   (2) $x+3\geqslant6$，$x\geqslant3$；
   (3) $y-1\leqslant0$，$y\leqslant1$；
   (4) $\frac{y}{4}\leqslant-2$，$y\leqslant-8$.

积≤容积，此处展示了一个生活中常见的带有“≤”关系的例子. 教学中需要引导学生注意问题的实际意义，在得出 $V\leqslant105$ 后问题并未完全解决，完整的答案是“$V\geqslant0$ 并且 $V\leqslant105$”，它在数轴上对应一个包含两端点的区间（闭区间）. 此处，教科书未采用连写不等式的表达式 $0\leqslant V\leqslant105$，而是安排在后面第 16.3 节“一元一次不等式组”中首次出现. 这是想分散难点，不在一处出现过多新知识.

习题 16.1

1. “复习巩固”中题目的设计目的主要有三个：(1) 列不等式表示数量的大小关系，培养把“文字语言”翻译成“符号语言”的能力，为进一步列不等式解决实际问题作准备；(2) 复习巩固不等式的解和解集的概念；(3) 复习巩固不等式的性质，从解不等式的目的出发考虑如何运用不等式性质. 这些内容应使学生切实掌握.

[1] $L=40\pm0.02$，是指 L 的最大值为 $40+0.02=40.02$，L 的最小值为 $40-0.02=39.98$.

[2] 饮料罐上所注"蛋白质含量 $\geqslant 0.6\%$"即 $\dfrac{\text{饮料中蛋白质的质量}}{\text{饮料的质量}}\geqslant 0.6\%$.

[3] 一般地，一个两位数可以表示为 $10b+a$. 其中，b 可以是 1～9 的整数，a 可以是 0～9 的整数.

此题中因 a，b 对调后仍是两位数，所以 a 应是 1～9 的整数.

2. 用不等式表示：

(1) a 与 5 的和是正数；(2) a 与 2 的差是负数；

(3) b 与 15 的和小于 27；(4) b 与 12 的差大于 -5；

(5) c 的 4 倍大于或等于 8；(6) c 的一半小于或等于 3；

(7) d 与 e 的和不小于 0；(8) d 与 e 的差不大于 -2.

3. 写出不等式的解集：

(1) $x+2>6$；(2) $2x<10$；

(3) $x-2>0.1$；(4) $-3x<10$.

4. 设 $m>n$，用"<"或">"填空：

(1) $m-5$ ____ $n-5$；(2) $m+4$ ____ $n+4$；

(3) $6m$ ____ $6n$；(4) $-\frac{1}{3}m$ ____ $-\frac{1}{3}n$.

5. 利用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+3>-1$；(2) $6x\leqslant 5x-7$；

(3) $-\frac{1}{3}x<\frac{2}{3}$；(4) $4x\geqslant -12$.

综合运用

6. 设 $a>b$，用"<"或">"填空：

(1) $2a-5$ ______ $2b-5$；

(2) $-3.5b+1$ ______ $-3.5a+1$.

7. 根据机器零件的设计图纸（如图），用不等式表示零件长度的合格尺寸（L 的取值范围）.[1]

8. 一罐饮料净重约 300 g，罐上注有"蛋白质含量 $\geqslant 0.6\%$"，其中蛋白质的含量为多少克？[2]

$L=40\pm0.02$

（第 7 题）

拓广探索

9. 有一个两位数，[3]如果把它的个位上的数 a 和十位上的数 b 对调，那么什么情况下得到的两位数比原来的两位数大？什么情况下得到的两位数比原来的两位数小？什么情况下得到的两位数等于原来的两位数？

34 第十六章 不等式与不等式组

2. "综合运用"的题目有 3 道. 第 6 题要综合运用不等式的几个性质. 第 7 题要根据图纸把设计公差改写为上下两个限制，并用不等式形式表示出来. 第 8 题要根据商品包装上的规格求出蛋白质含量的范围.

3. "拓广探索"的题目是有关数字表示的问题，应让学生考虑题中对两个字母的限制.

阅读与思考

用求差法比较大小[1]

制作某产品有两种用料方案，方案1用4块A型钢板，8块B型钢板；方案2用3块A型钢板，9块B型钢板。A型钢板的面积比B型钢板大，从省料角度考虑，应选哪种方案？

设A型钢板和B型钢板的面积分别为 x 和 y，于是，两种方案用料面积分别为

$$4x+8y \text{ 和 } 3x+9y.$$

现在需要比较上面两个数量的大小。

两个数量的大小可以通过它们的差来判断。如果两个数 a 和 b 比较大小，那么

当 $a>b$ 时，一定有 $a-b>0$；

当 $a=b$ 时，一定有 $a-b=0$；

当 $a<b$ 时，一定有 $a-b<0$。

反过来也对，即

当 $a-b>0$ 时，一定有 $a>b$；

当 $a-b=0$ 时，一定有 $a=b$；

当 $a-b<0$ 时，一定有 $a<b$。[2]

因此，我们经常把两个要比较的对象先数量化，再求它们的差，根据差的正负判断对象的大小。

用求差的方法，你能回答前面的用料问题吗？

[1] 根据两数之差是正数、负数或0，判断两数大小关系的方法叫做求差法.

[2] 两方面合起来，即

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

阅读与思考

这篇供选学用的短文介绍了一种常用的比较两个数量大小的方法——求差法.

根据数学上的规定：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0;$$

产生了比较两个数量大小的求差法. 短文中的问题中，要比较的两个数量为 $4x+8y$ 和 $3x+9y$. 通过计算这两个数的差大于0，便可知 $4x+8y>3x+9y$. 此外，对于两个正数还可以用求商法比较大小，即

若 $a>0$，$b>0$，则

$$\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b;$$
$$\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b;$$
$$\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b.$$

[1] 在一元不等式中，未知数的最高指数就是不等式的次数.

[2] 移项是解不等式时的常用步骤，可以说它是不等式性质 1 的直接结论.

16.2 一元一次不等式

我们已经知道了什么是不等式以及不等式的性质．本节我们将学习一元一次不等式及其解法，并用它解决一些实际问题.

思考

观察下面的不等式：

$$x-7>26，3x<2x+1，\frac{2}{3}x>50，-4x>3.$$

它们有哪些共同特征？

可以发现，上述每个不等式都只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1．类似于一元一次方程，含有一个未知数，未知数的次数是 1 的不等式，叫做**一元一次不等式**[1]（linear inequality in one unknown）.

从上节我们知道，不等式

$$x-7>26$$

的解集是

$$x>33.$$

这个解集是通过“不等式两边都加 7，不等号的方向不变”而得到的．事实上，这相当于由 $x-7>26$ 得 $x>26+7$．这就是说，解不等式时也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向.[2]

一般地，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程相类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集.

例 1 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $2(1+x)<3$；　　(2) $\frac{2+x}{2}\geq\frac{2x-1}{3}$.

解：(1) 去括号，得

$$2+2x<3.$$

移项，得

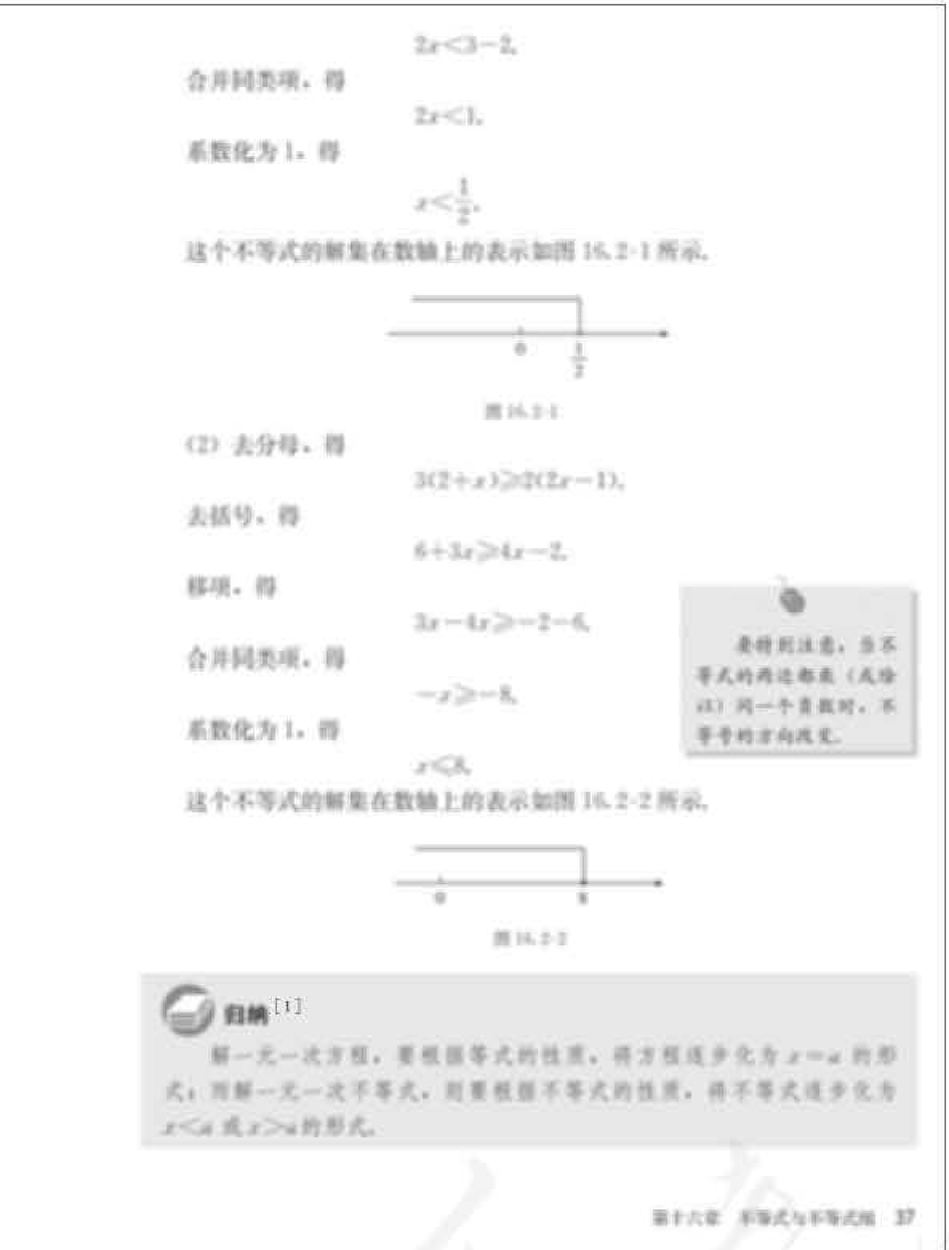
1. 本节讨论与一元一次不等式相关的问题，依次为：

(1) 什么是一元一次不等式？如何解一元一次不等式？(这是本节的基本知识和基本技能.)

(2) 如何根据实际问题列不等式？(这是贯穿全章的中心问题.)

2. 同方程一样，代数不等式也可以按照其中未知数（元）的个数和未知数的最高次数（指数）分类．一元一次不等式是最简单的代数不等式，它是整式不等式．“思考”栏目中的 4 个不等式在第 16.1 节出现过，此时的目的是引导学生从形式上观察它们的共同特征，以获得一元一次不等式的概念．在教学中，可以类比一元一次方程，提示学生观察的要点.

3. 与解方程一样，解一元一次不等式也可以采取相同的步骤：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1．在教学中，一方面注意引导学生类比一元一次方程解一元一次不等式；



$$2x<3-2.$$

合并同类项，得

$$2x<1.$$

系数化为1，得

$$x<\frac{1}{2}.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图16.2-1所示.

图16.2-1

(2) 去分母，得

$$3(2+x)\geqslant 2(2x-1).$$

去括号，得

$$6+3x\geqslant 4x-2.$$

移项，得

$$3x-4x\geqslant -2-6.$$

合并同类项，得

$$-x\geqslant -8.$$

系数化为1，得

$$x\leqslant 8.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图16.2-2所示.

要特别注意，当不等式的两边都乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向改变.

图16.2-2

归纳[1]

解一元一次方程，要根据等式的性质，将方程逐步化为 $x=a$ 的形式；而解一元一次不等式，则要根据不等式的性质，将不等式逐步化为 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式.

第十六章 不等式与不等式组 37

[1] 解方程、解不等式最终是要得到一个一边只有一个未知数，另一边是一个已知数的式子. 对方程来说，这个式子的中间是“=”；对不等式来说，这个式子的中间是“>”或“<”.

另一方面，也要让学生注意解法不同的地方，即“去分母”和“系数化为1”时，会出现“不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变”的情况.

4. 例1安排了两个小题，第（1）小题不等式中含有括号，第（2）小题不等式中含有分母. 目的在于循序渐进地让学生掌握一元一次不等式的解法，并能根据不等式的形式灵活安排解题步骤.

5. 一元一次不等式与一元一次方程既有联系又有区别. 从概念来说，两者化简后都含有一个未知数，未知数的次数都是1，系数都不等于0；但一元一次不等式表示的是不等关系，而一元一次方程表示的是相等关系. 从解法来说，两者都运用化归思想. 本节的“归纳”画龙点睛地指出解方程、解不等式各自化归的方向. 从解的情况来说，一元一次不等式有无限多个解，而一元一次方程只有一个解.

练习答案

1. (1) $x>-16$；
   (2) $x\geqslant 25$；
   (3) $x>-\frac{38}{11}$；
   (4) $x\leqslant\frac{5}{4}$.
2. (1) $x\geqslant-\frac{1}{2}$；
   (2) $x\geqslant-\frac{1}{4}$；
   (3) $y\geqslant 2$；
   (4) $y<-5$.

练习

1. 解下列不等式，并在数轴上表示解集：
   (1) $5x+15>4x-1$；　　(2) $2(x+5)\leqslant 3(x-5)$；
   (3) $\frac{x-1}{7}<\frac{2x+5}{3}$；　　(4) $\frac{x+1}{6}\geqslant\frac{2x-5}{4}+1$.
2. 当 x 或 y 满足什么条件时，下列关系成立？
   (1) $2(x+1)$ 大于或等于 1；
   (2) $4x$ 与 7 的和不小于 6；
   (3) y 与 1 的差不大于 $2y$ 与 3 的差；
   (4) $3y$ 与 7 的和的四分之一小于 -2.

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的答案.

例 2　去年某市空气质量良好（二级以上）的天数与全年天数（365）之比达到 60%，如果明年（365 天）这样的比值要超过 70%，那么明年空气质量良好的天数比去年至少要增加多少？

分析："明年这样的比值要超过 70%"指出了这个问题中蕴含的不等关系，转化为不等式，即 $\frac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$.[1]

解：设明年比去年空气质量良好的天数增加了 x.

去年有 $365\times60\%$ 天空气质量良好，明年有 $(x+365\times60\%)$ 天空气质量良好，并且

$$\frac{x+365\times60\%}{365}>70\%.$$

去分母，得

$$x+219>255.5.$$

移项，合并同类项，得

$$x>36.5.$$

由 x 应为正整数，得

$$x\geqslant 37.$$

答：明年空气质量良好的天数比去年至少要增加 37，[2]才能使这一年空气质量良好的天数超过全年天数的 70%.

[1] 说明了如何列不等式：首先找出实际问题中蕴含不等关系的语句，然后根据语句中的信息列出不等式.

[2] 根据问题的实际意义，x 应取正整数，符合条件的最小正整数是 37，即至少要增加 37 天.

6. 不等式是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用. 本节安排了两个例题重点说明如何根据实际问题列不等式，使学生经历建立一元一次不等式这样的数学模型，并应用它解决实际问题的过程.

7. 本节例 2 取材于空气质量问题，素材本身有利于环境保护教育.

解题中列不等式是关键一步. 这就需要将问题情境中的文字语言"明年（365 天）这样的比值要超过 70%"，转化为符号语言"$\frac{x+365\times60\%}{365}>70\%$"，这是一个数学抽象的过程，其中蕴含了符号化、模型化的思想. 教学中应注意让学生经历数学抽象的过程，运用符号化、模型化的思想，掌握列不等式解决实际问题的方法.

8. 本节例 3 取材于生活中常见的购物问题. 由于市场上存在不同的促销方式，所以购物时可以货比三家，加以选择. 应该说在市场经济日益

例3 甲、乙两商场以同样价格出售同样的商品，[1]并且又各自推出不同的优惠方案：在甲商场累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按 90% 收费；在乙商场累计购物超过 50 元后，超出 50 元的部分按 95% 收费. 顾客到哪家商场购物花费少？

分析：在甲商场购物超过 100 元后享受优惠，在乙商场购物超过 50 元后享受优惠. 因此，我们需要分三种情况讨论：

(1) 累计购物不超过 50 元；

(2) 累计购物超过 50 元而不超过 100 元；

(3) 累计购物超过 100 元.

解：(1) 当累计购物不超过 50 元时，在甲、乙两商场购物都不享受优惠，且两商场以同样价格出售同样的商品，因此到两商场购物花费一样.

(2) 当累计购物超过 50 元而不超过 100 元时，在乙商场购物享受优惠，在甲商场购物不享受优惠，因此到乙商场购物花费少.

(3) 当累计购物超过 100 元时，设累计购物 $x(x>100)$ 元.[2]

① 若到甲商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)>100+0.9(x-100).$$[3]

解得 $x>150$.

这就是说，累计购物超过 150 元时，到甲商场购物花费少.

② 若到乙商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)<100+0.9(x-100).$$

解得 $x<150$.

这就是说，累计购物超过 100 元而不到 150 元时，到乙商场购物花费少.

③ 若 $50+0.95(x-50)=100+0.9(x-100)$，解得

$$x=150.$$

这就是说，累计购物为 150 元时，到甲、乙两商场购物花费一样.

练习

1. 某工程队计划在 10 天内修路 6 km. 施工前 2 天修完 1.2 km 后，计划发生变化，准备提前 2 天完成修路任务，以后几天内平均每天至少要修路多少？
2. 某次知识竞赛共有 20 道题，每一道题答对得 10 分，答错或不答都扣 5 分，小明得分要超过 90 分，他至少要答对多少道题？

[1] 甲、乙两商场对各种商品的定价相同.

[2] 累计购物超过 100 元时，需分三种情况讨论：到甲商场购物花费少；到乙商场购物花费少；到甲、乙两商场购物花费一样多.

[3] $50+0.95(x-50)$ 表示在乙商场购物所花钱数，$100+0.9(x-100)$ 表示在甲商场购物所花钱数.

练习答案

1. 设以后几天内平均每天至少要修路 x km，则
$$6x\geqslant 6-1.2.$$
解得 $x\geqslant 0.8$.
所以，工程队以后几天内平均每天至少要修路 0.8 km.
2. 设小明答对 x 道题，则
$$10x-5(20-x)>90.$$
解得 $x>12\dfrac{2}{3}$.
所以，小明至少要答对 13 道题.

发展的现代社会，这个问题与学生距离较近.

与例 2 相比，本题情境更复杂、难度更大. 两个优惠方案的优惠起点是具有关键意义的数据，需要根据这些数据分三种情况讨论问题. 其中，第三种情况最为复杂，需要再次分类，列不等式解决. 因此，审题中需抓住关键. 分类考虑是需要培养的分析能力，教学中应予以关注.

9. 练习中的第 2 题需要注意，“得分要超过 90 分”即“得分大于 90 分”，“至少要答对 13 道题”即“答对的题数大于或等于 13”. 用不等式解应用问题时，要注意对未知数的限制条件，根据本题的实际意义，答案应是正整数.

习题 16.2

1. “复习巩固”的题目涉及解一元一次不等式的内容，其中包括解不等式并在数轴上表示解集，解不等式并找出正整数解等.

第 4 题不涉及解具体不等式，而是要求进行

[1] 这是总结所学内容，并进行横向比较的题目，重在倡导好的学习方法.

[2] “人均创利”值指平均每人所创利润值，即 $\dfrac{\text{全厂年利润值}}{\text{全厂员工人数}}$.

[3] “亏本”指入不敷出，“避免亏本”即“销售额≥进货额”.

[4] 注意“超过”指“大于”.

习题 16.2

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+5)>2(4x+3)$；　　(2) $10-4(x-4)\leq 2(x-1)$；

(3) $\dfrac{x-3}{2}<\dfrac{2x-5}{3}$；　　(4) $\dfrac{2x-1}{3}\leq\dfrac{3x-4}{6}$；

(5) $\dfrac{5x+1}{6}-2>\dfrac{x-5}{4}$；　　(6) $\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{2x-5}{4}\geq 1$.

2. x 取什么值时，式子 $\dfrac{5x+1}{6}$ 表示下列数？

(1) 正数；　　(2) 小于 -2 的数；　　(3) 0.

3. 根据下列条件求正整数 x：

(1) $x+2<6$；　　(2) $2x+5<10$；

(3) $\dfrac{x-3}{2}>\dfrac{2x-5}{3}$；　　(4) $\dfrac{2+x}{2}\geq\dfrac{2x-1}{3}-2$.

4. 总结解一元一次不等式的一般步骤，并与解一元一次方程进行比较.[1]

综合运用

5. 某商店以每辆 250 元的进价购入 200 辆自行车，并以每辆 275 元的价格销售. 两个月后自行车的销售款已超过这批自行车的进货款，这时至少已售出多少辆自行车？

6. 长跑比赛中，张华跑在前面，在离终点 100 m 时他以 4 m/s 的速度向终点冲刺，在他身后 10 m 的李明需以多快的速度同时开始冲刺，才能够在张华之前到达终点？

7. 某工厂前年有员工 280 人，去年经过结构改革减员 40 人，全厂年利润增加 100 万元，人均创利[2]至少增加 6 000 元，前年全厂年利润至少是多少？

8. 苹果的进价是每千克 1.5 元，销售中估计有 5% 的苹果正常损耗. 商家把售价至少定为多少，才能避免亏本？[3]

9. 电脑公司销售一批计算机，第一个月以 5 500 元/台的价格售出 60 台，第二个月起降价，以 5 000 元/台的价格将这批计算机全部售出，销售总额超过 55 万元.[4] 这批计算机至少有多少台？

拓广探索

10. 求不等式 $5x-1>3(x+1)$ 与 $\dfrac{1}{2}x-1<7-\dfrac{3}{2}x$ 的解集的公共部分.

一般性的总结，并对解一元一次不等式与解一元一次方程进行比较. 完成这道题目，不仅可以使所学知识更加系统化、整体化，而且可以帮助学生形成注重总结的学习方法.

2. “综合运用”有 5 道题，它们都是具有实际背景的问题. 分析其中的数量关系，根据不等关系列出相应不等式，是解题的关键步骤. 审题时要注意题目中涉及不等关系的语言的确切含义，例如只有正确理解“至少”“超过”等词，才能准确地用不等式表示其意.

这些题目的主要设计意图是提高学生将实际问题转化为不等式模型的能力.

3. “拓广探索”的第 10 题要求先分别解两个一元一次不等式，然后求出它们的解集的公共部分，这道题是为下一节学习一元一次不等式组做铺垫的，即让学生体会两个不等式的解集的公共部分的含义，以及如何求两个不等式解集的公共部分.

16.3 一元一次不等式组

问题[1] 用每分可抽 30 t 水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t，那么将污水抽完所用时间的范围是什么？

设用 x min 将污水抽完，则 x 同时满足不等式

$$30x>1\,200, \quad ①$$

$$30x<1\,500. \quad ②$$

类似于方程组，把这两个不等式合起来，组成一个**一元一次不等式组**[2] (system of linear inequalities in one unknown)，记作

$$\begin{cases}30x>1\,200,\\30x<1\,500.\end{cases}$$

怎样确定不等式组中 x 的可取值的范围呢？

类比方程组的解，不等式组中的各不等式解集的公共部分，就是不等式组中 x 可以取值的范围.[3]

由不等式①，解得

$$x>40.$$

由不等式②，解得

$$x<50.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 16.3-1）.

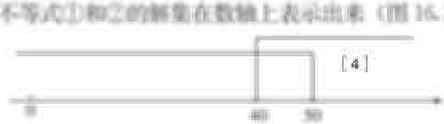


图 16.3-1

利用数轴体会，x 取值的范围是两个不等式解集的公共部分.[5]

从图 16.3-1 容易看出，x 取值的范围为

$$40<x<50.$$

这就是说，将污水抽完所用时间多于 40 min 而少于 50 min.

第十六章　不等式与不等式组　41

[1] 这个问题是本节的引入问题，需要分析其中的数量关系，并用不等式表示.

[2] 这里并未正式给一元一次不等式组下定义，只是说这两个不等式合起来，组成一个一元一次不等式组. 实际上，两个或更多的一元一次不等式合起来，都组成一个一元一次不等式组.

[3] 这里还未正式出现不等式组的解集的概念，但已点出各不等式的解集的公共部分就是不等式组中未知数的可取值范围.

[4] 这个公共部分是两端有界的开区间.

[5] 利用数轴可以直观地认识公共部分.

1. 本节讨论的对象是一元一次不等式组. 将几个一元一次不等式合在一起，就得到一元一次不等式组. 从组成成员上看，一元一次不等式组显然是在一元一次不等式基础上发展的新概念. 从组成形式上看，一元一次不等式组与第八章学习的方程组有类似之处. 不等式组与方程组所表示的都是同时要满足几个数量关系（不等关系或相等关系），所求的都是几个不等式解集的公共部分或几个方程的公共解. 因此，在本节教学中应注意前面的基础，让学生借助对已学知识的认识学习新知识.

2. 本节从抽取污水的问题说起，根据“估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t”，列出抽完积存污水所用时间 x 必须满足的两个不等式，并且强调 x 要同时满足这两个不等式，由此引出一元一次不等式组的概念. 注意这里是以实例来说明概念，而不是严格地给一元一次不等式组下定义. 实际上，三个或三个以上的一元一

[1] 这里正式给出不等式组的解集以及解不等式组的定义.

[2] 这个不等式组的解集是左端有界的开区间.

[3] 如果不等式组中各不等式的解集没有公共部分（各解集的交集是空集），那么不等式组无解.

一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的**解集**. 解不等式组就是求它的解集.[1]

例 1 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>x+1, & ① \\ x+8<4x-1; & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+3\geq x+11, & ① \\ \dfrac{2x+5}{3}-1<2-x. & ② \end{cases}$

解：(1) 解不等式①，得

$$x>2.$$

解不等式②，得

$$x>3.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 16.3-2）.

图 16.3-2

从图 16.3-2 可以找出两个不等式解集的公共部分，得不等式组的解集

$$x>3.$$

利用数轴可以确定不等式组的解集.

(2) 解不等式①，得

$$x\geq 8.$$

解不等式②，得

$$x<\frac{4}{5}.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 16.3-3）.

图 16.3-3

从图 16.3-3 可以看到这两个不等式的解集没有公共部分，不等式组无解.[3]

次不等式合起来，也同样是一个一元一次不等式组. 教学中不要将教科书上的有关文字作为一元一次不等式组的定义来对待.

3. 教科书结合污水抽取的问题，先具体说明不等式组中未知数的可取值范围，应是各不等式的解集的公共部分，并用式子形式和数轴形式表示了这个公共部分，然后正式给出不等式组的解集以及解不等式组的定义. 这是从具体事物认识抽象事物的一种方式. 教学中应充分重视实例的作用.

4. 本节例 1 通过解不等式组，进一步加深学生对不等式组的解集以及解不等式组的认识. 例 1 中既有不等式组有解的题目，又有不等式组无解的题目，这样可以让学生认识到不等式组并不总是有解. 不等式组是否有解，要根据不等式组的解集的定义看，如果各不等式的解集存在公共部分，那么它就是不等式组的解集；如果各不等式的解集没有公共部分，即数轴上没有任意一

例 2 x 取哪些整数值时，不等式

$$5x+2>3(x-1)$$

与

$$\frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x$$

都成立？

分析： 求出这两个不等式组成的不等式组的解集，解集中的整数就是 x 可取的整数值.

解： 解不等式组

$$\begin{cases}5x+2>3(x-1), \\ \frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x,\end{cases}$$

得

$$-\frac{5}{2}<x\leqslant 4.$$

所以 x 可取的整数值是 -2，-1，0，1，2，3，4.

归纳[1]

解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分. 利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

练习

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x>1-x, \\ x+2<4x-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-5>1+2x, \\ 3x+2\leqslant 4x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{2}{3}x+5>1-x, \\ x-1\leqslant \frac{3}{4}x-\frac{1}{8}.\end{cases}$

2. x 取哪些正整数值时，不等式 $x+3>6$ 与 $2x-1<10$ 都成立？

[1] 这段归纳是对第 16.3 节的总结，即对列、解不等式组的概括.

练习答案

1. (1) $x>1$；
   (2) 无解；
   (3) $-2.4<x<3.5$.
2. 4，5.

个点在各不等式的解集之中，则这个不等式组无解.

数轴对于确定不等式组的解集很有用. 特别是初学不等式组的阶段，直观表示有助于准确地确定解集.

5. 例 2 是确定哪些整数满足一个不等式组的问题. 解决时考虑未知数的取值范围，也就是不等式组的解集，其中的整数即为所求.

6. 本节最后的归纳包括三层意思：

(1) 哪类问题适合用不等式组解决；

(2) 解不等式组的基本过程；

(3) 数轴在解不等式组过程中的作用.

这三层意思可以提纲挈领地概括本节的主要内容. 教学中应引导学生关注这个归纳，可以让学生自己先行归纳，再互相补充完善.

习题 16.3

1. “复习巩固”的题目涉及解一元一次不等

[1] 这个分物问题涉及不同分配方案，按一种方案分配后有节余，按另一方案分配则不够分. 中国古代称这类问题为“盈不足”问题，用算术方法解它. 本章中可以用不等式组解此题. 注意本题中的“分不到 3 本”包含分不到书的情况.

习题 16.3

复习巩固

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1<3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1>3; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1<3. \end{cases}$

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1<3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} -3x-1>3, \\ 2x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3(x-1)+13>5x-2(5-x), \\ 5-(2x+1)<3-6x; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-3(x-2)\geq 4, \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-3(x-2)\geq 4, \\ \dfrac{2x-1}{5}>\dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+4)<2, \\ \dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3}. \end{cases}$

综合运用

3. x 取哪些整数值时，不等式

$$4(x-0.3)<0.5x+5.8$$

与

$$3+x>\frac{1}{2}x+1$$

都成立？

4. x 取哪些整数值时，$2\leq 3x-7<8$ 成立？

拓广探索

5. 你能求三个不等式 $5x-1>3(x+1)$，$\frac{1}{2}x-1>3-\frac{3}{2}x$，$x-1<3x+1$ 的解集的公共部分吗？

6. 把一些书分给几名同学，如果每人分 3 本，那么余 8 本；如果前面的每名同学分 5 本，那么最后一人就分不到 3 本. 这些书有多少本？共有多少人？[1]

式组的内容. 第 1 题的不等式组比较简单，第 2 题的不等式组要复杂些.

2. “综合运用”的两道题都需要在解题时先求出未知数的取值范围，再确定其中的整数. 不同之处在于两个不等关系的表现形式，第 3 题是两个单独的不等式，第 4 题使用连写不等式的形式.

3. “拓广探索”的第 5 题要求先分别解三个一元一次不等式，然后求出它们的解集的公共部分. 这道题从解题方法上说与前面解由两个一元一次不等式组成的不等式组是一样的，只是要多解一个不等式，而在考虑解集的公共部分时多考虑一个解集. 第 6 题是一个分物问题，属于中国古代数学中所说的“盈不足”问题. 古代人用算术方法解这类问题，思考起来有一定难度，现在用不等式组解更容易想出如何列式.

以上这些问题比教科书中的例题要复杂些，形式、内容上与例题相比都有一定变化. 它们对于培养学生的探究能力有一定价值.

数学活动

活动1

统计资料表明，2005 年 A 省的城市建成区面积[1]（简称建成区面积）为 $1\,316.4\ \mathrm{km}^2$，城市建成区园林绿地面积[2]（简称绿地面积）为 $373.48\ \mathrm{km}^2$，城市建成区园林绿地率[3]（简称绿地率）为 28.37%，2010 年该省建成区面积增加了 $300\ \mathrm{km}^2$ 左右，绿地率超过了 35%.

根据上述资料，试用一元一次不等式解决以下问题.

这五年（2005～2010 年），A 省增加的绿地面积超过了多少平方千米？[4]

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题，看看能不能用一元一次不等式解决这些问题.

活动2 猜数游戏

小丽在 4 张同样的纸片上各写了一个正整数，从中随机抽取 2 张，并将它们上面的数相加．重复这样做，每次所得的和都是 5，6，7，8 中的一个数，并且这 4 个数都能取到．猜猜看，小丽在 4 张纸片上各写了什么数.[5]

第十六章 不等式与不等式组 45

[1] 城市建成区是指城市行政区内实际已成片开发建设、基本具备市政公用设施和公共设施的地区.

[2] 城市园林绿地面积指用作园林和绿化的各种绿地面积，包括公共绿地、居住区绿地、单位附属绿地、防护绿地、生产绿地、道路绿地和风景林地面积.

[3]

城市建成区园林绿地率$=\dfrac{\text{城市建成区园林绿地面积}}{\text{城市建成区面积}}$.

[4] 设绿地面积增加了 $x\ \mathrm{km}^2$，则

$$\frac{373.48+x}{1\,316.4+300}>35\%.$$

解得 $x>192.26$.

[5] 设 4 个数分别为 x，y，z，w，并且 $x\leqslant y\leqslant z\leqslant w$. 可以分析出所写 4 个数若各不相等，则所得的和不止 4 种，因为 $x+y<x+z<x+w<y+w<z+w$. 若 4 个数中有 3 个或 4 个相等，则所得的和只有 2 种或 1 种. 综合来看，4 个数中有 2 个相等，所写的数是 2，3，4，4 或 2，3，3，5.

1. “活动 1”的内容选自统计数据，主题是城市园林绿化，这有助于对学生进行环保教育.

教科书的设计包括三个方面：(1) 查阅资料，了解活动情境中涉及的相关术语；(2) 分析活动情境中的数量关系，运用不等式发现数据中隐含的信息；(3) 搜集资料，编制数学题，加强联系实际.

2. “活动 2 猜数游戏”需要分析数的大小关系，合理的分析能较快捷地找出答案.

[1] 这个框图表示了利用不等式（组）解决实际问题的基本过程.

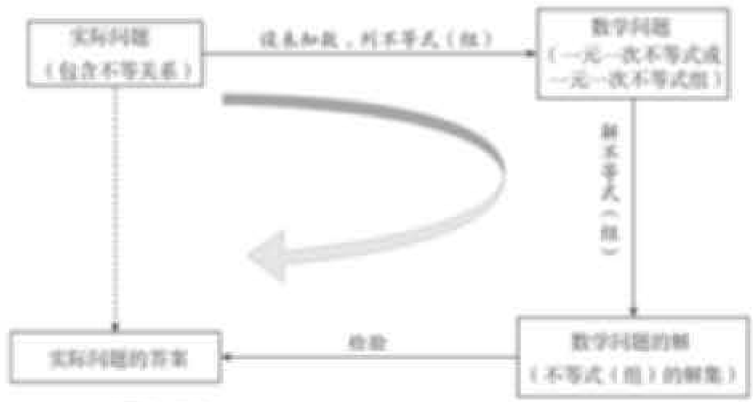
[2] 不等式的性质是解不等式的依据，它们与等式的性质有类似之处.

[3] 解一元一次不等式与解一元一次方程，在基本步骤上有许多类似之处，对两者进行比较有助于加强知识的联系.

[4] 解一元一次不等式组，是先解多个一元一次不等式，再求它们的解集的公共部分.

小　结

一、本章知识结构图[1]



二、回顾与思考

不等式（组）是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用．本章主要学习不等式的基础知识以及一类最简单的不等式（组）——一元一次不等式（组），并运用它们解决一些数学问题和实际问题．

在学习不等式的性质和一元一次不等式（组）的解法时，与等式的性质和方程（组）的解法进行类比，有益于对知识的理解与掌握．

与解方程是逐步将方程化为 $x=a$ 的形式类似，解不等式是逐步将不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，两者都运用了化归的思想．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 总结不等式的性质，并与等式的性质进行比较．[2]

2. 总结一元一次不等式的解法，并与一元一次方程的解法进行比较．[3]结合例子说明，解未知数为 x 的不等式，就是将不等式逐步变成 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，而不等式的性质是变形的重要依据．

3. 如何解一元一次不等式组？结合例子说明，解不等式组就是求有关不等式的解集的公共部分．[4]

4. 举例说明数轴在解不等式（组）中的作用．

5. 结合实例体会运用不等式解决实际问题的过程．

46　第十一章　不等式与不等式组

1. 复习课可以引导学生以分析解决某具体问题的过程为例，体会本章知识结构图，加深学生对数学建模思想的认识.

2. “回顾与思考”从知识、思想方法、学习方法三个方面对本章进行总结.

解不等式中的化归思想，即逐步使不等式的形式化简，直至化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，是解不等式的基本指导思想.

对等式性质与不等式性质、解方程（组）与解不等式（组）进行比较，可以温故而知新，加强对知识的整体认识. 例如解一元一次不等式组与解二元一次方程组的类似之处是寻求组中不等式的解集的公共部分或方程的公共解；不同之处是，解一元一次不等式组要先解每个不等式，解二元一次方程组则是通过消元使两个方程合为一个方程，逐个求未知数.

3. 复习中应注意结合学习过程中的实际情况，选择与设计有针对性的复习内容.

复习题 16

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+7)>23$；　　(2) $12-4(3x-1)<2(2x-16)$；

(3) $\frac{x+3}{5}<\frac{2x-5}{3}-1$；　　(4) $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-1}{2}>\frac{5}{12}$.

2. a 取什么值时，$15-7a$ 的值满足下列条件：

(1) 大于 1；　(2) 小于 1；　(3) 等于 1.

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x+1>-1,\\2x+1<3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}-(x-1)>3,\\2x+9>3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3(x-1)+1>5x-2(1-x),\\5-(2x-1)<-6x;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}-3(x-2)\geq 4-x,\\\frac{1+2x}{3}>x-1.\end{cases}$

4. $\frac{x+3}{2}$ 的值能否同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值？说明理由.[1]

5. 有人说不等式 $a>2a$ 永远不会成立，因为如果在这个不等式两边同除以 a，就会出现 $1>2$ 这样的错误结论. 他的说法对吗？[2]

6. 解一元一次不等式组与解一元一次不等式有什么区别和联系？[3]

综合运用

7. 一艘轮船从某江上游的 A 地匀速驶到下游的 B 地用了 10 h，从 B 地匀速返回 A 地用了不到 12 h，这段江水流速为 3 km/h，轮船在静水里的往返速度 v 不变，v 满足什么条件？[4]

8. 老张与老李购买了相同数量的种兔，一年后，老张养兔数比买入种兔数增加了 2 只，老李养兔数比买入种兔数的 2 倍少 1 只，老张养兔数不超过老李养兔数的 $\frac{2}{3}$，一年前老张至少买了多少只种兔？

拓广探索

9. 三个连续正整数的和小于 333，这样的正整数有多少组？写出其中最大的一组.[5]

第十六章　不等式与不等式组　47

[1] 同时满足两个条件，即可列出两个不等式，组成不等式组.

[2] 结合不等式的性质说理.

[3] 通过总结加强解不等式与解不等式组之间的纵向联系.

[4] 从上游到下游是顺水航行，从下游到上游是逆水航行. 假设水的流速、轮船的航速（静水）都不变.

[5] 可以设 3 个数分别为 $x-1$，x，$x+1$.

复习题 16

1. “复习巩固”的题目有两类：

（1）解一元一次不等式（组），并在数轴上表示解集；

（2）通过列式、辨析、总结等形式，复习巩固基本知识和基本技能.

这些题目基础性强，学生应达到较熟练求解的程度.

2. “综合运用”的题目有 2 道. 第 7 题是运动中的顺逆水问题，应注意速度的加减规则，即顺（逆）水速度＝静水速度＋（－）水速. 第 8 题中，各人购买的种兔数量是一个未知数，同时也是一个联系其他有关数量的数量. 列式时应注意“不超过”“至少”等词的确切含义.

3. “拓广探索”的第 9 题中涉及如何设未知数更简便的问题，可以比较不同方法. 此外，这道题还要考虑计数的问题，并从多个结果中选出最大值.

Ⅲ 习题解答

习题 16.1

1. 3.01，4，6，100 是 $2x+3>9$ 的解，其他数不是.

2. (1) $a+5>0$； (2) $a-2<0$； (3) $b+15<27$； (4) $b-12>-5$；

   (5) $4c\geqslant 8$； (6) $\frac{c}{2}\leqslant 3$； (7) $d+e\geqslant 0$； (8) $d-e\leqslant -2$.

3. (1) $x>4$； (2) $x<5$； (3) $x>2.1$； (4) $x>-\frac{10}{3}$.

4. (1) $>$； (2) $>$； (3) $>$； (4) $<$.

5. (1) $x>-4$； (2) $x\leqslant -7$； (3) $x>-2$； (4) $x\geqslant -3$.

   (数轴表示略).

6. (1) $>$； (2) $>$.

7. $39.98\leqslant L\leqslant 40.02$.

8. 设蛋白质的含量为 x g，则 $x\geqslant 300\times 0.6\%$，解得 $x\geqslant 1.8$.

9. $(10a+b)-(10b+a)>0$，$a>b$；

   $(10a+b)-(10b+a)<0$，$a<b$；

   $(10a+b)-(10b+a)=0$，$a=b$.

习题 16.2

1. (1) $x<\frac{9}{2}$； (2) $x\geqslant \frac{14}{3}$； (3) $x>1$； (4) $x\leqslant -2$；

   (5) $x>1$； (6) $y\leqslant \frac{5}{4}$.

   (数轴表示略).

2. (1) $a>-\frac{1}{4}$； (2) $a<-\frac{13}{4}$； (3) $a=-\frac{1}{4}$.

3. (1) 1，2，3； (2) 1，2；

   (3) 1； (4) 1，2，3，…，19，20.

4. (略).

5. 设售出自行车 x 辆，则 $275x>250\times 200$，解得 $x\geqslant 182$.

6. 设李明的冲刺速度为 x m/s，则 $\frac{100}{4}x>110$，解得 $x>4.4$.

7. 设前年全厂利润是 x 万元，则 $\frac{x+100}{280-40}-\frac{x}{280}\geqslant 0.6$，解得 $x\geqslant 308$.

8. 设售价定为每千克 x 元时不亏本，则 $0.95x\geqslant 1.5$，解得 $x\geqslant 1.58$.

9. 设这批电脑有 x 台，则 $5\ 500\times60+5\ 000(x-60)>550\ 000$，解得 $x>104$. 故这批计算机最少有 105 台.

10. $x>2$ 且 $x<4$.

习题 16.3

1. (1) $x<2$；　(2) $x>4$；　(3) $2<x<4$；　(4) 无解.

2. (1) $\frac{1}{2}<x\leqslant2$；　(2) 无解；　(3) $x<-\frac{1}{4}$；　(4) $x\leqslant1$；

   (5) $x<-7$；　(6) 无解.

3. 由$\begin{cases}4(x-0.3)<0.5x+5.8,\\3+x>\frac{1}{2}x+1,\end{cases}$得$-4<x<2$. 于是 x 可取整数值为 -3，-2，-1，0，1.

4. $x=3$ 或 $x=4$.

5. $x>2$.

6. 设有 x 名学生，则有 $(3x+8)$ 本书. 列不等式组，得$\begin{cases}3x+8\geqslant5(x-1),\\3x+8<5(x-1)+3.\end{cases}$故 $x=6$，$3x+8=26$.

复习题 16

1. (1) $x>\frac{1}{3}$；　(2) $x\geqslant3$；

   (3) $x>7$；　(4) $x\leqslant-\frac{3}{10}$. (数轴表示略).

2. (1) $a<2$；　(2) $a>2$；　(3) $a=2$.

3. (1) $-1<x<1$；　(2) $-3<x<-2$；　(3) $x<-\frac{3}{2}$；　(4) $x\leqslant1$.

4. 不能. 因为$\begin{cases}\frac{x+3}{5}>2x+3,\\\frac{x+3}{5}>1-x\end{cases}$无解.

5. 不对. 因为当 $a<0$ 时，就有 $a>2a$. 这时在这个不等式两边同除以 a，得 $1<2$.

6. (略).

7. 由$12(v-3)>10(v+3)$，解得 $v>33$.

8. 设一年前老张买了 x 只种兔，则 $x+2\leqslant\frac{2}{3}(2x-1)$，解得 $x\geqslant8$.

9. 设这 3 个数分别为 $x-1$，x，$x+1$，x 为大于 1 的整数，则 $x-1+x+x+1<333$，解得 $x<111$. 故 $x=2$，3，4，…，110. 因此，这样的正整数有 109（即 110－1）组，其中最大的一组为 109，110，111.

Ⅳ 教学设计案例

16.1　不等式（第 2 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

不等式的性质.

2. 内容解析

本节课是在学生学习了等式的性质，掌握了一元一次方程解法的基础上，研究不等式的性质. 不等式的性质是解不等式的重要依据. 因此它是不等式解法的核心内容之一，是本章的基础.

通过类比等式性质，观察具体数值、归纳不等式的性质，既能让学生感受运算中的不变性，获得猜想，又能让学生从具体到抽象，用符号语言表述结论. 理解不等式性质，一是辨析，特别是不同于等式的性质；二是应用，即利用不等式的性质将不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，解简单的不等式.

基于以上分析，本节课的教学重点为：探索不等式的性质.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）探索并理解不等式的性质.

（2）体会探索过程中所应用的归纳和类比方法.

2. 目标解析

达到目标（1）的标志是：学生能通过观察、比较具体数字运算的大小，联系等式性质，归纳出不等式的性质. 面对变形后的式子，能利用不等式性质判断它们的大小.

达到目标（2）的标志是：学生能通过反思，总结探索过程，了解归纳和类比是获得数学发现的常用方法.

三、教学问题诊断分析

学生的认知基础有：第一，会比较数的大小；第二，理解等式性质并知道等式性质是解方程的依据；第三，知道不等式的概念；第四，具备“通过观察、操作并抽象概括等活动获得数学结论”的经验，有一定的抽象概括能力和合情推理能力.

学生认知的主要障碍是：第一，探索不等式性质时，如何与等式性质进行类比，类比什么，思路不是很清晰；第二，探索不等式性质 2，3 时，由于学生思维的片面性，会产生考虑不到不等式两边乘或除以同一个负数的情况；第三，运用不等式性质时，由于已有知识经验产生的负迁移，学生不理解运用性质 3 时，为什么要改变不等号的方向，以及在不等式的等价变形时，什么时候要改

变不等号的方向.

基于以上分析，本节课的教学难点为：不等式性质 3 的探索及其理解.

四、教学过程设计

1. 复习引入

教师引出本节课所学内容：在上一节课，我们学习了什么是不等式. 对于某些简单的不等式，我们可以直接想出它们的解集，但是对于比较复杂的不等式，例如$\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接想出解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式. 与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需要依据不等式的性质. 这节课我们先来看看不等式有什么性质.

问题 1 等式有哪些性质？你能分别用文字语言和符号语言表示吗？

师生活动：学生通过回忆回答问题，并由师生共同整理成表 1.

表 1

	文字语言	符号语言
性质 1	等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等.	如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$，$a-c=b-c$.
性质 2	等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等.	如果 $a=b$，那么 $ac=bc$. 如果 $a=b$（$c\neq0$），那么$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

设计意图：本表由学生口述，教师逐条写在黑板上，保留至探究完不等式的性质，并将不等式的性质列于其旁. 对比表 1 中的等式性质，有利于学生探索发现和正确表达（文字语言和符号语言）不等式的性质.

2. 探究新知

问题 2 研究等式性质的基本思路是什么？

师生活动：学生各抒己见. 必要时，教师给予提示：等式的性质就是从加减乘除运算的角度研究运算的不变性.

设计意图：从学生已有的数学经验出发，建立新旧知识之间的联系，通过总结等式性质就是研究运算中的不变性，明确不等式性质的研究方向.

问题 3 为了研究不等式的性质，我们可以先从一些数字的运算开始. 用“$<$”或“$>$”完成下列两组填空，你能发现其中的规律吗？

（1）$5>3$，$5+2$ ____ $3+2$，$5+(-2)$ ____ $3+(-2)$，$5+0$ ____ $3+0$；

（2）$-1<3$，$-1+2$ ____ $3+2$，$-1+(-3)$ ____ $3+(-3)$，$-1+0$ ____ $3+0$.

师生活动：学生完成填空. 教师引导学生类比等式性质 1，观察不等式加法运算中的不变性，即不等号的方向是否改变. 由学生叙述发现的规律，并对比等式性质 1 进行修正. 教师指出：减去一个数等于加这个数的相反数，所以不等式两边减同一个数（或式子）的情况可以转化为不等式两边加同一个数（或式子）的情况，从而获得猜想 1：当不等式两边加（或减）同一个数（或式子）

时，不等号的方向不变.

追问：猜想1是否正确？如何验证？

师生活动：让学生各自列举不等式，选取一些数和式子，加以演算，对猜想1进行验证. 教师从中选取一些典型例子进行展示，师生共同讨论、确认猜想1的正确性，从而获得一般性的结论. 即不等式的性质1：不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变.

设计意图：研究运算中的不变性，首先研究加法运算. 让学生通过比较具体数字加一个正数、负数、0之后的大小，观察不等号的变化，发现并归纳其中的规律，从而提出猜想. 然后，让学生自己从所加（减）数字分别取正数、负数、0的不同情况入手分析，通过举例验证，确认猜想1，从而获得不等式的性质1. 但值得注意的是，举例验证虽是确认猜想的一种方法，但结论的正确与否仍需要严格证明.

问题4 类似等式性质的符号语言表示，你能把不等式的性质1用符号语言表示吗？

师生活动：学生将文字语言转化为符号语言，教师在表1旁边画一个与表1类似的表格并将结论填写在表格中.

设计意图：用符号语言表示不等式的性质，让学生体会用字母表示数的优越性，发展学生文字语言与符号语言相互转化的能力.

问题5 研究完不等式两边加（或减）同一个数（或式子）的情况，对比等式性质，下面我们要研究什么问题？如何研究？

师生活动：学生回答，教师修正，明确研究方向：不等式两边乘（或除以）同一个数的情况. 师生先考虑不等式两边乘0的特殊情况，教师再指出，除数不能为0，因而下面分不等式两边乘（或除以）同一个正数和同一个负数两种情况讨论. 教师给出以下两组例子，让学生进行研究.

用“$<$”或“$>$”填空，并总结其中的规律：

（1）$6>2$，6×5 ____ 2×5，$6\times(-5)$ ____ $2\times(-5)$；

（2）$-2<3$，$(-2)\times6$ ____ 3×6，$(-2)\times(-6)$ ____ $3\times(-6)$.

学生完成填空. 教师引导学生类比等式性质2，观察不等式乘法运算中的不变性，即不等号的方向是否改变. 由学生叙述发现的规律，并对比等式性质2进行修正. 教师指出：除以一个数等于乘这个数的倒数，所以不等式两边除以同一个数的情况可以转化为不等式两边乘同一个数的情况，从而获得猜想2：不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变，和猜想3：不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

让学生各自列举不等式，选取一些数和式子，加以演算，对猜想2，3进行验证. 教师从中选取一些典型例子进行展示，师生共同讨论，确认猜想2，3的正确性，从而获得一般性的结论，即不等式的性质2，3，并将其符号表示填写在表格中.

（性质2　不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变. 性质3　不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.）

设计意图：不等式性质2，3完全放手给学生自主探索，让学生类比等式的性质2和不等式性质1的研究过程，经历猜测、验证、纠错、归纳、完善的思考过程. 教师要及时发现学生自主探索中的问题，并组织学生共同讨论典型问题，突破难点.

问题 6 等式性质与不等式性质的主要区别是什么？

师生活动：师生共同总结，以表格形式归纳．此表格（表 2）的生成是在上课过程中逐条适时添入，呈现在黑板上，而非以 PPT 形式一次给出．

表 2

<table>
<tr><th colspan="3">等式性质</th><th colspan="3">不等式性质</th></tr>
<tr><td></td><td>文字语言</td><td>符号语言</td><td></td><td>文字语言</td><td>符号语言</td></tr>
<tr><td>性质 1</td><td>等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等．</td><td>如果 $a=b$，
那么 $a+c=b+c$，
$a-c=b-c$．</td><td>性质 1</td><td>不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．</td><td>如果 $a>b$，
那么 $a+c>b+c$，
$a-c>b-c$．</td></tr>
<tr><td rowspan="2">性质 2</td><td rowspan="2">等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等．</td><td rowspan="2">如果 $a=b$，
那么 $ac=bc$．
如果 $a=b$（$c\neq 0$），
那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$．</td><td>性质 2</td><td>不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．</td><td>如果 $a>b$，$c>0$，
那么 $ac>bc$，
（或 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$）．</td></tr>
<tr><td>性质 3</td><td>不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．</td><td>如果 $a>b$，$c<0$．
那么 $ac<bc$，
（或 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$）．</td></tr>
</table>

设计意图：引导学生再次将等式性质与不等式性质进行对比．通过表格让学生对比它们的相同点与不同点，有利于学生更好地掌握不等式的性质．

3．**运用新知**

例 1 设 $a>b$，用"$<$"或"$>$"填空，并说明依据不等式的哪条性质：

（1）$3a$ ____ $3b$；（2）$a-8$ ____ $b-8$；（3）$-2a$ ____ $-2b$；

（4）$\frac{a}{2}$ ____ $\frac{b}{2}$；（5）$-3.5b+1$ ____ $-3.5a+1$．

师生活动：学生依据不等式的性质对不等式 $a>b$ 进行变形，得到结果．

例 2 若 $a>b$，则下列不等式中，成立的是（ ）．

（A）$a-6<b-6$ （B）$-3a>-3b$ （C）$\frac{a}{-2}<\frac{b}{-2}$ （D）$-a-1>-b-1$

师生活动：学生选出答案，教师追问理由，展开讨论．

练习 设 $m>n$，用"$>$"或"$<$"填空：

（1）$m-5$ ____ $n-5$；（2）$2m-5$ ____ $2n-5$；（3）$-3.5m+5$ ____ $-3.5n+5$．

设计意图：由浅入深的练习帮助学生进一步理解不等式的性质，为下节课利用不等式性质解不等式作准备．

4．**归纳总结**

师生共同总结本节课内容，并请学生回答下列问题：

（1）不等式的性质是什么？不等式性质与等式性质的联系与区别是什么？

(2) 在研究不等式性质的基本过程中运用了哪些数学思想方法？

设计意图：引导学生对本节课知识进行梳理，使学生掌握不等式的性质.

5. **布置作业**

必做：教科书习题16.1第4，6题.

选做：(1) 教科书复习题16第5题；(2) 比较$-a$与$-2a$的大小.

五、目标检测设计

1. 用“>”或“<”填空：

(1) 如果$a>b$，那么$a\pm c$ ____ $b\pm c$；

(2) 如果$a>b$，且$c>0$，那么ac ____ bc；

(3) 如果$a>b$，且$c<0$，那么$\frac{a}{c}$ ____ $\frac{b}{c}$.

设计意图：本题主要考查学生对不等式性质的符号表示的掌握.

2. 若$a>b$，则下列不等式中不成立的是（　　）.

(A) $a-3>b-3$　　(B) $-3a>-3b$　　(C) $\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$　　(D) $-a<-b$

设计意图：本题主要考查学生是否会利用不等式性质对不等式进行简单变形.

3. 按下列要求，写出仍能成立的不等式：

(1) $x+2>-6$，两边都减去2，得__________；

(2) $x+5<0$，两边都加上-5，得__________；

(3) $\frac{3}{5}m>2$，两边都除以$\frac{3}{5}$，得__________；

(4) $-\frac{7}{8}x\geqslant 1$，两边都乘$-\frac{8}{7}$，得__________.

设计意图：本题主要考查学生对不等式性质的掌握.

16.2　一元一次不等式（第1课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

一元一次不等式的概念及解法.

2. **内容解析**

在初中阶段，不等式位于一次方程（组）之后，它是进一步探究现实世界数量关系的重要内容. 不等式的研究从最简单的一元一次不等式开始，一元一次不等式及其相关概念是本章的基础知识. 解任何一个代数不等式（组）最终都要化归为解一元一次不等式，因而解一元一次不等式是一项基本技能. 另外，不等式解集的数轴表示从形的角度描述了不等式的解集，并为解不等式组做了准备. 本节内容是进一步学习其他不等式（组）的基础.

解一元一次不等式与解一元一次方程在本质上是相同的，即依据不等式的性质，逐步将不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，从而确定未知数的取值范围. 这一化繁为简的过程充分体现了化归的思想.

基于以上分析，本节课的教学重点为：一元一次不等式的解法.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 了解一元一次不等式的概念，掌握一元一次不等式的解法.

(2) 在依据不等式的性质探究一元一次不等式解法过程中，加深对化归思想的体会.

2. 目标解析

达到目标 (1) 的标志是：学生能说出一元一次不等式的特征，会解一元一次不等式，并能在数轴上表示出解集.

达到目标 (2) 的标志是：学生能通过类比解一元一次方程的过程，获得解一元一次不等式的思路，即依据不等式的性质，将一元一次不等式逐步化简为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式. 学生能借助具体例子，将化归思想具体化，获得解一元一次不等式的步骤.

三、教学问题诊断分析

通过前面的学习，学生已掌握一元一次方程概念及解法，对解一元一次方程中的化归思想有所体会但还不够深刻. 因此，运用化归思想把形式较复杂的不等式转化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，对学生有一定难度. 所以，教师需引导学生类比解一元一次方程的步骤，分析形式较复杂的一元一次不等式的结构特征，并与化简目标进行比较，逐步将不等式变形为最简形式.

本节课的教学难点为：解一元一次不等式步骤的确立.

四、教学过程设计

1. 引入概念

问题 1 观察下面的不等式，它们有哪些共同特征?

$$x-7>26,\ 3x<2x+1,\ \frac{2}{3}x>50,\ -4x>3.$$

师生活动：学生回答. 教师可以引导学生从不等式中未知数的个数和次数两个方面去观察不等式的特点，并与一元一次方程的定义类比. 师生共同归纳获得：含有一个未知数，未知数次数是 1 的不等式，叫做一元一次不等式.

设计意图：引导学生通过观察给出的不等式，归纳出它们的共同特征，进而得到一元一次不等式的定义. 培养学生观察、归纳的能力.

2. 研究解法

练习 利用不等式的性质解不等式：$x-7>26$.

师生活动：学生完成练习，板书如下：

解：根据不等式的性质 1，不等式的两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7.$$

$$x>33.$$

教师结合以上解题过程，指出：由 $x-7>26$ 可得到 $x>26+7$，也就是说解不等式和解方程一样，也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向.

设计意图：通过解简单的一元一次不等式，让学生回忆利用不等式的性质解不等式的过程. 教师通过简化练习中的解题步骤，让学生明确解不等式和解方程一样可以“移项”，为下面类比解方程形成解不等式的步骤作好准备.

问题 2 解一元一次方程的依据和一般步骤，对你解一元一次不等式有什么启发？

师生活动：学生回忆，解一元一次方程的依据是等式的性质，一般步骤是：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1. 接着，学生思考解一元一次不等式是否可以采用类似的步骤. 教师指出，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集.

设计意图：通过回忆解一元一次方程的依据和一般步骤，让学生思考解一元一次不等式能否采用同样的步骤，从而获得解一元一次不等式的思路.

例 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$2(1+x)<3$；　　（2）$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$.

师生活动：学生在教师问题的引导下，思考如何将两个具体的一元一次不等式变形为最简形式.

追问（1）：解一元一次不等式的目标是什么？

师生活动：学生回答，解一元一次不等式的目标是将一元一次不等式变形为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式.

追问（2）：你能类比解一元一次方程的步骤，解第（1）小题吗？

师生活动：师生共同解第（1）小题.

追问（3）：对比不等式 $\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$ 与 $2(1+x)<3$ 的两边，它们在形式上有什么不同？

师生活动：学生回答，不等式 $\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$ 含有分母.

追问（4）：怎样将不等式 $\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$ 变形，使变形后的不等式不含分母？

师生活动：师生共同去分母，解第（2）小题.

追问（5）：你能说出解一元一次不等式的基本步骤吗？

师生活动：学生回答，教师总结：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1.

追问（6）：对比第（1）小题和第（2）小题的解题过程，系数化为 1 时应注意些什么？

师生活动：学生回答，教师指出：要看未知数系数的符号. 若未知数的系数是正数，则不等号的方向不变；若未知数系数是负数，则不等号的方向要改变.

设计意图：通过解具体的一元一次不等式，引导学生明确解不等式的目标后，以化归思想为指导，比较原不等式与目标形式（$x>a$ 或 $x<a$）的差异，思考如何依据不等式的性质将原不等式通过变形转化为最简形式，以获得解一元一次不等式的步骤.

问题 3 解一元一次不等式每一步变形的依据是什么？

师生活动：学生总结出解一元一次不等式的基本步骤是：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1. 教师引导学生结合例题的解题过程思考每一步变形的依据.

（去分母的依据是不等式的性质 2，去括号的依据是去括号法则，移项的依据是不等式的性质 1，合并同类项的依据是合并同类项法则，系数化为 1 的依据是不等式的性质 2 或 3.）

设计意图：通过具体的操作，归纳出解一元一次不等式的基本步骤及每一步变形的依据，提高学生的总结、归纳能力.

问题 4 解一元一次不等式和解一元一次方程有哪些相同和不同之处？

师生活动：学生在教师的引导下将解一元一次不等式的过程与解一元一次方程的过程进行比较，思考二者的相同与不同之处.

解一元一次不等式和解一元一次方程的相同之处是：

（1）基本步骤相同：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1.

（2）基本思想相同：都是运用化归思想，将一元一次方程或一元一次不等式变形为最简形式.

不同之处是：

（1）解法依据不同：解一元一次不等式的依据是不等式的性质，解一元一次方程的依据是等式的性质.

（2）最简形式不同，一元一次不等式的最简形式是 $x>a$ 或 $x<a$，一元一次方程的最简形式是 $x=a$.

设计意图：在归纳出一元一次不等式的解法之后，引导学生对比一元一次不等式与一元一次方程的解法，思考二者的相同与不同之处，加深对一元一次不等式解法的理解，体会化归思想和类比思想.

练习 解一元一次不等式 $\frac{4}{5}x\geqslant 3+\frac{x-2}{2}$，并把它的解集在数轴上表示出来.

师生活动：学生解不等式.

设计意图：学生独立按照解一元一次不等式的步骤解不等式.

3. **归纳总结**

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

（1）怎样解一元一次不等式？解一元一次不等式和解一元一次方程有哪些相同和不同之处？

（2）解一元一次不等式运用了哪些数学思想？

设计意图：通过问题引导学生再次回顾本节课，从数学知识、数学思想方法等层面，提升对本节课所研究内容的认识.

4. **布置作业**

教科书习题 16.2 第 1，2，3 题.

五、目标检测设计

1. 解下列不等式.

（1）$-8x<2$；（2）$-\frac{1}{3}x\geqslant -\frac{5}{6}$；（3）$3x-7\geqslant 4x-4$.

设计意图：本题主要考查学生解一元一次不等式时将系数化1和移项的准确性.

2. 解下列不等式，并分别把它们的解集在数轴上表示.

(1) $3(x+2)-1\geqslant 5-2(x-2)$；　　　　(2) $\frac{x-1}{3}-\frac{x+4}{2}>-2$.

设计意图：本题主要考查学生解一元一次不等式，并在数轴上表示解集的能力.

16.2　一元一次不等式（第3课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

利用一元一次不等式解决具有不等关系的实际问题.

2. 内容解析

不等关系和相等关系都是客观世界中量与量之间最基本的数学关系. 因此，不等式与方程一样，都是解决数学问题的重要工具，在数学研究和解决实际问题中起着同样重要的作用. 本节重点是利用不等式来描述和刻画现实世界中的不等关系.

本节内容的关键是从实际问题中抽象出数量关系，并通过对数量关系的分析，找出其中的不等关系，引导学生完成抽象过程（从实际问题到数学问题），建立数学模型（列出不等式）进行讨论求解，再将数学问题的解转化为实际问题的答案.

本节课的教学重点是：分析实际问题中的不等关系列出一元一次不等式.

二、目标和目标解析

1. 目标

能从实际问题中抽象出数学问题，根据数量关系建立一元一次不等式进行求解，体会数学建模的思想.

2. 目标解析

达到目标的标志是，学生能够在原有知识的基础上学习建立一元一次不等式的数学模型来解决实际问题. 一是抽象，即从实际问题到数学问题，找出数量关系，明确数量中的不等关系；二是建立一元一次不等式的数学模型，把实际问题转化为数学问题进行求解. 在此过程中，学生能够继续积累利用一元一次不等式解决实际问题的经验.

三、教学问题诊断分析

在前面所学的知识中，学生已掌握如何求不等式的解. 作为七年级的学生对于用不等关系建立数学模型来解决实际问题，容易出现的认知困难主要是：如何从实际问题出发，抽象出隐含在实际问题中的数量关系，找出数量关系中的不等关系，列一元一次不等式；在解决此类实际问题时，需要分类讨论的思想.

本节课的教学难点是：如何从实际问题抽象出不等关系，建立不等式模型进行求解.

四、教学过程设计

教师引出本节课内容：前面我们结合实际问题，讨论了如何列一元一次不等式，还学习了解一元一次不等式的方法. 在本节课上，我们将进一步探究如何用一元一次不等式解决生活中的一些实际问题. 在现实生活中我们天天都面临着各种选择，今天我们来讨论生活中最常见的购物问题.

1. 问题探究

甲、乙两商场以同样的价格出售同样的商品，并且又各自推出不同的优惠方案：在甲商场累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按 90%收费；在乙商场累计购物超过 50 元后，超过 50 元的部分按 95%收费. 顾客到哪家商场购物花费少?

问题 1 你是如何理解题意的呢?

师生活动：学生先独立思考，理解题意，然后自由发表自己的观点.

设计意图：设置此问题，为了使学生能够主动思考问题.

问题 2 如果购物款累计达到 x 元，你能用含 x 的式子分别表示顾客在两家商场花费的钱数吗?

师生活动：学生回答，教师不断引导并完善.

设计意图：让学生在列式子的时候发现，由于优惠起点的不同，需要进行分类讨论，每种情况下有各自对应的式子.

问题 3 你能清楚直观地表示出上述问题吗?

师生活动：引导学生利用表格表示出来，并让学生在黑板上绘制表格.

设购物款累计达到 x 元.

购物款	在甲商场花费	在乙商场花费
$0<x\leqslant 50$	x	x
$50<x\leqslant 100$	x	$50+0.95(x-50)$
$x>100$	$100+0.9(x-100)$	$50+0.95(x-50)$

设计意图：让学生自己寻找方法，呈现出所表达的意思，培养学生的思维能力.

问题 4 你能从表格中看出哪家商场花费少吗?

师生活动：学生探究、交流，补全表格.

购物款	在甲商场花费	在乙商场花费	比较
$0<x\leqslant 50$	x	x	一样
$50<x\leqslant 100$	x	$50+0.95(x-50)$	乙商场
$x>100$	$100+0.9(x-100)$	$50+0.95(x-50)$	?

师生共同分析讨论，发现：

(1) 如果累计购物不超过 50 元，则在两家商场购物花费是一样的；

(2) 如果累计购物超过 50 元但不超过 100 元，则在乙商场购物花费少.

设计意图：根据表格比较出当购物款不超过 100 元，到哪家商场购物花费少.

问题 5　如果累计购物超过 100 元，在两家商场的花费情况如何？

师生活动：在学生充分发表意见的基础上，师生共同归纳出当购物超过 100 元时，需要分三种情况进行讨论：

(1) 什么情况下，到甲商场购物花费少？

(2) 什么情况下，到乙商场购物花费少？

(3) 什么情况下，到两商场购物花费一样？

学生分小组讨论、交流，教师指导. 学生自己总结：

当 $x>100$ 时，若在甲商场购物花费少，则 $100+0.9(x-100)<50+0.95(x-50)$，解得 $x>150$；若在乙商场购物花费少，则 $100+0.9(x-100)>50+0.95(x-50)$，解得 $x<150$；若在两家商场购物花费一样，则 $100+0.9(x-100)=50+0.95(x-50)$，解得 $x=150$. 这就是说当累计购物超过 150 元时，在甲商场购物花费少，而累计购物超过 100 元但不超过 150 元时，在乙商场购物花费少，累计购物刚好是 150 元时，在两家商场购物花费一样.

教师在黑板上完善表格.

<table>
<tr><th colspan="2">购物款</th><th>在甲商场花费</th><th>在乙商场花费</th><th>比较</th></tr>
<tr><td colspan="2">$0<x\leqslant 50$</td><td>x</td><td>x</td><td>一样</td></tr>
<tr><td colspan="2">$50<x\leqslant 100$</td><td>x</td><td>$50+0.95(x-50)$</td><td>乙商场</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>100$</td><td>$100<x<150$</td><td rowspan="3">$100+0.9(x-100)$</td><td rowspan="3">$50+0.95(x-50)$</td><td>乙商场</td></tr>
<tr><td>$x=150$</td><td>一样</td></tr>
<tr><td>$x>150$</td><td>甲商场</td></tr>
</table>

设计意图：学生从实际问题中抽象出数学问题，找出数量关系中的不等关系，用不等式来解决实际问题，让学生体会建立不等式模型的过程. 教师及时予以引导、归纳和总结，展现完整的解答过程. 培养学生有条理地思考和表达的习惯.

问题 6　你能综合上面分析，给出一个合理化的消费方案吗？

师生活动：学生回答：购物不超过 50 元和刚好是 150 元时，在两家商场购物，花费没有区别；超过 50 元而不到 150 元时，在乙商场购物花费少；超过 150 元后，在甲商场购物花费少.

设计意图：学生能够将数学问题的解转化为实际问题的答案.

2. 归纳总结

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 利用不等式来解决实际问题的步骤是什么？

(2) 用一元一次不等式解决实际问题时，最关键是哪一步？

(3) 用不等式解决实际问题与用方程解决实际问题，有什么相同和不同之处？

设计意图：通过问题归纳，总结本节课所学内容.

思考题

本周末老师组织全班同学参观蜡像馆，蜡像馆的门票是每人 20 元，60 人以上（含 60 人）可

按团体票购买，八折优惠. 若全班共 50 名师生去参观，如何购买，花费最少呢？若人数少于 60 人时，多少人买 60 人的团体票比买普通票花费少呢？

设计意图： 让学生再次练习，由实际问题中的不等关系列出不等式，建立数学模型，解不等式得到实际问题的答案，加深印象.

3. **布置作业**

教科书习题 16.2 第 7，8，9 题.

补充题　某校需要刻录一批电脑光盘. 若到电脑公司刻录，每张需要 8 元（包括空白光盘费）；若学校自己刻录，除租用刻录机需要 120 元外，每张还需要成本 4 元（包括空白光盘费）. 那么，刻录这批光盘到电脑公司刻录费用花费少，还是学校自己刻录花费少？

五、目标检测

1. 小颖准备用 21 元买笔和笔记本. 已知每支笔 3 元，每个笔记本 2.2 元. 她买了 2 个笔记本，请你帮她算一算，她还可以买几支笔？

设计意图： 本题主要考查学生建立一元一次不等式模型解决实际问题的能力.

2. 某通讯公司升级了两种通讯业务："A 业务"使用者先缴 15 元月租费，然后每通话 1 分，付话费 0.2 元；"B 业务"不缴月租费，每通话 1 分，付话费 0.3 元. 你觉得选哪种业务更优惠？

设计意图： 本题主要考查学生建立一元一次不等式模型解决实际问题的能力.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 不等号的由来

现实世界中存在着大量的不等关系，如何用符号来表示呢？为了寻求一套表示"大于"或"小于"的符号，1631 年，英国数学家哈里奥特（Thomas Harriot，1560—1621）首先采用符号"＞"表示"大于"，"＜"表示"小于"，这就是现在通用的大于号和小于号. 但当时它们的使用并没有被数学界所接受，直到 100 多年后"＞"和"＜"才逐渐成为标准的应用符号. 与哈里奥特同时代的数学家们也创造了一些表示大小关系的符号，但都因书写起来十分繁琐而被淘汰.

后来，人们在表达不等关系时，在许多情况下，要用到一个数（或量）大于或等于另一个数（或量），此时就把"＞"和"＝"结合起来得到符号"⩾"，读做"大于或等于"，有时也称为"不小于". 同样，把符号"⩽"读做"小于或等于"，有时也称为"不大于". 根据德国数学家哥德巴赫在 1734 年 1 月写给欧拉的信中所述，"⩾"和"⩽"这两个符号是由法国数学家布盖（Pierre）首先采用的，后来逐渐流传下来.

因此，有人把 $a>b$，$b<a$ 这样的不等式叫做严格不等式，把形如 $a\geqslant b$，$b\leqslant a$ 的不等式叫做不严格不等式.

2. 关于符号"$\geqslant$"和"$\leqslant$"

符号"$\geqslant$"读作"大于或等于"，而"$\leqslant$"读作"小于或等于".

如果 a，b 是两个确定的数（或者说，a，b 是常数），那么 $a \geqslant b$ 表示"$a > b$""$a = b$"有且仅有一个成立. 因此 $3 \geqslant 3$ 和 $3 \geqslant 2$ 都是正确的.

同样地，如果 a，b 是两个确定的数（或者说，a，b 是常数），那么 $a \leqslant b$ 表示"$a < b$""$a = b$"有且仅有一个成立，因此 $3 \leqslant 3$ 和 $3 \leqslant 4$ 都是正确的.

如果 x 是变数，a 是确定的数（或者说，a 是常数），那么 $x \geqslant a$ 表示 x 既可以取到 a，也可以取得大于 a 的值. 例如，$x \geqslant 3$，表示 x 可以取 3 和大于 3 的所有值.

同样地，如果 x 是变数，a 是确定的数（或者说，a 是常数），那么 $x \leqslant a$ 表示 x 既可以取到 a，也可以取得小于 a 的值. 例如，$x \leqslant 3$，表示 x 可以取 3 和小于 3 的所有值.

3. 数学中的大小

在一个数集 M 中，规定了一个关系，记作"$>$". 若"$>$"满足：

(1)（三歧性）对于数集 M 中的任何 2 个数 a，b，有且仅有 $a > b$，$b > a$，$a = b$ 之一成立；

(2)（传递性）对于数集 M 中的任何 3 个数 a，b，c，如果 $a > b$，$b > c$，那么 $a > c$；

(3)（加法单调性）对于数集 M 中的任何 3 个数 a，b，c，如果 $a > b$，那么 $a + c > b + c$；

(4)（乘法单调性）对于数集 M 中的任何 3 个数 a，b，c，如果 $a > b$，且 $c > 0$，那么 $a \times c > b \times c$；

则称关系"$>$"为"大于".

我们之所以说实数有大小，就是因为在实数集中能够规定一个关系，同时满足上述四条性质. 而我们之所以说复数没有大小，就是因为在复数集中不能规定一个关系，同时满足上述四条性质. 或者说，规定了一个关系同时满足上述四条性质，在复数集中就会导致矛盾.

4. 不等式的性质

教科书中的不等式性质 1 与性质 2，实际上是"大于"概念的内涵的一部分（如上所述，分别是加法单调性和乘法单调性）. 而性质 3 是可以由性质 1 与性质 2 证明的：

因为 $c < 0$，所以 $-c > 0$.

由性质 2，有 $a \times (-c) > b \times (-c)$，即 $-a \times c > -b \times c$.

再由性质 1，上式两边都加上 $a \times c + b \times c$，得

$$-a \times c + a \times c + b \times c > -b \times c + a \times c + b \times c.$$

化简，得 $b \times c > a \times c$.

即 $a \times c < b \times c$.

二、拓展性问题

1. 比较大小的两种方法

(1) 用求差法比较 $\frac{1}{2}(x^2 - y^2 + 3)$ 与 $\frac{1}{3}(x^2 - 2y^2 + 2)$ 的大小.

答案：根据"$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$""$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$""$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$"，要比较甲式与乙式的大小，只要判断出"甲式－乙式"所得的差在字母取值范围内与 0 的大小关系即可.

因为$\frac{1}{2}(x^2-y^2+3)-\frac{1}{3}(x^2-2y^2+2)$

$=\frac{1}{6}(3x^2-3y^2+9)-\frac{1}{6}(2x^2-4y^2+4)$

$=\frac{1}{6}(3x^2-3y^2+9-2x^2+4y^2-4)$

$=\frac{1}{6}(x^2+y^2+5)>0$，

所以$\frac{1}{2}(x^2-y^2+3)>\frac{1}{3}(x^2-2y^2+2)$.

(2) 用比商法比较$\frac{a}{5}$与$\frac{2a+1}{10}$ ($a>0$) 的大小.

答案：根据"若$a>0$，$b>0$，则$a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$""若$a<0$，$b<0$，则$a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}<1$"，要比较甲式与乙式的大小，只要判断出"$\frac{\text{甲式}}{\text{乙式}}$"所得的商式在字母取值范围内与1的大小关系即可. 值得注意的是，用比商法时，要考虑两式的取值范围.

因为$a>0$，所以$\frac{a}{5}>0$，$\frac{2a+1}{10}>0$.

因为$\frac{a}{5}\div\frac{2a+1}{10}=\frac{a}{5}\times\frac{10}{2a+1}=\frac{2a}{2a+1}<1$，所以$\frac{a}{5}<\frac{2a+1}{10}$.

2. **糖水加糖有点甜**

众所周知，在糖水中加糖，糖水会变得更甜. 如何用数学知识解释这一现象呢？

答案：不妨设糖水中糖的质量与糖水的质量的比为$\frac{a}{b}$($b>a>0$)，在其中加入糖m，此时糖水中糖的质量与糖水的质量的比变为$\frac{a+m}{b+m}$. 因为$\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{m(a-b)}{b(b+m)}<0$，所以$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$. 这说明加糖后，糖水中糖的质量与糖水的质量的比变大，因此糖水变甜了.

从数学上看，"糖水加糖就更甜"就是：当$b>a>0$，$m>0$时，$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$. 当$a>b>0$，$m>0$时，可以证明$\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}$.

3. **体育比赛中的不等式**

对体育比赛结果的分析，经常要考虑到问题中的不等关系. 例如下面的问题：

一个篮球队共打了14场比赛，其中赢的场数比平的场数和输的场数都要少，那么这个篮球队最多赢了几场球？

答案：设这个篮球队在14场比赛中赢x场，平y场，输z场，则$\begin{cases}x+y+z=14,\\x<y,\\x<z.\end{cases}$于是$x+y+z>x+x+x$，所以$3x<14$，即$x<\frac{14}{3}$. 因为$x$为正整数，只能取1，2，3，4，所以$x$的最大值为

4. 因此，这个篮球队最多赢了 4 场球.

4. 园林门票购买问题

某园林的门票每张 10 元，一次性使用. 考虑到人们的不同需求，也为了吸引更多的游客，该园林除保留原来的售票方法外，还推出了一种“购买个人年票”（个人年票从购买日起，可供持票者使用一年）的售票方法. 年票分 A，B，C 三类：A 类年票每张 120 元，持票者进入园林时，无需再购买门票；B 类年票每张 60 元，持票者进入该园林时，需再购买门票，每次 2 元；C 类年票每张 40 元，持票者进入该园林时，需再购买门票，每次 3 元.

（1）如果只能选择一种购买门票的方式，并且计划在一年中花费 80 元在该园林的门票上，通过计算，找出可进入该园林次数最多的方式；

（2）一年中进入该园林超过多少次时，购买 A 类年票比较合算？

答案：（1）不可能选 A 年票. 若选 B 类年票，则$\frac{80-60}{2}=10$（次）；若选 C 类年票，则$\frac{80-40}{3}=13\frac{1}{3}$（次）；若不购买年票，则$\frac{80}{10}=8$（次）. 所以，若计划花费 80 元在该园林的门票上时，则选择购买 C 类年票进入园林的次数最多，为 13 次.

（2）设超过 x 次时，购买 A 类年票比较合算，则$\begin{cases}60+2x>120,\\40+3x>120,\\10x>120.\end{cases}$解得 $x>30$. 因此，一年中进入该园林超过 30 次时，购买 A 类年票比较合算.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容有：一元一次不等式（组）的概念，不等式的性质，一元一次不等式（组）的解法及其应用. 对于不等式的性质，主要考查学生能否正确判断不等号的方向，特别是不等式两边乘或除以同一个负数时，不等号的方向改变. 对于一元一次不等式的解法，主要考查学生能否根据具体不等式，选择恰当的步骤获得解集，能否用数轴正确表示解集. 对于一元一次不等式的应用，主要考查学生能否从实际问题中找出不等关系，并设合理的未知数、列不等式，从而把实际问题转化为数学问题. 对于一元一次不等式组，主要考查学生能否用数轴确定不等式组的解集.

2. 考查不等式的解法及应用时应注意以下问题：

（1）对于一元一次不等式的解法，应考查学生是否能根据解一元一次不等式的一般步骤，针对具体不等式的特点，通过变形将不等式逐步化简，最后化归为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式.

（2）对于列一元一次不等式解决实际问题，要特别关注对从实际问题中分析出不等关系，把实际问题转化为数学问题，建立不等式模型的能力的考查.

3. 除了基本的试题测试以外，可设计一些具有开放性和探究性的问题，考查学生学习和应用

不等式的过程，如发现和提出问题的能力等.

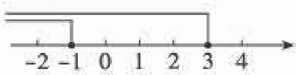
二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

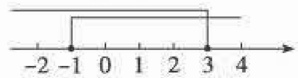
（一）选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 若 $a<b$，则下列不等式中正确的是（　　）.

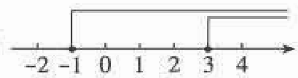
(A) $a-3<b-3$　　(B) $a-b>0$　　(C) $\frac{1}{3}a>\frac{1}{3}b$　　(D) $-2a<-2b$

2. 若不等式组的解集为 $-1\leqslant x\leqslant 3$. 则以下数轴表示中正确的是（　　）.

(A) 

(B) 

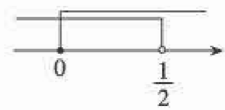
(C) 

(D) 

3. 不等式 $4(x-1)<3x-2$ 的正整数解的个数是（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 一个不等式组中的两个不等式的解集如图所示，则这个不等式组的解集为（　　）.



（第 4 题）

(A) $0<x\leqslant\frac{1}{2}$　　(B) $x\leqslant\frac{1}{2}$

(C) $0\leqslant x<\frac{1}{2}$　　(D) $x>0$

5. 如果点 $P(m,\ 1-2m)$ 在第四象限，那么 m 的取值范围是（　　）.

(A) $0<m<\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}<m<0$　　(C) $m<0$　　(D) $m>\frac{1}{2}$

6. 如果 $|x-2|=x-2$，那么 x 的取值范围是（　　）.

(A) $x\leqslant 2$　　(B) $x\geqslant 2$　　(C) $x<2$　　(D) $x>2$

（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. x 的 $\frac{1}{2}$ 与 5 的差不小于 3，用不等式表示为________.

8. 某饮料瓶上有这样的字样“保质期 18 个月”. 如果用 x（单位：月）表示保质期，那么该饮料的保质期可以用不等式表示为____________.

9. 当 x________时，式子 $3x-5$ 的值大于 $5x+3$ 的值.

10. 商店为了对某种商品促销，将定价为 3 元的商品，以下列方式优惠销售：若购买不超过 5 件，按原价付款；若一次性购买 5 件以上，超过部分打八折. 现有 27 元钱，最多可以购买该商品的件数是________.

（三）解答题（第 11，12 题每题 10 分，第 13 题 20 分，共 40 分）

11. (1) 解不等式 $\frac{1-x}{3}\leqslant\frac{1-2x}{7}$，并在数轴上表示它的解集；

(2) 解不等式组 $\begin{cases} 5x-1>3(x+1), \\ \frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x. \end{cases}$

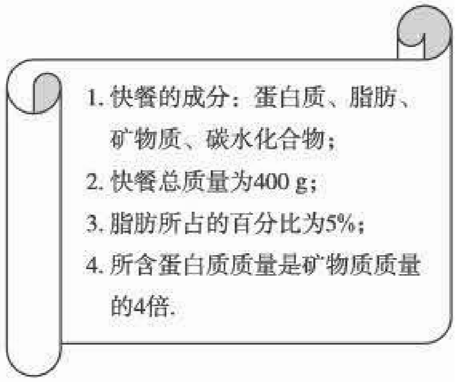
12. x 为何值时，代数式 $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}-1$ 的值是非负数？

13. 每年的 5 月 20 日是中国学生营养日，某校社会实践小组在这天开展活动，调查快餐营养情况. 他们从食品安全监督部门获取了一份快餐的信息（如图）. 根据此信息，解答下列问题：

(1) 求这份快餐中所含脂肪质量；

(2) 若碳水化合物占快餐总质量的 40%，求这份快餐所含蛋白质的质量；

(3) 若这份快餐中蛋白质和碳水化合物所占百分比的和不高于 85%，求其中所含碳水化合物质量的最大值.



（第 13 题）

参考答案

1. A. 本题主要考查学生对不等式性质的掌握.
2. B. 本题主要考查学生对不等式组解集的数轴表示的掌握.
3. B. 本题主要考查学生解一元一次不等式及由解集中选出符合要求的解的能力.
4. C. 本题主要考查学生由数轴确定不等式组解集的能力.
5. D. 本题主要考查学生利用平面直角坐标系中点的坐标特征列不等式组及解不等式组的能力.
6. B. 本题主要考查学生利用绝对值的定义列不等式及解不等式的能力.
7. $\frac{1}{2}x-5\geqslant 3$. 本题主要考查学生根据数学关系列不等式的能力.
8. $x<18$. 本题主要考查学生根据实际问题情境列不等式的能力.
9. $x<-4$. 本题主要考查学生根据式子间的关系列不等式及解不等式的能力.
10. 10. 本题主要考查学生用不等式解决实际问题的能力.
11. (1) $x\geqslant 4$. 本题主要考查学生解不等式及在数轴上表示不等式解集的能力.

    (2) $2<x\leqslant 4$. 本题主要考查学生解不等式组的能力.
12. $x\leqslant -1$. 本题主要考查学生列不等式及解不等式的能力.
13. (1) 20 g. (2) 176 g. 提示：设所含矿物质的质量为 x g，由题意得 $x+4x+20+400\times 40\%=400$，解得 $x=44$，故 $4x=176$. (3) 180 g. 提示：设所含矿物质的质量为 y g，则所含碳水化合物的质量为 $(380-5y)$g，于是有 $4y+(380-5y)\leqslant 400\times 85\%$，解得 $y\geqslant 40$，故 $380-5y\leqslant 180$. 本题主要考查学生用不等式解决实际问题的能力.

第十七章　三角形

Ⅰ 总体设计

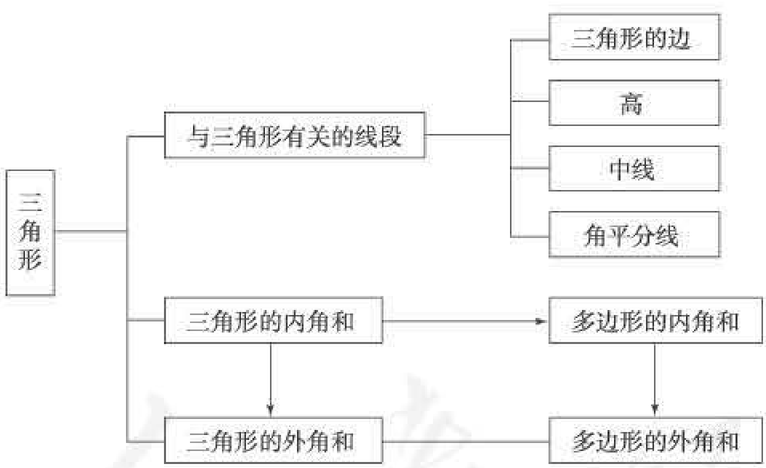
一、本章学习目标

1. 理解三角形及与三角形有关的线段（边、高、中线、角平分线）的概念，证明三角形两边的和大于第三边，了解三角形的重心的概念，了解三角形的稳定性.

2. 理解三角形的内角、外角的概念，探索并证明三角形内角和定理，探索并掌握直角三角形的两个锐角互余，掌握有两个角互余的三角形是直角三角形，掌握三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

3. 了解多边形的有关概念（边、内角、外角、对角线、正多边形），探索并掌握多边形的内角和与外角和公式.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章首先介绍三角形的有关概念和性质，分为两节.

第 17.1 节研究与三角形有关的线段. 首先结合引言中的实际例子给出三角形的概念，进而研究三角形的分类. 对于三角形的边，证明了三角形两边的和大于第三边. 然后给出三角形的高、中线与角平分线的概念. 结合三角形的中线介绍三角形的重心的概念. 最后结合实际例子介绍三角形的稳定性.

第 17.2 节研究与三角形有关的角. 对于三角形的内角，证明了三角形内角和定理. 然后由这个定理推出直角三角形的性质：直角三角形的两个锐角互余. 最后给出三角形的外角的概念，并由三角形内角和定理推出：三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

以三角形的有关概念和性质为基础，第 17.3 节接着介绍多边形的有关概念与多边形的内角和、外角和公式. 三角形是多边形的一种，因而可以借助三角形给出多边形的有关概念，如多边形的边、内角、外角、内角和都可由三角形的有关概念推广而来. 三角形是最简单的多边形，因而常常将多边形分为若干个三角形，利用三角形的性质研究多边形. 多边形的内角和公式就是利用上述方法得到的. 将多边形的有关内容与三角形的有关内容紧接安排，可以加强它们之间的联系，便于学生学习.

四、课时安排

本章教学时间约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

17.1　与三角形有关的线段	2 课时
17.2　与三角形有关的角	3 课时
17.3　多边形及其内角和	3 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 加强与实际的联系

三角形是基本的几何图形之一，在生产和生活中有广泛的应用. 教科书通过举出三角形的实际例子让学生认识和感受三角形，形成三角形的概念. 多边形概念的引入，也是类似处理的.

三角形有很多重要的性质，如稳定性、三角形的内角和等于 180°. 教科书在介绍三角形的稳定性的同时，顺带介绍了四边形的不稳定性. 这些内容是通过如下的实际问题引入的：“盖房子时，在窗框未安装好之前，木工师傅常常先在窗框上斜钉一根木条. 为什么要这样做呢?”然后让学生通过实验得出三角形有稳定性、四边形没有稳定性的结论，进而明白在上述实际问题中“斜钉一根木条”的道理. 除此之外，教科书还举出了一些应用三角形的稳定性、四边形的不稳定性的实际例子. 对于三角形的内角和等于 180°，教科书则安排求视角的实际问题作为例题，加强与实际的联系.

在本章的数学活动中，教科书从用地砖铺地引入镶嵌，进而让学生探究一些多边形能否镶嵌成平面图案，并运用通过探究得出的结论进行简单的镶嵌设计. 在编写时关注上述从实践到理论，再从理论到实践的全过程，使学生对理论来源于实践又运用于实践的认识进一步加深.

2. 加强与已学内容的联系

学生在前两个学段已学过三角形的一些知识，对三角形的许多重要性质有所了解，在第三学段又学过线段、角以及相交线、平行线等知识，初步了解了一些简单几何体和平面图形及其基本特征，会进行简单的推理. 上述内容是学习本章的基础. 三角形的高、中线、角平分线分别与已学过的垂线、线段的中点、角的平分线有关；用拼图的方法认识三角形的内角和等于 180°可以启发学生得出证明这个结论正确的方法，而证明的过程中要用到平行线的性质与平角的定义. 在编写时关注本章内容与已学内容的联系，帮助学生掌握本章所学内容. 另一方面，又注意让学生通过本章内

容的学习，复习巩固已学的内容.

3. 加强推理能力的培养

学生已经通过推理证明了一些图形的性质，如同角（等角）的补角相等，对顶角相等. 本章中的许多结论也要通过推理来证明. 在本章中加强推理能力的培养，可以提高学生已有的思维水平，也为学习全等三角形、等腰三角形、平行四边形等内容打下基础.

在“相交线与平行线”一章已经给出了证明的概念，在本章中进一步借助“三角形的内角和等于 180°”这个结论的探索与证明让学生体会证明的必要性. 教科书首先回顾学生在小学是通过度量与剪拼的方法知道这个结论的. 然后指出：测量常常有误差，并且只能对有限个三角形运用上述方法，而形状不同的三角形有无数个，不能通过上述方法得出这个结论，所以需要通过推理的方法去证明. 这样通过以上分析让学生明白为什么要证明，提高对推理证明的认识.

三角形内角和定理是本章的重点内容. 在本章中，由平行线的性质与平角的定义证明了这个定理. 由这个定理还证明了“直角三角形的两个锐角互余”“三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和”以及多边形内角和公式. 此外，还由“两点之间，线段最短”证明了“三角形两边的和大于第三边”，由多边形内角和公式证明了多边形外角和公式. 安排这些内容有助于提高学生的推理能力.

学生在本章仍处于进一步熟悉证明的阶段，学习通过推理的方法证明本章中的有关结论有一定难度. 因此，教科书注意分析证明结论的思路，通过多提问题，留给学生足够的思考时间，让学生经历发现和提出问题、分析和解决问题的过程. 例如，对于三角形内角和定理，设计实验操作的探究栏目，并对操作过程进行分析，从而获得证明的思路. 注重证明思路的分析有助于学生学好推理证明.

六、对本章教学的建议

1. 把握好教学要求

与三角形有关的一些概念在本章中只要求达到理解的程度就可以了，进一步的要求可通过后续学习达到. 如对于三角形的角平分线，在本章中只要知道它的定义，能够从定义得出角相等就可以了. 学生在画角平分线时发现三条角平分线交于一点，可直接肯定这个结论，在下一章“全等三角形”中再证明这个结论. 同样，三角形的三条中线交于一点的结论也可直接点明.

在本章中，三角形的稳定性是通过实验得出的，待以后学过“三边分别相等的两个三角形全等”，可进一步明白其中的道理. 证明三角形的内角和等于 180°有一定的难度，只要学生了解得出结论的过程，不要在辅助线上花太多的精力，以免影响对内容本身的理解与掌握，对推理的要求应循序渐进.

2. 开展好数学活动

镶嵌作为数学活动的内容安排在本章的最后，解决其中的问题要用到多边形的内角和公式. 通过这个数学活动，学生可以经历从实际问题抽象出数学问题，建立数学模型，综合应用已有知识解决问题的过程，从而加深对相关知识的理解，提高思维能力.

这个数学活动可以如下展开：

首先引入用地砖铺地，用瓷砖贴墙等问题情境，并把这些实际问题转化为数学问题：用一些不重叠摆放的多边形把平面的一部分完全覆盖. 然后让学生通过实验探究一些多边形能否镶嵌成平面图案，并记下实验结果：

（1）用正三角形、正方形或正六边形可以镶嵌成一个平面图案，用正五边形不能镶嵌成一个平面图案；

（2）用正三角形与正方形可以镶嵌成一个平面图案，用正三角形与正六边形也可以镶嵌成一个平面图案；

（3）用任意三角形可以镶嵌成一个平面图案，用任意四边形可以镶嵌成一个平面图案.

观察上述实验结果，得出如下结论：如果拼接在同一个点的各个角的和恰好等于 360°（周角），相邻的多边形有公共边，那么多边形能镶嵌成一个平面图案.

运用上述结论解释实验结果，例如，三角形的内角和等于 180°，因此，把 6 个全等的三角形适当地拼接在同一个点，一定能使以这个点为顶点的 6 个角的和恰好等于 360°，并且使边长相等的两条边贴在一起. 于是，用三角形能镶嵌成一个平面图案. 又如，由多边形内角和公式，可以得到五边形的内角和等于 $(5-2)\times 180^\circ=540^\circ$. 因此，正五边形的每个内角等于 $540^\circ\div 5=108^\circ$，$360^\circ$ 不是 108° 的整数倍，也就是说用一些 108° 的角拼不成 360° 的角. 因此，用正五边形不能镶嵌成一个平面图案.

最后，让学生进行简单的镶嵌设计，使所学内容得到巩固与运用.

第十七章　三角形[1]

三角形是一种基本的几何图形．从古埃及的金字塔到现代的建筑物，从巨大的钢架桥到微小的分子结构，到处都有三角形的形象．[2]为什么在工程建筑、机械制造中经常采用三角形的结构呢？这与三角形的性质有关．

一个三角形有三个角、三条边．三个角之间有什么关系？三条边之间有什么关系？在小学我们通过测量得知三角形的内角和等于180°，但测量常常有误差．三角形有无数多个，要说明任意一个三角形都符合这一规律，就不能只靠测量，而必须通过推理证明．本章中，我们就来证明这个结论．

三角形是最简单的多边形，也是认识其他图形的基础．本章将在学习与三角形有关的线段和角的基础上，学习多边形的有关知识，如借助三角形的内角和探究多边形的内角和．学习本章后，我们不仅可以进一步认识三角形，而且还可以了解一些几何中研究问题的基本思路和方法．

Ⅱ 教材分析

[1] 在本章中，学生通过学习与三角形有关的线段、角及多边形的内角和等内容，加深对三角形的认识．

从章前图中可以看到三角形的形象．也可以展示其他图片让学生欣赏，并从中抽象出三角形．画面上可以呈现出几种不同类型的三角形：既可以有一般的三角形，也可以有特殊的三角形，如等腰三角形、直角三角形．

[2] 三角形是基本的几何图形之一，从自然景观到微型模型，从建筑物到艺术作品，甚至日常生活用品，都可以找到三角形的例子．可让学生自己举出三角形的实际例子．

1. 学生在前两个学段已学过一些三角形的知识，在第三学段又学过线段、角以及相交线、平行线等知识，他们的空间观念得到了进一步的发展．现在再来学习三角形的有关内容，就有了更为充实的基础和准备．通过本章的学习，可以丰富和加深学生对三角形的认识，同时为学习其他图形知识打好基础．可通过引言向学生指出学习本章的意义．

2. 三角形是一种基本的几何图形，是认识其他图形的基础．在本章，学习了三角形的有关概念和性质，就可以进一步学习多边形及其内角和的内容，使三角形的有关内容得到运用和发展．

3. 引言中涉及的内容在本章中还会有所回应：由实验得出三角形的稳定性，由此说明在工程建筑、机械制造中经常采用三角形结构的道理；由平行线的性质与平角的定义得出“三角形的内角和等于180°”；由“三角形的内角和等于180°”得出多边形内角和公式．

[1] “顶点 A 所对的边”也可以说成“$\angle A$ 所对的边”，还可简单说成“$\angle A$ 的对边”.

17.1 与三角形有关的线段

17.1.1 三角形的边

在本章引言中，我们提到许多三角形的实际例子.

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做**三角形**（triangle）.

在图 17.1-1 中，线段 AB，BC，CA 是三角形的边. 点 A，B，C 是三角形的顶点. $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是相邻两边组成的角，叫做三角形的内角，简称三角形的角.

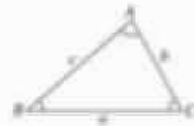


图 17.1-1

顶点是 A，B，C 的三角形，记作 $\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”.

$\triangle ABC$ 的三边，有时也用 a，b，c 来表示. 如图 17.1-1，顶点 A 所对的边 BC 用 a 表示[1]，顶点 B 所对的边 AC 用 b 表示，顶点 C 所对的边 AB 用 c 表示.

我们知道，三边都相等的三角形叫做等边三角形（图 17.1-2（1））；有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（图 17.1-2（2））.

图 17.1-2（3）中的三角形是三边都不相等的三角形.

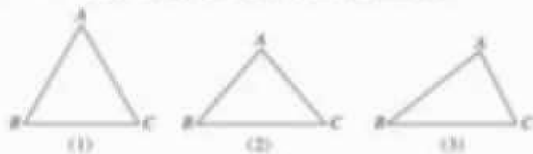


图 17.1-2

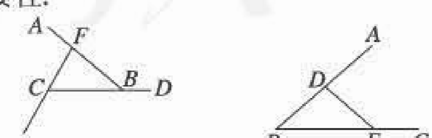
思考

我们知道，按照三个内角的大小，可以将三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形. 如何按照边的关系对三角形进行分类呢？说说你的想法，并与同学交流.

以“是否有边相等”，可以将三角形分为两类：三边都不相等的三角形和等腰三角形.

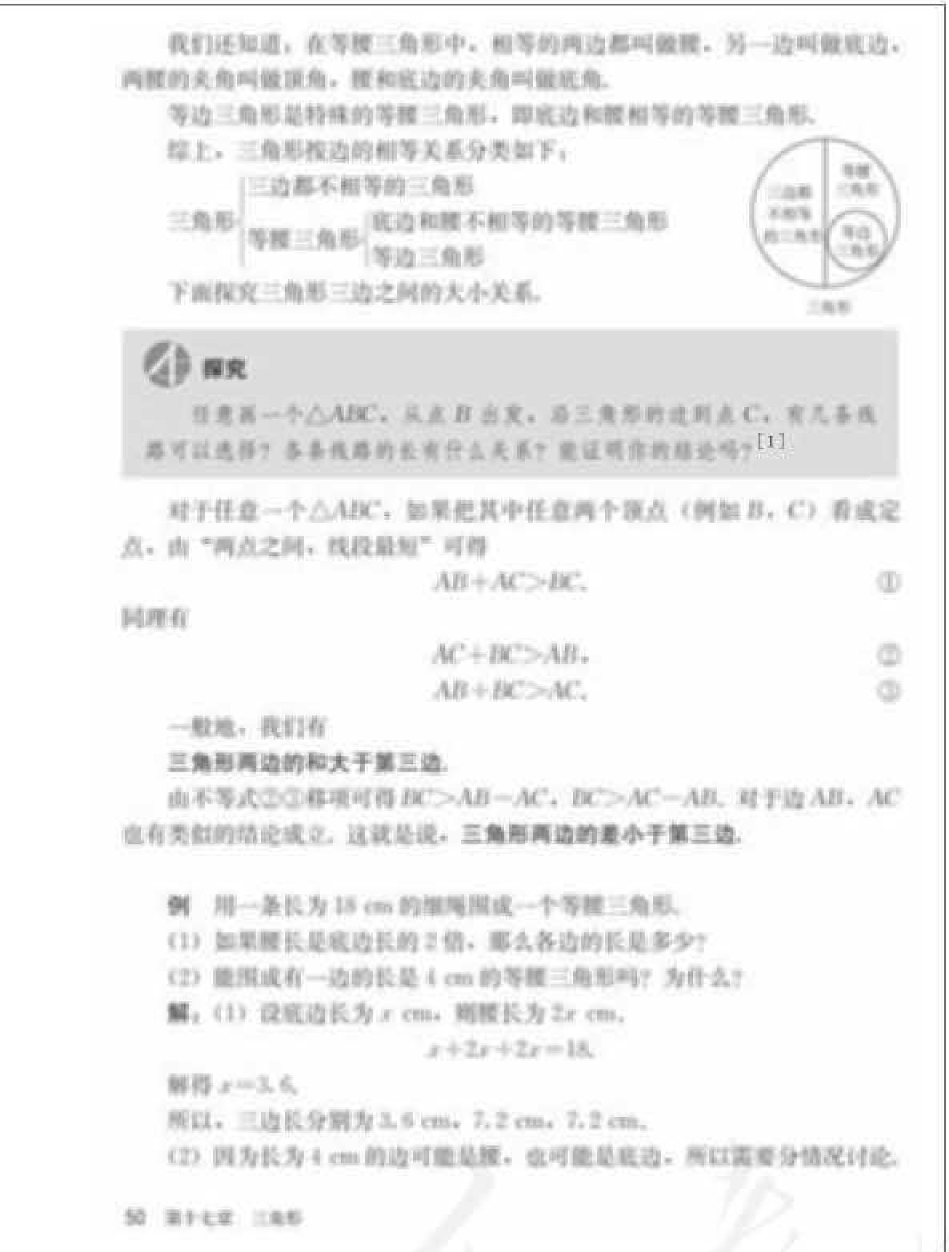
1. 本节的主要内容是与三角形有关的一些概念（三角形，三角形的边、顶点、内角、高、中线、角平分线），三角形三边的关系，以及三角形的稳定性.

2. 对于三角形的概念，学生在前两个学段里已接触过，但那时只是结合图形说明三角形是由三条线段组成的. 本章需进一步严格定义，要强调“首尾顺次相接”. 为了加深理解这个条件，教学时可用下面的图形说明定义中增加这几个字的必要性.



三角形的边、顶点、内角等，学生在前两个学段已接触过，也容易理解，只要学生理解它们的意义就可以了，不要求学生背它们的定义.

3. 学生有可能按边把三角形分为三边都不相等的三角形，等腰三角形，等边三角形，把等



我们还知道，在等腰三角形中，相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角.

等边三角形是特殊的等腰三角形，即底边和腰相等的等腰三角形.

综上，三角形按边的相等关系分类如下：

三角形
- 三边都不相等的三角形
- 等腰三角形
  - 底边和腰不相等的等腰三角形
  - 等边三角形

下面探究三角形三边之间的大小关系.

探究

任意画一个△ABC，从点 B 出发，沿三角形的边到点 C，有几条线路可以选择？各条线路的长有什么关系？能证明你的结论吗？[1]

对于任意一个△ABC，如果把其中任意两个顶点（例如 B，C）看成定点，由“两点之间，线段最短”可得

$$AB+AC>BC. \quad ①$$

同理有

$$AC+BC>AB, \quad ②$$
$$AB+BC>AC. \quad ③$$

一般地，我们有

三角形两边的和大于第三边.

由不等式②③移项可得 $BC>AB-AC$，$BC>AC-AB$. 对于边 AB，AC 也有类似的结论成立. 这就是说，**三角形两边的差小于第三边.**

例 用一条长为 18 cm 的细绳围成一个等腰三角形.

(1) 如果腰长是底边长的 2 倍，那么各边的长是多少？

(2) 能围成有一边的长是 4 cm 的等腰三角形吗？为什么？

解： (1) 设底边长为 x cm，则腰长为 $2x$ cm.

$$x+2x+2x=18.$$

解得 $x=3.6$.

所以，三边长分别为 3.6 cm，7.2 cm，7.2 cm.

(2) 因为长为 4 cm 的边可能是腰，也可能是底边，所以需要分情况讨论.

50 第十七章 三角形

[1] 有两条路线可以选择：一条路线是由点 B 到点 C；另一条路线是由点 B 到点 A，再由点 A 到点 C. 两条路线的长分别是 BC，$AB+AC$. 由“两点之间，线段最短”可以得到 $AB+AC>BC$.

腰三角形与等边三角形看成独立的两类. 教学中要说明，等腰三角形是有两条边相等的三角形，它既包括腰和底边不相等的等腰三角形，又包括腰和底边相等的等腰三角形，也就是等边三角形. 因此等边三角形是特殊的等腰三角形，等腰三角形与等边三角形不是独立的两类.

4. “三角形两边的和大于第三边”由“两点之间，线段最短”得到. 可根据学生的实际情况，适当引导学生回忆六年级下册第九章中学过的这个基本事实.

“三角形两边的和大于第三边”可以用来判断三条线段能否组成三角形，要让学生会运用这个结论解决这样的问题. 一定要检查是否任意两条线段的和都大于第三条线段. 也可以检查较小的两条线段的和是否大于第三条线段.

由“三角形两边的和大于第三边”可以推出“三角形两边的差小于第三边”.

本节的例题为巩固“三角形两边的和大于

如果 4 cm 长的边为底边，设腰长为 x cm，则

$$4+2x=18.$$

解得 $x=7$.

如果 4 cm 长的边为腰，设底边长为 x cm，则

$$2\times4+x=18.$$

解得 $x=10$.

因为 $4+4<10$，不符合三角形两边的和大于第三边，所以不能围成腰长是 4 cm 的等腰三角形.

由以上讨论可知，可以围成底边长是 4 cm 的等腰三角形.

练习

1. 图中有几个三角形？用符号表示这些三角形.
2. （口答）下列长度的三条线段能否组成三角形？为什么？

(1) 3，4，8；(2) 5，6，11；(3) 5，6，10.

（第1题）

练习答案

1. 5个. $\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle BCE$，$\triangle ABE$，$\triangle CDE$.
2. (1)不能组成三角形. 因为 $3+4<8$，即两条线段的和小于第三条线段，所以不能组成三角形.

(2)不能组成三角形. 因为 $5+6=11$，即两条线段的和等于第三条线段，所以不能组成三角形.

(3)能组成三角形. 因为任意两条线段的和都大于第三条线段.

17.1.2 三角形的高、中线与角平分线

与三角形有关的线段，除了三条边，还有我们已经学过的三角形的高.[1] 如图 17.1-3，从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向它所对的边 BC 所在直线画垂线，垂足为 D，所得线段 AD 叫做 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的**高** (altitude).

用同样方法，你能画出 $\triangle ABC$ 的另两条边上的高吗？[2]

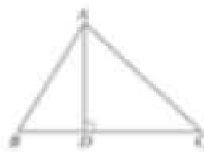


图 17.1-3

我们再来看两种与三角形有关的线段.

如图 17.1-4 (1)，连接 $\triangle ABC$ 的顶点 A 和它所对的边 BC 的中点 D，所得线段 AD 叫做 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的**中线** (median).

用同样方法，你能画出 $\triangle ABC$ 的另两条边上的中线吗？

第十七章 三角形 51

[1] 学生在前两个学段已经知道什么是三角形的高，还学过三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times$底边$\times$高.

[2] 让学生画出 $\triangle ABC$ 的另两条边上的高. 学生画出三角形的三条高，能够发现它们所在的直线相交于一点. 可以告诉他们这个结论是对的.

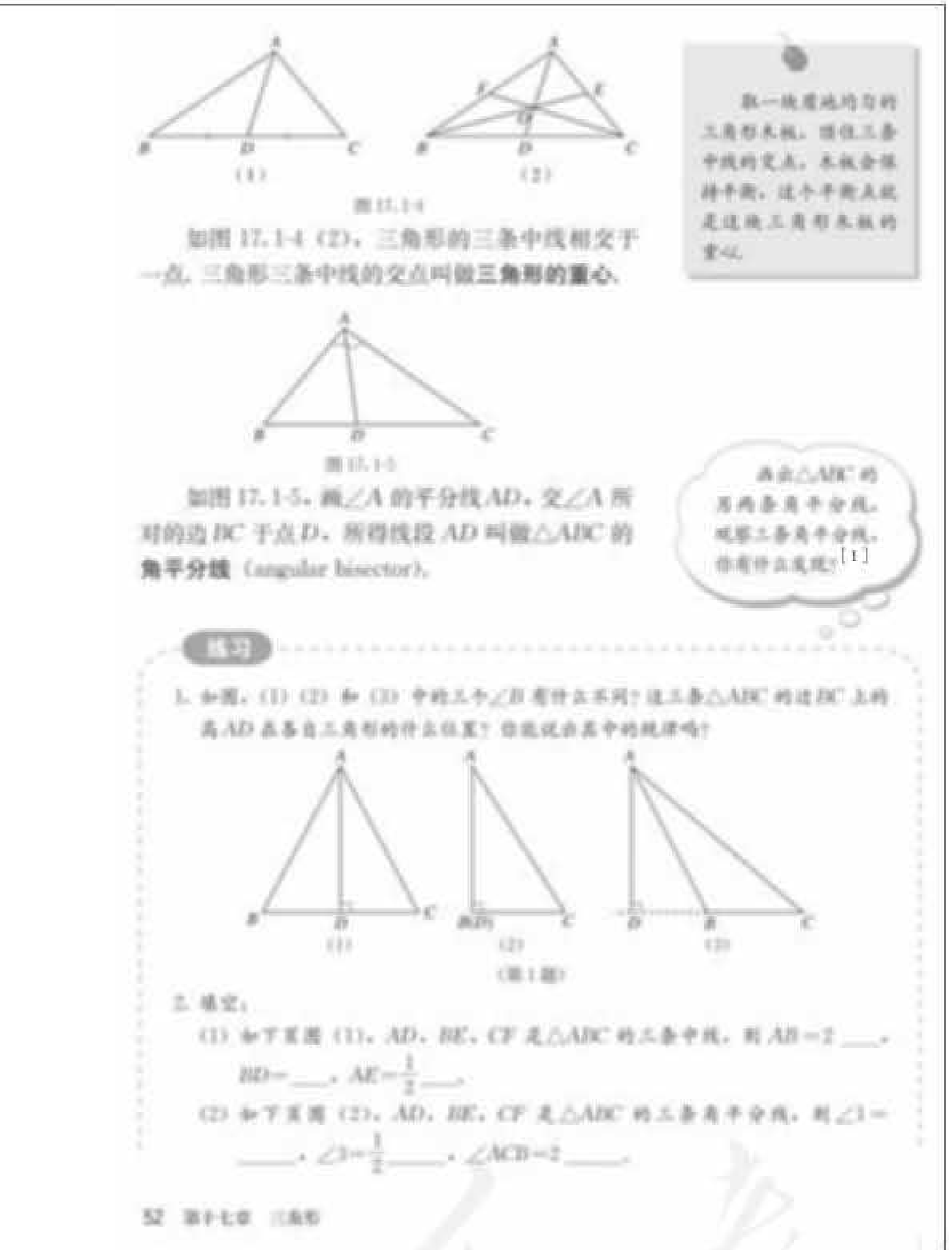
第三边”而设. 可根据条件列方程求解，注意用“三角形两边的和大于第三边”判断所得的结果是否合理. 在第（2）小题中要引导学生认真审题：“有一边的长”并没有指明这一边是底还是腰，所以要分情况讨论.

5. 介绍高、中线、角平分线时，要从画图入手，这样可以在学生头脑中留下这三种线段的清晰形象. 然后让学生结合这些具体形象叙述它们的定义，如果学生叙述得不准确、不简明，可通过讨论加以完善. 这样做，学生不仅容易理解，也容易记住，同时也培养了他们的语言表达能力.

画钝角三角形的三条高时，有两个垂足落在边的延长线上，可以让学生自己试一试怎样画，这样印象深刻.

对于三角形的高、中线、角平分线，可作些比较：

(1) 高 AD 的一个端点是 $\triangle ABC$ 的一个顶



如图 17.1-4（2），三角形的三条中线相交于一点. 三角形三条中线的交点叫做**三角形的重心**.

取一块质地均匀的三角形木板，顶住三条中线的交点，木板会保持平衡，这个平衡点就是这块三角形木板的重心.

图 17.1-4

图 17.1-5

如图 17.1-5，画∠A 的平分线 AD，交∠A 所对的边 BC 于点 D，所得线段 AD 叫做△ABC 的**角平分线**（angular bisector）.

画出△ABC 的另两条角平分线，观察三条角平分线，你有什么发现？[1]

练习

1. 如图，(1)(2)和(3)中的三个∠B 有什么不同？这三条△ABC 的边 BC 上的高 AD 在各自三角形的什么位置？你能说出其中的规律吗？

（第 1 题）

2. 填空：

(1) 如下页图(1)，AD，BE，CF 是△ABC 的三条中线，则 AB=2___，BD=___，AE=$\frac{1}{2}$___.

(2) 如下页图(2)，AD，BE，CF 是△ABC 的三条角平分线，则∠1=___，∠3=$\frac{1}{2}$___，∠ACB=2___.

52 第十七章 三角形

[1] 让学生画出△ABC 的另两条角平分线. 学生画出三角形的三条角平分线，能够发现它们相交于一点. 可以告诉他们这个结论是对的. 以后学完角的平分线的性质，可以证明这个结论.

练习答案

1. (1)(2)和(3)中的∠B 分别是锐角，直角，钝角. 当∠B 是锐角时，高 AD 在△ABC 的内部；当∠B 是直角时，高 AD 与边 AB 重合；当∠B 是钝角时，高 AD 的垂足在 CB 的延长线上，高 AD 在△ABC 的外部.
2. (1) AF 或 BF，CD，AC.
   (2) ∠2，∠ABC，∠4.

点，另一个端点是边 BC 所在的直线上的一点，$AD \perp BC$.

(2) 中线 AD 的一个端点是△ABC 的一个顶点，另一个端点是边 BC 的中点.

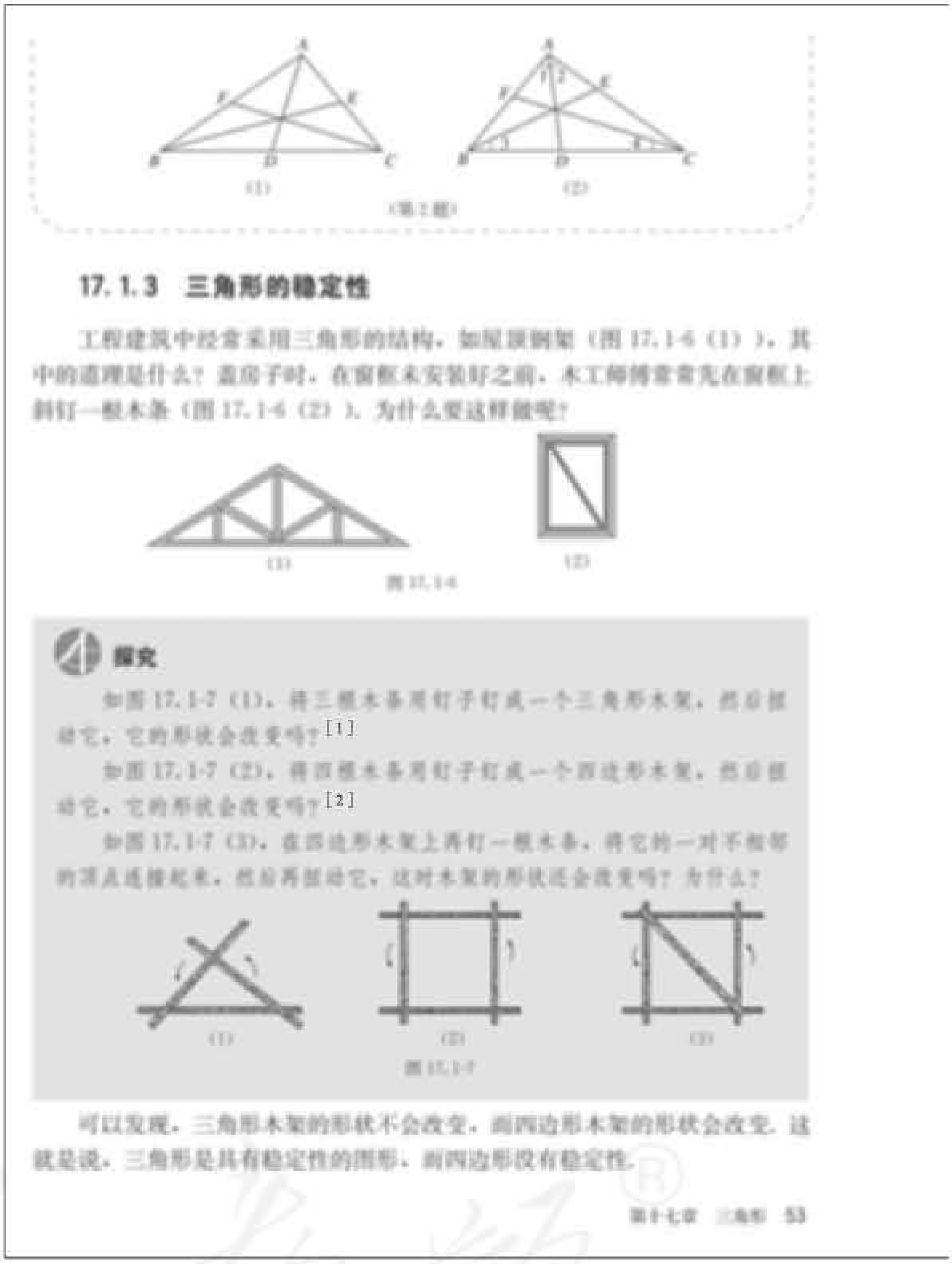
(3) 角平分线 AD 的一个端点是△ABC 的一个顶点，另一个端点是∠BAC 的平分线与边 BC 的交点.

6. 三角形的稳定性在生产和生活中是很有用的. 例如，房屋的人字梁具有三角形的结构，它就坚固和稳定；在栅栏门上斜着钉一条（或两条）木板，构成一些三角形，就可以使栅栏门不变形. 大桥钢架、输电线支架、索道支架都采用三角形结构，也是这个道理. 可让学生通过实验得出这个性质，并举出一些应用三角形的稳定性的例子.

7. “不稳定”是四边形的一个重要性质，在生产和生活中常常遇到有关这方面的问题. 有时候我们需要利用四边形的不稳定性，如活动挂

［1］不会改变．也就是说，三角形的三条边长确定后，三角形的形状就确定了．

［2］会改变．也就是说，四边形的四条边长确定后，不能确定它的形状，它的各个角的大小可以改变．



(1)　(2)

（第2题）

17.1.3　三角形的稳定性

工程建筑中经常采用三角形的结构，如屋顶钢架（图17.1-6（1）），其中的道理是什么？盖房子时，在窗框未安装好之前，木工师傅常常先在窗框上斜钉一根木条（图17.1-6（2）），为什么要这样做呢？

(1)　(2)

图17.1-6

探究

如图17.1-7（1），将三根木条用钉子钉成一个三角形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？[1]

如图17.1-7（2），将四根木条用钉子钉成一个四边形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？[2]

如图17.1-7（3），在四边形木架上再钉一根木条，将它的一对不相邻的顶点连接起来，然后再扭动它，这时木架的形状还会改变吗？为什么？

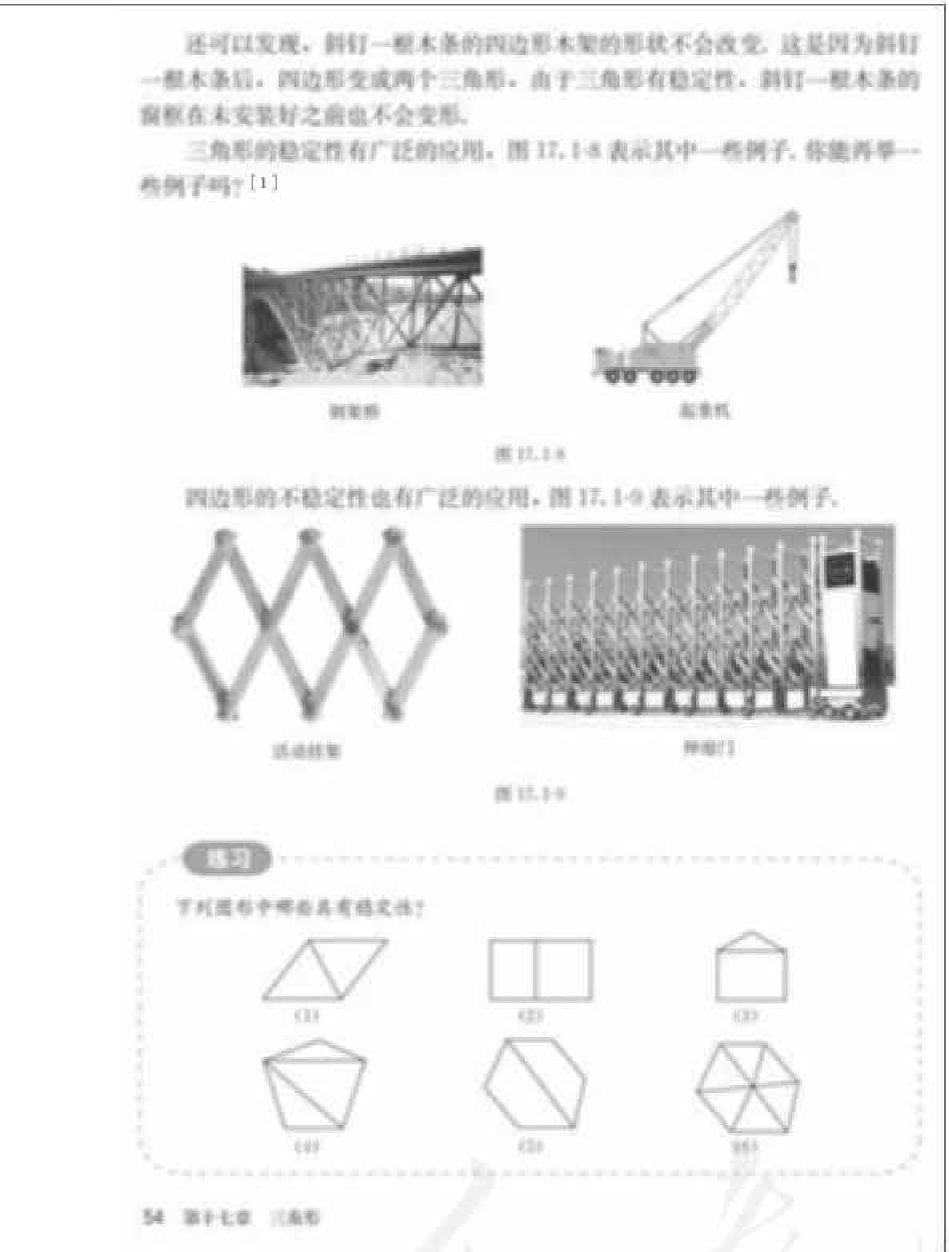
(1)　(2)　(3)

图17.1-7

可以发现，三角形木架的形状不会改变，而四边形木架的形状会改变．这就是说，三角形是具有稳定性的图形，而四边形没有稳定性．

第十七章　三角形　53

架，伸缩门．有时我们又要克服四边形的不稳定性，如在窗框未安装好之前，先在窗框上斜钉一根木条，使它不变形．这些内容也可以让学生通过实验和实际例子加以体会．



还可以发现，斜钉一根木条的四边形木架的形状不会改变. 这是因为斜钉一根木条后，四边形变成两个三角形，由于三角形有稳定性，斜钉一根木条的窗框在未安装好之前也不会变形.

三角形的稳定性有广泛的应用，图 17.1-8 表示其中一些例子. 你能再举一些例子吗？[1]

钢架桥　　起重机

图 17.1-8

四边形的不稳定性也有广泛的应用，图 17.1-9 表示其中一些例子.

活动挂架　　伸缩门

图 17.1-9

练习

下列图形中哪些具有稳定性？

(1)　(2)　(3)　(4)　(5)　(6)

54　第十七章　三角形

[1] 如输电线支架、索道支架等.

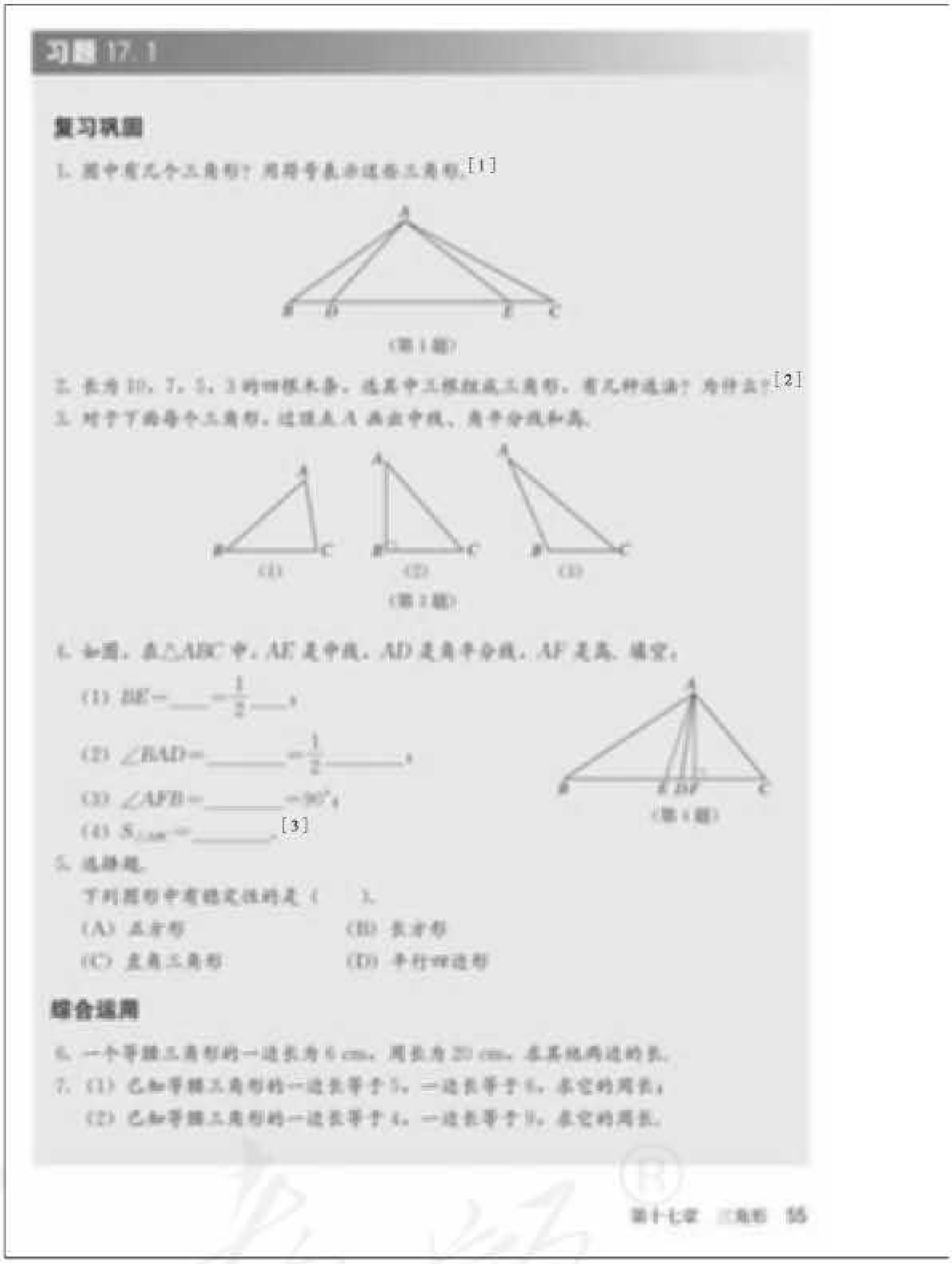
练习答案

(1)(4)(6) 中的图形具有稳定性.

[1] 提示学生不要重，不要漏．在本题中，在 BC 上找出几条线段，就能组成几个三角形．

[2] 在本题中，要先列举出从四根木条中选出三根的四种情况：10，7，5；10，7，3；10，5，3；7，5，3，再分别判断它们能否组成三角形．应关注学生能否有条理地列出所有情况．

[3] $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积．



习题 17.1

复习巩固

1. 图中有几个三角形？用符号表示这些三角形．[1]

（第1题）

2. 长为 10，7，5，3 的四根木条，选其中三根组成三角形，有几种选法？为什么？[2]

3. 对于下面每个三角形，过顶点 A 画出中线、角平分线和高．

(1)　(2)　(3)

（第3题）

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AE 是中线，AD 是角平分线，AF 是高．填空：

(1) $BE=$____$=\frac{1}{2}$____；

(2) $\angle BAD=$____$=\frac{1}{2}$____；

(3) $\angle AFB=$____$=90^\circ$；

(4) $S_{\triangle ABC}=$____．[3]

（第4题）

5. 选择题．

下列图形中有稳定性的是（　　）．

(A) 正方形　　(B) 长方形

(C) 直角三角形　　(D) 平行四边形

综合运用

6. 一个等腰三角形的一边长为 6 cm，周长为 20 cm，求其他两边的长．

7. (1) 已知等腰三角形的一边长等于 5，一边长等于 6，求它的周长；

(2) 已知等腰三角形的一边长等于 4，一边长等于 9，求它的周长．

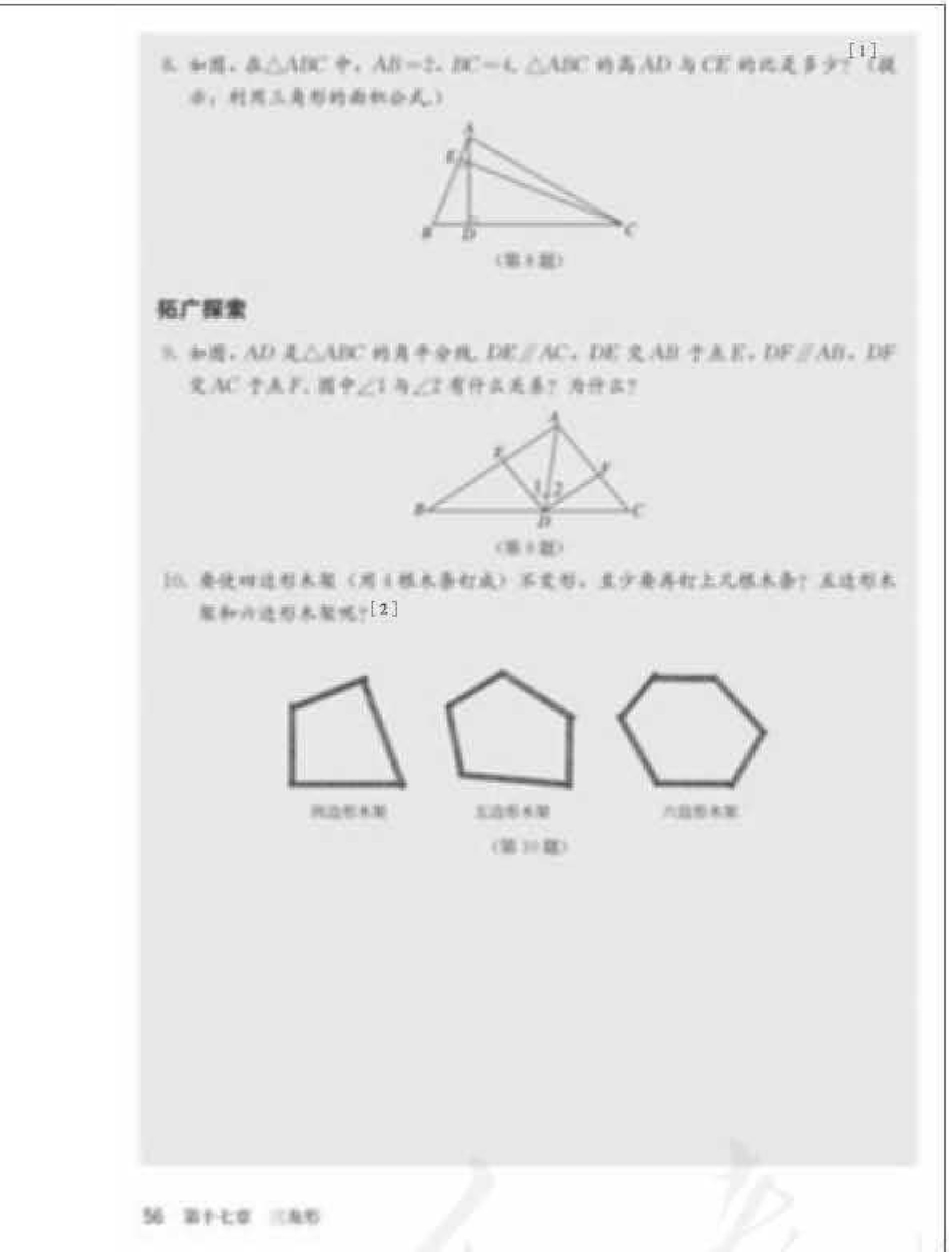
第十七章　三角形　55

习题 17.1

1. 第 1 题复习巩固三角形的概念，进一步熟悉三角形的符号表示．

2. 第 2，6，7 题要运用“三角形两边的和大于第三边”．在第 2 题中，从四根木条中选三根，有 4 种情况．在每种情况中，三根木条能否组成三角形，要运用上述结论加以判断．在第 6 题中，长为 6 cm 的边可能是相等的两条边之一，也可能不是．所以要分两种情况计算．第 7 题也要分情况计算．

3. 第 3，4，8，9 题与三角形的高、中线、角平分线有关．在第 3 题中，通过画出这些线段，复习巩固有关概念．第 4 题的前 3 个小题是让学生用符号表示这些线段的特征，第 4 个小题复习三角形的面积公式，第 8 题要用到这个公式．第 9 题则综合运用平行线的性质与角平分线的定义．


8. 如图，在△ABC中，AB=2，BC=4，△ABC的高AD与CE的比是多少？[1]（提示：利用三角形的面积公式.）

（第8题）

拓广探索

9. 如图，AD是△ABC的角平分线，DE∥AC，DE交AB于点E，DF∥AB，DF交AC于点F. 图中∠1与∠2有什么关系？为什么？

（第9题）

10. 要使四边形木架（用4根木条钉成）不变形，至少要再钉上几根木条？五边形木架和六边形木架呢？[2]

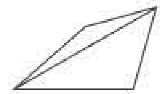
四边形木架　五边形木架　六边形木架

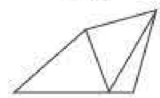
（第10题）

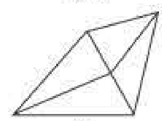
56　第十七章　三角形

［1］高 AD 与 CE 的比就是这两条线段的长度的比.

［2］由于三角形具有稳定性，要使多边形木架不变形，就应钉上几根木条，使多边形变成几个三角形. 将多边形分为几个三角形，有不同的分法. 如四边形可如下划分为几个三角形：


(1)


(2)


(3)

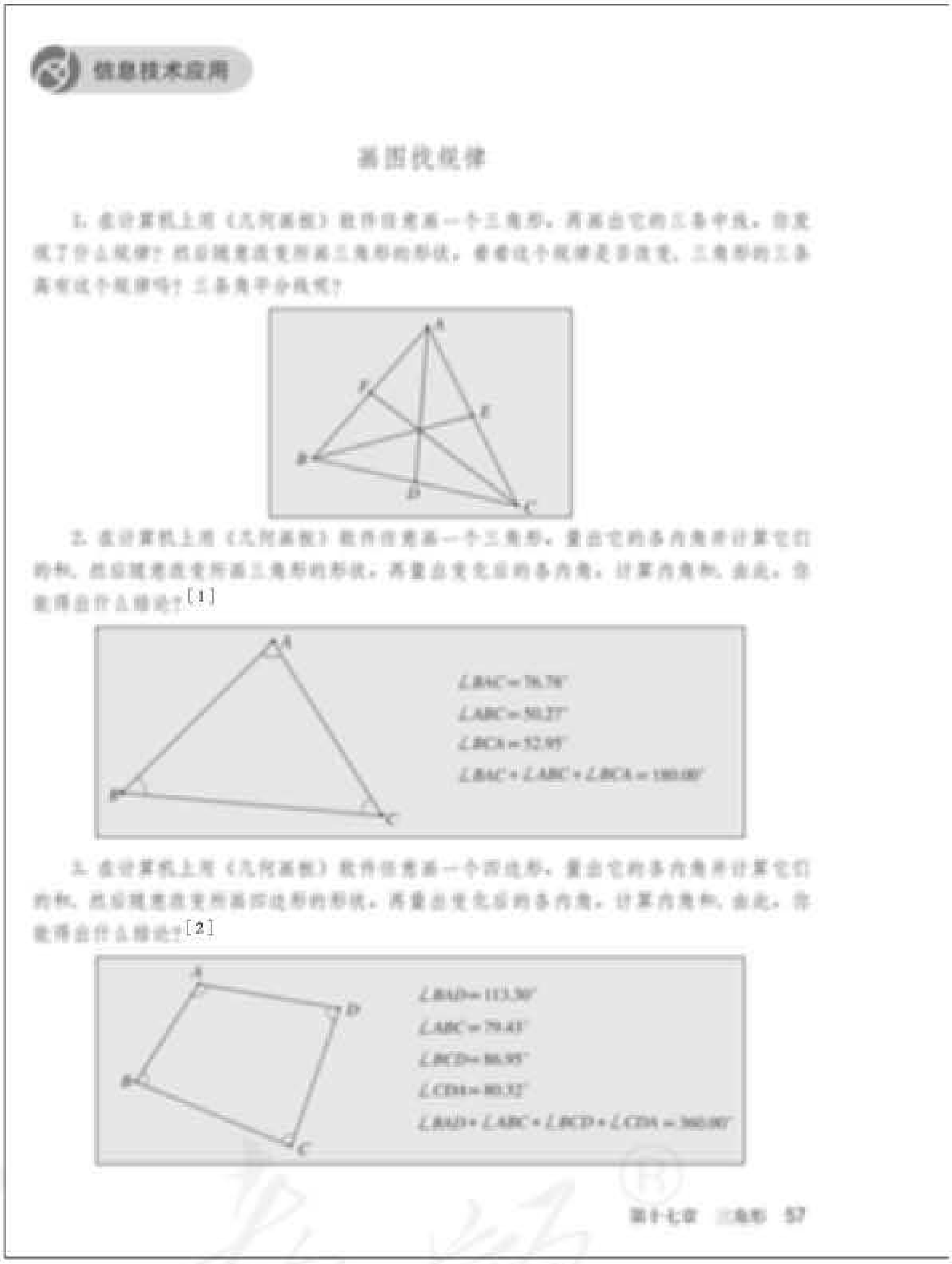
不同的分法所需的木条数不同，其中（1）的分法所用的木条最少.

本题就是使多边形木架变成几个三角形，并使所钉的木条数最少.

4. 第5，10题考查学生对三角形的稳定性的了解. 在第10题中，关键是钉上几根木条后，多边形变成几个三角形.

[1] 这个活动验证了“三角形的内角和是 180°”.

[2] 由这个活动可以得出四边形的内角和是 360°. 有兴趣的同学可进一步用软件考察五边形、六边形的内角和分别是多少.



信息技术应用

1.《几何画板》软件有画图功能，可以方便地画出一个三角形的三条中线. 可以发现：三角形的三条中线交于一点. 为了考察是否所有的三角形都具有这个规律，可以利用软件随意改变已画出的三角形的形状，这时三角形的三条中线也随之改变，但它们仍交于一点. 类似地，可以发现：三角形三条高所在的直线交于一点；三角形的三条角平分线交于一点.

2.《几何画板》软件还有度量功能，可以方便地量出一个角的大小. 用软件画出一个三角形，量出它的三个内角，并计算它们的和. 可以发现：三角形的内角和是 180°. 为了考察是否所有的三角形都具有这个性质，可以利用软件随意改变已画出的三角形的形状. 这时三角形的三个角也随之改变，但它们的和仍是 180°. 类似地，可以发现：四边形的内角和是 360°.

17.2 与三角形有关的角

17.2.1 三角形的内角

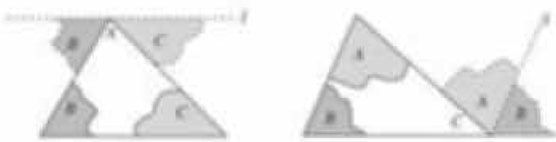
我们在小学就已经知道，任意一个三角形的内角和等于 180°．我们是通过度量或剪拼得出这一结论的．

通过度量或剪拼的方法，可以验证三角形的内角和等于 180°．但是，由于测量常常有误差，这种“验证”不是“数学证明”，不能完全让人信服．又由于形状不同的三角形有无数个，我们不可能用上述方法一一验证所有三角形的内角和等于 180°．所以，需要通过推理的方法去证明：任意一个三角形的内角和一定等于 180°．

探究

在纸上任意画一个三角形，将它的内角剪下拼合在一起，就得到一个平角．从这个操作过程中，你能发现证明的思路吗？

上面的拼合中，有不同的方法．你用了图 17.2-1 中的哪种方法？



(1)　　(2)

图 17.2-1

在图 17.2-1 (1) 中，$\angle B$ 和 $\angle C$ 分别拼在 $\angle A$ 的左右，三个角合起来形成一个平角，出现一条过点 A 的直线 l，移动后的 $\angle B$ 和 $\angle C$ 各有一条边在直线 l 上．想一想，直线 l 与 $\triangle ABC$ 的边 BC 有什么关系？[1] 由这个图你能想出证明“三角形的内角和等于 180°”的方法吗？

由上述拼合过程得到启发，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC（图 17.2-2），那么由平行线的性质与平角的定义就能证明“三角形的内角和等于 180°”这个结论．

58　第十七章　三角形

[1] 在图 17.2-1 (1) 中，由内错角相等可得，移动后的 $\angle B$ 的一条边平行于边 BC．同理，移动后的 $\angle C$ 的一条边平行于边 BC．由“经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行”，可得移动后的 $\angle B$ 的一条边与移动后的 $\angle C$ 的一条边在同一条直线上，并且这条直线平行于边 BC．上述推理有一定难度，学生只要通过观察发现直线 l，并且 $l \parallel BC$ 就可以了．可让学生用“内错角相等，两直线平行”说明 $l \parallel BC$ 的理由．

1. 本节的主要内容是探索和证明与三角形的角有关的结论（三角形的内角和等于 180°，直角三角形的两个锐角互余，三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），并运用这些结论解决问题．

2. 对于三角形的内角和等于 180°的结论，学生在前两个学段已经知道，但当时是通过实验得出的．本节要用平行线的性质与平角的定义给出这个结论的证明．

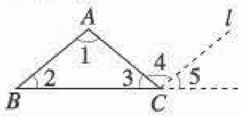
本节仍从前两个学段已做过的实验入手，一方面可以激发学生的兴趣，另一方面可以使学生从实验发现证明的思路．

教科书图 17.2-1 (1) 的拼合方法，是将三角形的两个内角移到第三个内角的两侧．过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC，即可实现上述目的．让学生体会直线 l 是因为解决问题的需要自然产生的，使三角形的三个内角与组成平角的三个角分别相等，从而得出

[1] 在图中，像直线 l 这样新添加的线用虚线表示.

[2] 教科书图 17.2-1(2) 的拼合方法，是将三角形的两个内角移到第三个内角的同一侧，三个角合成一个平角，说明 $\angle B$ 的一条边是 BC 的延长线，还出现了一条过点 C 的直线 l，移动后的 $\angle B$ 和 $\angle A$ 各有一条边在 l 上. 让学生思考 l 与 $\triangle ABC$ 的边 AB 有什么关系，进而想出证明三角形内角和是 180° 的另一种方法：

延长 BC，过点 C 作直线 l，使 $l /\!/ AB$.



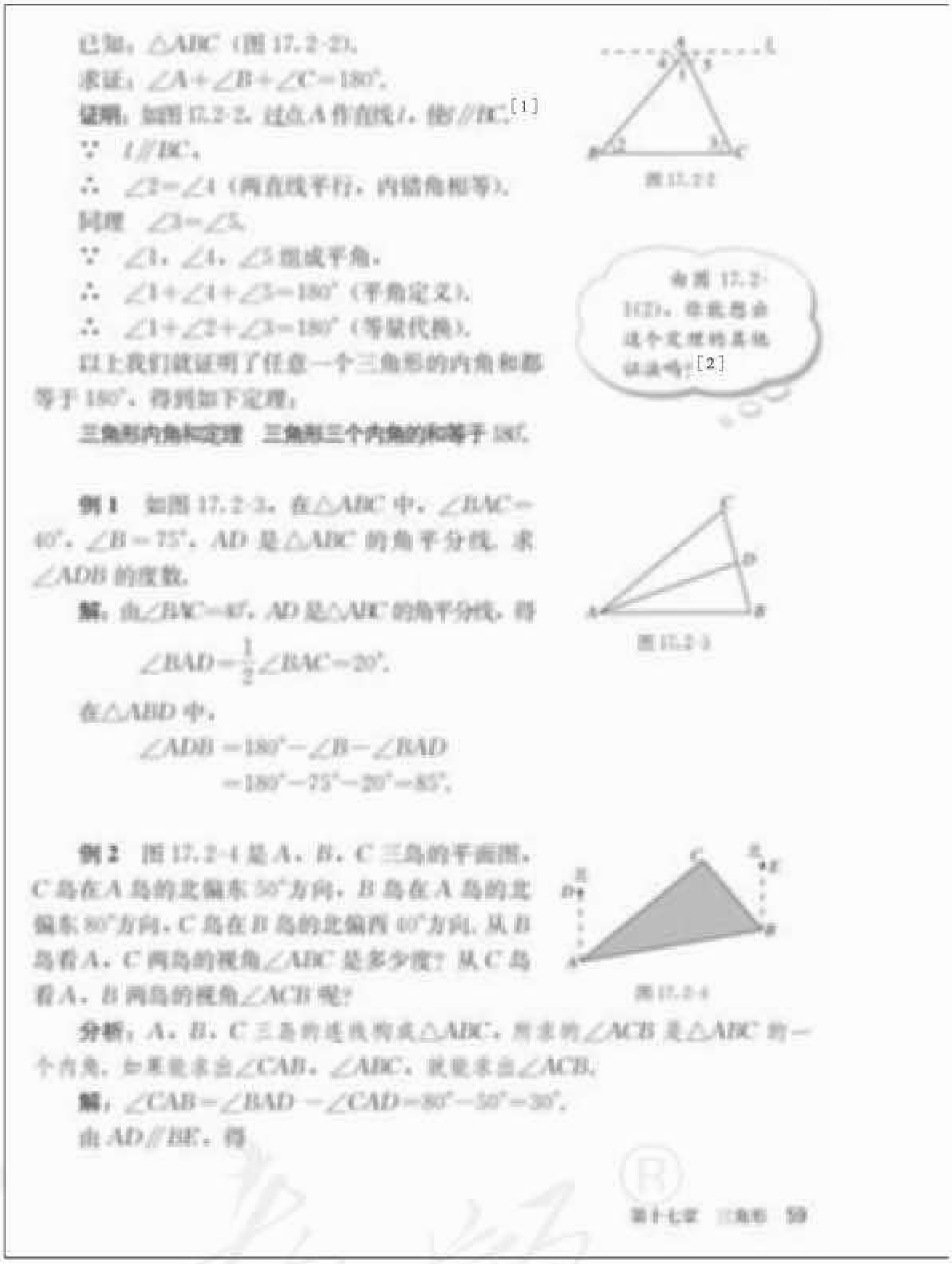
$\because$ $l /\!/ AB$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$，
$\angle 2=\angle 5$.

$\because$ $\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$ 组成平角，

$\therefore$ $\angle 3+\angle 4+\angle 5=180^\circ$.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$.



已知：$\triangle ABC$（图 17.2-2）.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

证明： 如图 17.2-2，过点 A 作直线 l，使 $l /\!/ BC$.[1]

$\because$ $l /\!/ BC$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

同理 $\angle 3=\angle 5$.

$\because$ $\angle 1$，$\angle 4$，$\angle 5$ 组成平角，

$\therefore$ $\angle 1+\angle 4+\angle 5=180^\circ$（平角定义）.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$（等量代换）.

以上我们就证明了任意一个三角形的内角和都等于 180°，得到如下定理：

图 17.2-2

由图 17.2-1(2)，你能想出这个定理的其他证法吗？[2]

三角形内角和定理 三角形三个内角的和等于 180°.

例 1 如图 17.2-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle B=75^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求 $\angle ADB$ 的度数.

解： 由 $\angle BAC=40^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=20^\circ.$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\angle ADB=180^\circ-\angle B-\angle BAD=180^\circ-75^\circ-20^\circ=85^\circ.$$

图 17.2-3

例 2 图 17.2-4 是 A，B，C 三岛的平面图，C 岛在 A 岛的北偏东 50° 方向，B 岛在 A 岛的北偏东 80° 方向，C 岛在 B 岛的北偏西 40° 方向. 从 B 岛看 A，C 两岛的视角 $\angle ABC$ 是多少度？从 C 岛看 A，B 两岛的视角 $\angle ACB$ 呢？

图 17.2-4

分析： A，B，C 三岛的连线构成 $\triangle ABC$，所求的 $\angle ACB$ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角. 如果能求出 $\angle CAB$，$\angle ABC$，就能求出 $\angle ACB$.

解： $\angle CAB=\angle BAD-\angle CAD=80^\circ-50^\circ=30^\circ$.

由 $AD /\!/ BE$，得

第十七章 三角形 59

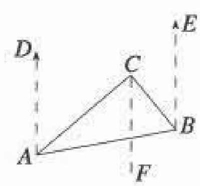
要证明的结论.

3. 对于例 1，可以如下进行分析：$\angle ADB$ 是 $\triangle ABD$ 的一个内角，在 $\triangle ABD$ 中，$\angle B=75^\circ$，如果能求出 $\angle BAD$ 的度数，就能求出 $\angle ADB$ 的度数. 这样有助于学生写出解答过程.

在例 2 中，给出了一些方位角的度数，方位角的概念在第九章中介绍过，可让学生在图中标注出这些角，这样容易求出 $\angle CAB$ 的度数. 方位角以正北、正南为基准，所以 $AD /\!/ BE$，从而同旁内角互补，这是求出 $\angle ABC$ 的度数的关键. 求出 $\angle CAB$，$\angle ABC$ 的度数，进而可求出 $\angle ACB$ 的度数.

在例 2 中，还可以如下求 $\angle ACB$：

过点 C 作 CF，使 $CF /\!/ AD$.



$\angle BAD+\angle ABE=180°$.

所以

$\angle ABE=180°-\angle BAD=180°-80°=100°$,

$\angle ABC=\angle ABE-\angle EBC=100°-40°=60°$.

在$\triangle ABC$中,

$$\angle ACB=180°-\angle ABC-\angle CAB$$
$$=180°-60°-30°=90°.$$

你还能想出其他解法吗？

答：从 B 岛看 A，C 两岛的视角$\angle ABC$是60°，从 C 岛看 A，B 两岛的视角$\angle ACB$是90°.

练习

1. 如图，从 A 处观测 C 处的仰角$\angle CAD=30°$，从 B 处观测 C 处的仰角$\angle CBD=45°$. 从 C 处观测 A，B 两处的视角$\angle ACB$是多少度？

（第1题）

（第2题）

2. 如图，一种滑翔伞的形状是左右对称的四边形 $ABCD$，其中$\angle A=150°$，$\angle B=\angle D=40°$. 求$\angle C$的度数.

如图17.2-5，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$. 由三角形内角和定理，得

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°,$$

即

$$\angle A+\angle B+90°=180°.$$

所以

$$\angle A+\angle B=90°.$$

图17.2-5

也就是说，**直角三角形的两个锐角互余.**

直角三角形可以用符号“Rt△”表示，直角三角形 ABC 可以写成 Rt$\triangle ABC$.

60 第十七章 三角形

练习答案

1. $\angle ACB=15°$.

提示：由$\angle ABC=180°-\angle CBD$求出$\angle ABC=135°$. 再由$\angle ACB=180°-\angle A-\angle ABC$求出$\angle ACB$的度数.

2. $\angle C=130°$.

提示：由四边形 $ABCD$ 左右对称得$\angle BAC=\angle DAC=75°$. 再由$\angle ACB=180°-\angle BAC-\angle B$求出$\angle ACB$的度数.

由 $CF/\!/AD$，得

$\angle ACF=\angle DAC=50°$.

由 $CF/\!/BE$，得

$\angle BCF=\angle CBE=40°$.

所以$\angle ACB=\angle ACF+\angle BCF=50°+40°=90°$.

4. 由三角形内角和定理容易得到：直角三角形的两个锐角互余. 这是直角三角形的一个重要性质，运用它可以解决直角三角形中角的计算问题.

例3是这个性质与余角的性质“同角（或等角）的余角相等”的综合运用.

反过来，如果一个三角形有两个角互余，就可以判定这个三角形是直角三角形.

5. 对于三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和，可分以下几步进行探索与证明.

（1）先来解决一个像教科书图17.2-8所示的具体计算问题. 解决的过程如下：

由$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$，得

例3　如图17.2-6，$\angle C=\angle D=90^\circ$，AD，BC相交于点E．$\angle CAE$与$\angle DBE$有什么关系？为什么？

图17.2-6

解：在$Rt\triangle ACE$中，

$$\angle CAE=90^\circ-\angle AEC.$$

在$Rt\triangle BDE$中，

$$\angle DBE=90^\circ-\angle BED.$$

$\because$　$\angle AEC=\angle BED$，

$\therefore$　$\angle CAE=\angle DBE$.

思考

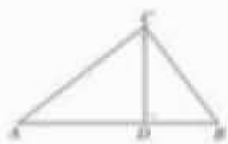
我们知道，如果一个三角形是直角三角形，那么这个三角形有两个角互余．反过来，有两个角互余的三角形是直角三角形吗？请你说说理由．

由三角形内角和定理可得：

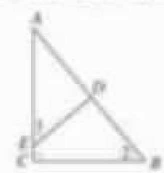
有两个角互余的三角形是直角三角形.

练习

1．如图，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为D．$\angle ACD$与$\angle B$有什么关系？为什么？



（第1题）



（第2题）

2．如图，$\angle C=90^\circ$，$\angle 1=\angle 2$，$\triangle ADE$是直角三角形吗？为什么？

17.2.2　三角形的外角

如图17.2-7，把$\triangle ABC$的一边BC延长，得到$\angle ACD$．像这样，三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做**三角形的外角**．[1]

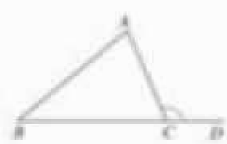


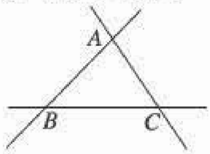
图17.2-7

第十七章　三角形　61

练习答案

1. $\angle ACD$与$\angle B$相等．因为$\angle ACD$与$\angle A$互余，$\angle B$与$\angle A$互余，所以$\angle ACD=\angle B$.
2. $\triangle ADE$是直角三角形．因为$\angle A$与$\angle 2$互余，$\angle 1=\angle 2$，所以$\angle A$与$\angle 1$互余．所以$\triangle ADE$是直角三角形．

［1］三角形的一个外角，就是三角形一个内角的邻补角．向两个方向延长三角形的各边，可以画出一个三角形所有的外角：



一个三角形有6个外角，其中有三个与另外三个分别相等．

$$\angle ACB=180^\circ-\angle A-\angle B$$
$$=180^\circ-70^\circ-60^\circ=50^\circ.$$

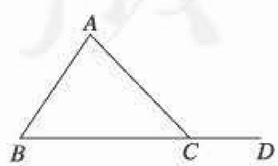
由$\angle ACB+\angle ACD=180^\circ$，得

$$\angle ACD=180^\circ-\angle ACB$$
$$=180^\circ-50^\circ=130^\circ.$$

（2）由（1）的计算结果发现

$$\angle ACD=\angle A+\angle B.$$

（3）结合右图，证明任意一个三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和：



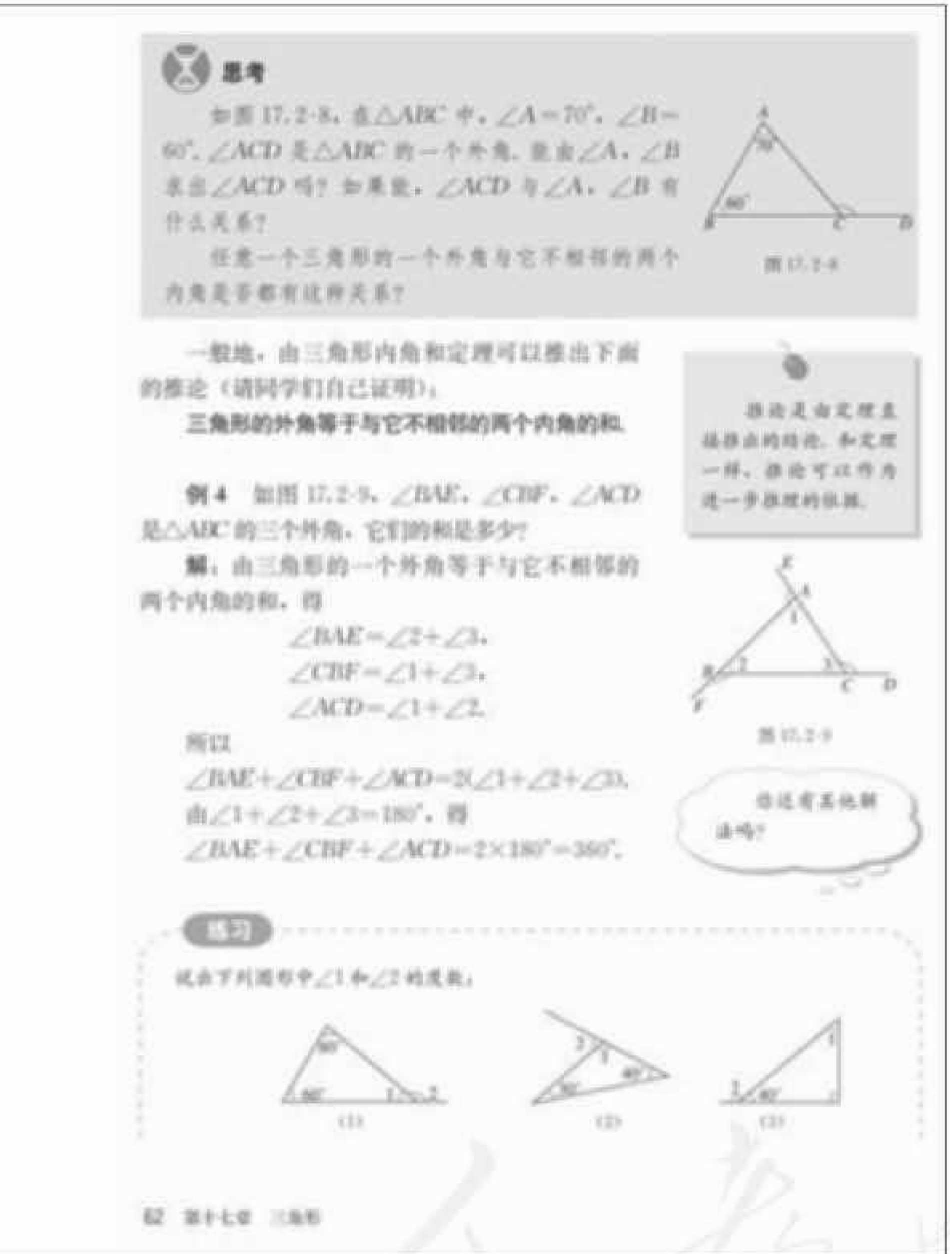
$\because$　$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，

$\therefore$　$\angle ACB=180^\circ-\angle A-\angle B$.

$\because$　$\angle ACB+\angle ACD=180^\circ$，

$\therefore$　$\angle ACD=180^\circ-\angle ACB$.

$\therefore$　$\angle ACD=180^\circ-\angle ACB$



思考

如图 17.2-8，在$\triangle ABC$中，$\angle A=70^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle ACD$是$\triangle ABC$的一个外角。能由$\angle A$，$\angle B$求出$\angle ACD$吗？如果能，$\angle ACD$与$\angle A$，$\angle B$有什么关系？

任意一个三角形的一个外角与它不相邻的两个内角是否都有这种关系？

图 17.2-8

一般地，由三角形内角和定理可以推出下面的推论（请同学们自己证明）：

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

推论是由定理直接推出的结论。和定理一样，推论可以作为进一步推理的依据。

例 4 如图 17.2-9，$\angle BAE$，$\angle CBF$，$\angle ACD$是$\triangle ABC$的三个外角，它们的和是多少？

解：由三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和，得

$$\angle BAE=\angle 2+\angle 3,$$
$$\angle CBF=\angle 1+\angle 3,$$
$$\angle ACD=\angle 1+\angle 2.$$

所以

$\angle BAE+\angle CBF+\angle ACD=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$.

由$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$，得

$\angle BAE+\angle CBF+\angle ACD=2\times 180^\circ=360^\circ$.

图 17.2-9

你还有其他解法吗？

练习

试求下列图形中$\angle 1$和$\angle 2$的度数：

(1) (2) (3)

82 第十七章 三角形

练习答案

(1) $\angle 1=40^\circ$，
$\angle 2=140^\circ$；
(2) $\angle 1=110^\circ$，
$\angle 2=70^\circ$；
(3) $\angle 1=50^\circ$，
$\angle 2=140^\circ$；
(4) $\angle 1=55^\circ$，
$\angle 2=70^\circ$；
(5) $\angle 1=80^\circ$，
$\angle 2=40^\circ$；
(6) $\angle 1=60^\circ$，
$\angle 2=30^\circ$.

$$=180^\circ-(180^\circ-\angle A-\angle B)$$
$$=\angle A+\angle B.$$

6. 例 4 是为了巩固“三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和”而设. 另外，也可以用如下方法求解：

由$\angle BAE+\angle 1=\angle CBF+\angle 2=\angle ACD+\angle 3=180^\circ$，得

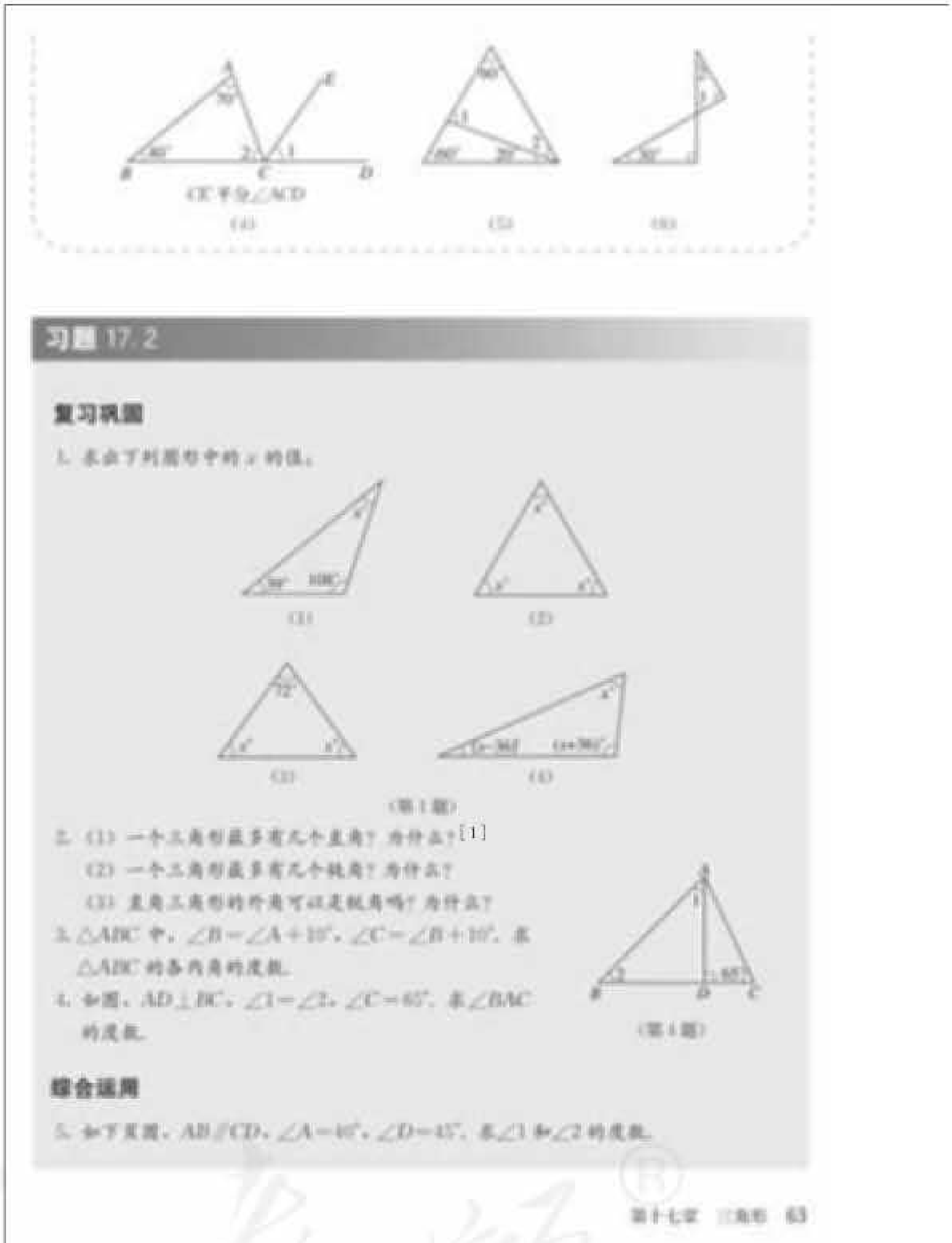
$\angle BAE+\angle CBF+\angle ACD=3\times 180^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=540^\circ-180^\circ=360^\circ$.

这一方法可以为下节证明多边形外角和公式作准备.

[1] 根据“三角形的内角和等于 180°”来说明．可提示学生：

（1）如果有两个内角是直角会出现什么结果？（三角形的内角和大于 180°.）

（2）这个结果对不对？为什么不对？（不对，与三角形的内角和等于 180°矛盾，所以这个结果是错的.）



CE 平分∠ACD

(4) (5) (6)

习题 17.2

复习巩固

1. 求出下列图形中的 x 的值。

(1) (2) (3) (4)

（第 1 题）

2. (1) 一个三角形最多有几个直角？为什么？[1]

   (2) 一个三角形最多有几个钝角？为什么？

   (3) 直角三角形的外角可以是锐角吗？为什么？

3. $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle A+10°$，$\angle C=\angle B+10°$．求 $\triangle ABC$ 的各内角的度数．

4. 如图，$AD\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=65°$．求 $\angle BAC$ 的度数．

（第 4 题）

综合运用

5. 如下页图，$AB /\!/ CD$，$\angle A=40°$，$\angle D=45°$．求 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的度数．

第十七章　三角形　63

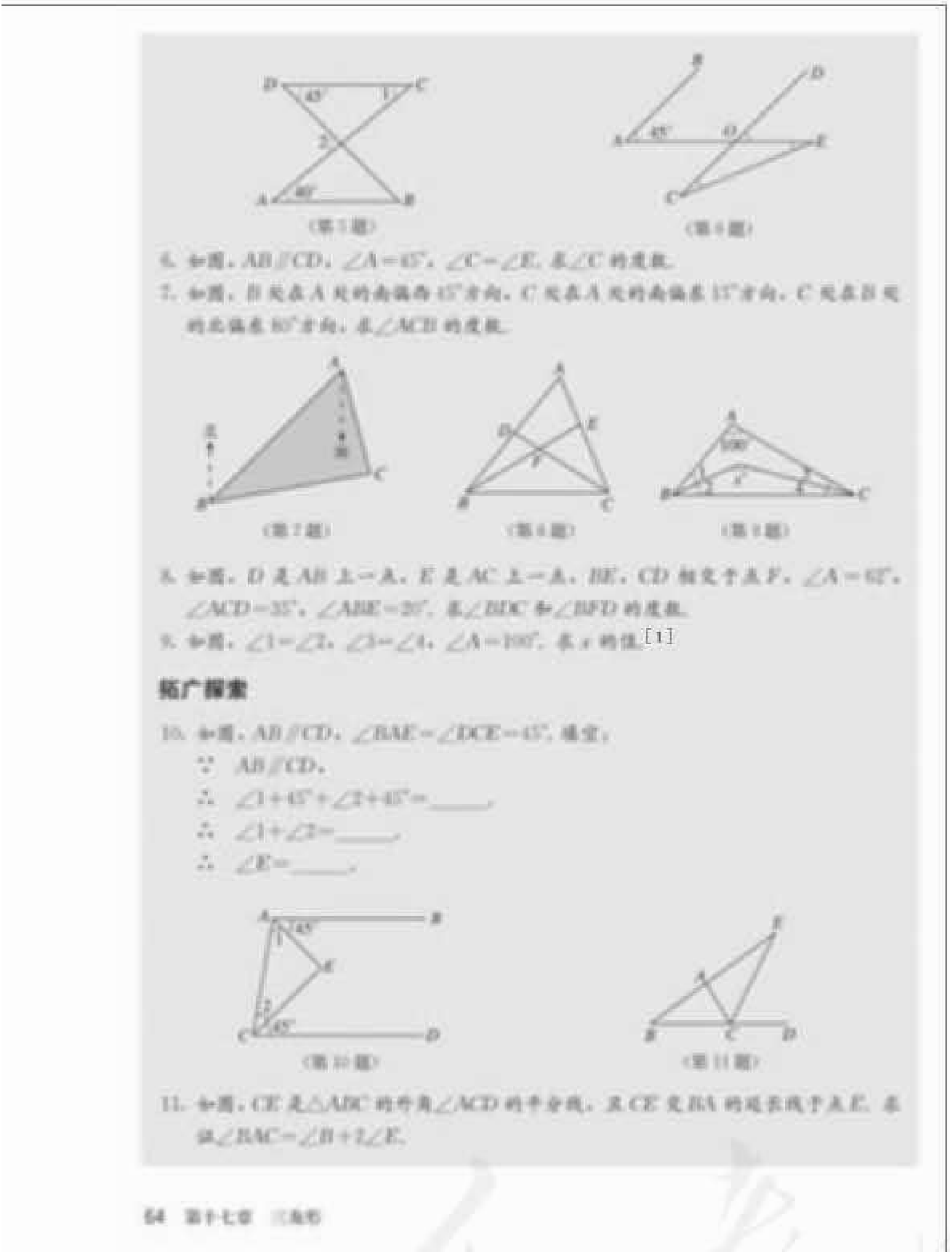
习题 17.2

1．第 1 题可根据有关结论列出关于 x 的方程，解相应的方程，就可以求出 x 的值．

在第 2 题中，在回答为什么不能有两个角是直角或钝角时，要说明如果有两个角是直角或钝角，那么三个内角的和大于 180°，这与三角形的内角和等于 180°矛盾．这里实际上是用了反证法．教科书以后会介绍反证法，现在不必讲什么是反证法，只要学生会这样说明就可以了．

在第 3 题中，可设 $\angle A=x°$，那么 $\angle B$ 可以用 x 表示出来，进而 $\angle C$ 也可以用 x 表示出来．这样，由三角形的内角和等于 180°，就可以得到关于 x 的方程，解相应的方程，就可以求出 x 的值．知道 x 的值，三个内角的度数就可以求出来了．

在第 4 题中，可以先求出 $\angle 2$，再由 $\angle BAC=180°-\angle 2-\angle C$ 求出 $\angle BAC$．也可以先求出 $\angle 1$，$\angle DAC$，再由 $\angle BAC=\angle 1+\angle DAC$ 求出



(第5题)　　(第6题)

6. 如图，$AB\parallel CD$，$\angle A=45^\circ$，$\angle C=\angle E$，求$\angle C$的度数.

7. 如图，B处在A处的南偏西45°方向，C处在A处的南偏东15°方向，C处在B处的北偏东80°方向，求$\angle ACB$的度数.

(第7题)　　(第8题)　　(第9题)

8. 如图，D是AB上一点，E是AC上一点，BE，CD相交于点F，$\angle A=62^\circ$，$\angle ACD=35^\circ$，$\angle ABE=20^\circ$，求$\angle BDC$和$\angle BFD$的度数.

9. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle A=100^\circ$，求x的值.[1]

拓广探索

10. 如图，$AB\parallel CD$，$\angle BAE=\angle DCE=45^\circ$，填空.

∵ $AB\parallel CD$，

∴ $\angle 1+45^\circ+\angle 2+45^\circ=$_____，

∴ $\angle 1+\angle 2=$_____，

∴ $\angle E=$_____.

(第10题)　　(第11题)

11. 如图，CE是$\triangle ABC$的外角$\angle ACD$的平分线，且CE交BA的延长线于点E. 求证$\angle BAC=\angle B+2\angle E$.

64 第十七章 三角形

［1］可提些问题让学生思考：

(1) 在本题中能分别求出$\angle 2$，$\angle 4$吗？

(2) 由

$x^\circ=180^\circ-(\angle 2+\angle 4)$

能想出求x的办法吗？

$\angle BAC$.

2. 在第5题中，先用平行线的性质求出$\angle 1$，再求$\angle 2$.

在第6题中，也是先用平行线的性质，再用外角的性质.

第7题有多种解法，可让学生尝试.

第8题的难点在于图形较复杂，需要从复杂的图形中找出相关的图形.

在第9题中，只要求出$\angle 2+\angle 4$即可求出x.

3. 第10题让学生通过填空熟悉推理过程. 第11题是一个证明题，一方面巩固相关结论，另一方面进一步熟悉证明.


阅读与思考

为什么要证明

小明：我们观察任意一个三角形，量出它的每个内角，都能得出它的内角和等于180°，为什么还要证明这个结论呢？

李老师：通过观察、试验等可以寻找规律，但是由于观察可能有误差，试验可能受干扰，考察对象可能不具有一般性等原因，一般来说由观察、试验等所产生的“结论”未必正确。例如，让一个班的学生每人任意画一个三角形，再量出它的每个内角，计算三个内角的和，得到的结果未必会是180°，可能有的会比180°大些，有的会比180°小些。

小明：如果观察细致，仪器精确，不产生误差，还需要证明吗？

李老师：仅通过观察、试验等就下结论有时也缺乏说服力。例如，即使不考虑误差等因素，当上面观察的所有结果全是180°时，人们还会有疑问：“不同形状的三角形有无数个，我们画出并验证的只是其中有限个，其余的三角形的内角和是多少呢？能对所有的三角形都进行验证吗？”事实上，不管我们经历多长时间，画出多少个三角形，观察、试验的对象也是有限个。因此，要确认“三角形的内角和等于180°”，就不能依靠度量的手段和观察、试验、验证的方法，而必须进行推理论证——对于一般的三角形，推出它的三个内角的和等于一个平角，从而得出“无论三角形的具体形状如何，它的内角和一定等于180°”。

小明：现在我明白了，一个数学命题是否正确，需要经过理由充足、使人信服的推理论证才能得出结论。观察、试验等是发现数学公式、定理的重要途径，而证明则是确认数学公式、定理的必要步骤。

第十七章 三角形 65

阅读与思考

1. 为了更深入地介绍证明的必要性，教科书安排了这篇阅读材料，它以师生对话的形式结合具体例子介绍了逻辑推理的必要性.

2. 通过观察和实验，可以获得许多知识. 几何中研究的图形的形状、大小、位置关系等，许多都是通过观察得来的.

不过，从观察得到的知识往往是初步的，会不全面、不深入. 如本文中的例子，观察一些三角形三个内角的和，得到这些三角形的三个内角的和等于180°的结论. 那么是不是所有的三角形都这样呢？为什么三角形的三个内角的和必然等于180°呢？就无法借助有限的观察得到结论了，而必须在观察的基础上，一步一步地，有根有据地说明理由，也就是要进行证明. 可通过这个例子的分析，使学生体会证明的必要性.

17.3 多边形及其内角和

17.3.1 多边形

观察图 17.3-1 中的图片，其中的房屋结构、蜂巢结构等给我们以由一些线段围成的图形的形象．你能从图 17.3-1 中想象出几个由一些线段围成的图形吗？

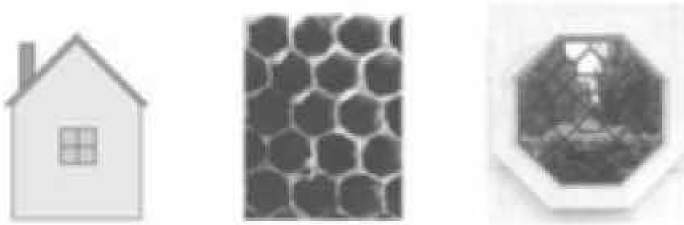


图 17.3-1

我们学过三角形．类似地，在平面内，[1]由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫做**多边形**（polygon）．

多边形按组成它的线段的条数分成三角形、四边形、五边形……三角形是最简单的多边形．如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形就叫做 n 边形．如图 17.3-2，螺母底面的边缘可以设计为六边形，也可以设计为八边形．

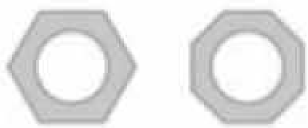


图 17.3-2

多边形相邻两边组成的角叫做它的内角．图 17.3-3 中的 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$ 是五边形 $ABCDE$ 的[2]5 个内角．多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角．图 17.3-4 中的 $\angle 1$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角．

图 17.3-3

图 17.3-4

66　第十七章　三角形

[1] 为了排除几个点不共面的情况，即空间多边形，这里实际上强调在同一平面内．

[2] 多边形用表示它的各个顶点的字母表示．表示多边形要按顶点的顺序书写，可以按顺时针或逆时针的顺序．

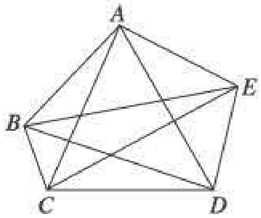
1. 本节的主要内容是多边形的有关概念，多边形的内角和与外角和公式．

2. 本节的教学，要以三角形为基础，可以仿照三角形给出多边形的有关概念，如多边形的边、内角、外角、内角和等都可同三角形类比，让学生明确这些概念．

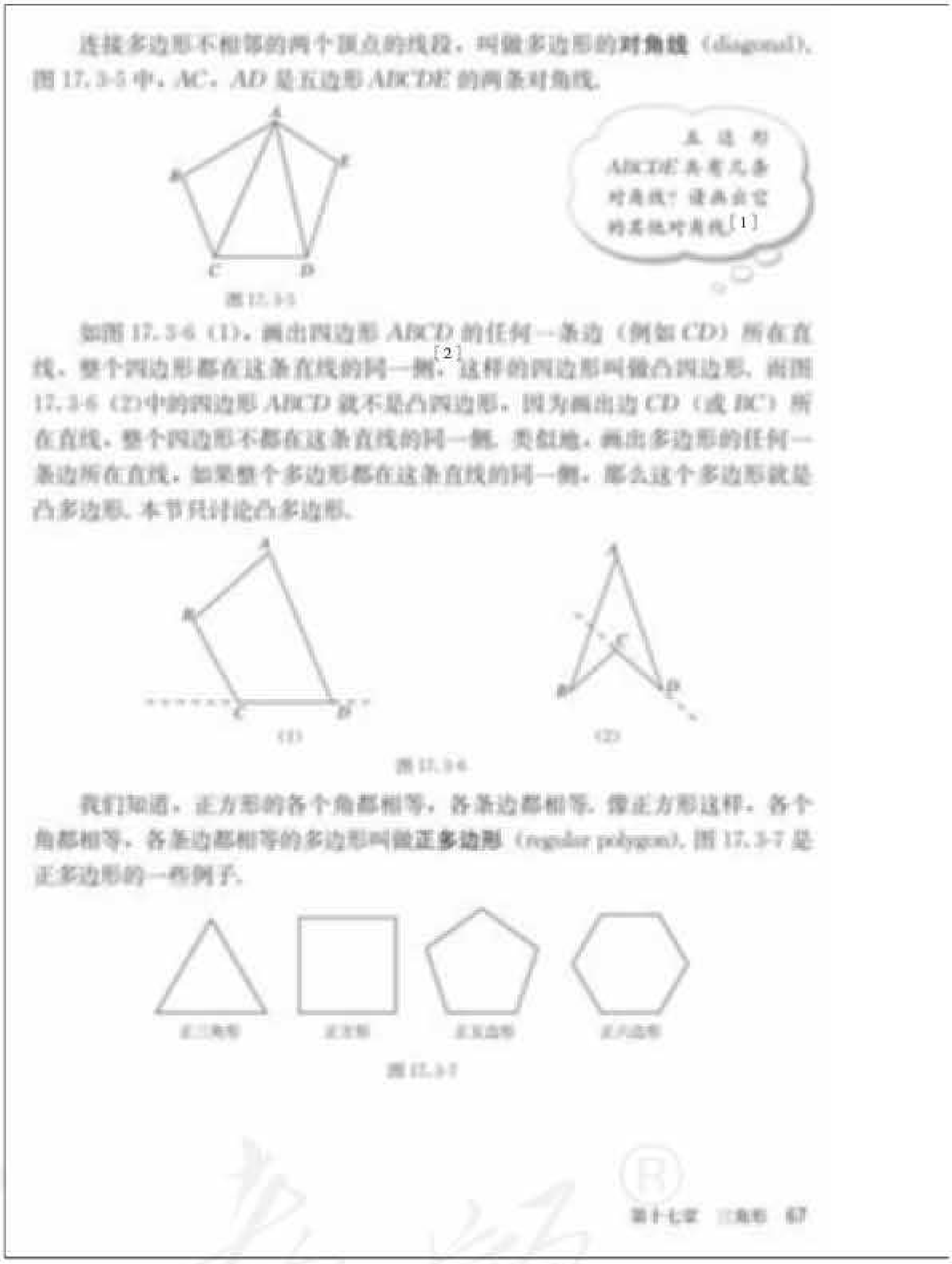
应该引起注意的是，三角形的三个顶点确定一个平面，所以三个顶点总是共面的，也就是说，三角形肯定是平面图形．但边数大于 3 的多边形就不是这样，它的几个顶点有不共面的情况．我们现在研究的限于平面图形，所以本章在多边形的定义中加上“在平面内”这个条件．

3. 多边形分凹、凸两类．因为我们现在只研究凸多边形，所以教科书只定义了凸多边形，要求学生能根据定义辨认一个多边形是不是凸多边形就可以了．教科书没给出凹多边形的概念，教学中也不必对学生讲．

［1］五边形 $ABCDE$ 有 5 条对角线，如下图所示：



［2］延长任意一边，都有相同的结论. 教学时可让学生延长其他的边来验证.



连接多边形不相邻的两个顶点的线段，叫做多边形的**对角线**（diagonal）。图 17.3-5 中，AC，AD 是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线.

五边形 $ABCDE$ 共有几条对角线？请画出它的其他对角线[1]

图 17.3-5

如图 17.3-6（1），画出四边形 $ABCD$ 的任何一条边（例如 CD）所在直线，整个四边形都在这条直线的同一侧[2]，这样的四边形叫做凸四边形，而图 17.3-6（2）中的四边形 $ABCD$ 就不是凸四边形，因为画出边 CD（或 BC）所在直线，整个四边形不都在这条直线的同一侧. 类似地，画出多边形的任何一条边所在直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，那么这个多边形就是凸多边形. 本节只讨论凸多边形.

（1） （2）

图 17.3-6

我们知道，正方形的各个角都相等，各条边都相等. 像正方形这样，各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做**正多边形**（regular polygon）. 图 17.3-7 是正多边形的一些例子.

正三角形 正方形 正五边形 正六边形

图 17.3-7

第十七章 三角形 67

4. 对角线是一个新概念，它的重要意义在于它的应用，即通过它可以把多边形分为几个三角形，从而把多边形的问题转化为三角形的问题来解决. 在教科书图 17.3-5 中，对角线 AC，AD 将五边形分为三个三角形，可结合此图让学生认识对角线的作用. 探索多边形的内角和可以进一步加深对对角线作用的体会.

5. 正多边形在工程技术和图案设计等方面有许多实际应用，本章的数学活动就要用到. 正多边形的定义中提到的“各边相等”与“各角相等”是正多边形的两个特征. 对于三角形，可以由“各边相等”推出“各角相等”，也可以由“各角相等”推出“各边相等”. 而对于边数大于 3 的多边形，这两个条件是各自独立的，例如，一般的长方形四个角相等，但它的各边不相等；一般的菱形四条边相等，但它的各角不相等.

可让学生举一些正多边形的实例，加深对正多边形概念的理解.

练习

1. 画出下列多边形的全部对角线。

（第1题）

2. 四边形的一条对角线将四边形分成几个三角形？从五边形的一个顶点出发，可以画出几条对角线？它们将五边形分成几个三角形？

17.3.2 多边形的内角和

思考

我们知道，三角形的内角和等于180°，正方形、长方形的内角和都等于360°。那么，任意一个四边形的内角和是否也等于360°呢？[1] 你能利用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于360°吗？

要用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于360°，只要将四边形分成几个三角形即可。

如图17.3-8，在四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，则四边形 $ABCD$ 被分为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 两个三角形。

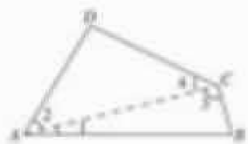


图17.3-8

由此可得

$\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D$

$=\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle 3+\angle 4+\angle D$

$=(\angle 1+\angle B+\angle 3)+(\angle 2+\angle 4+\angle D)$。

$\because$ $\angle 1+\angle B+\angle 3=180^\circ$，

$\angle 2+\angle 4+\angle D=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D=180^\circ+180^\circ=360^\circ$。

即四边形的内角和等于360°。

类比上面的过程，你能推导出五边形和六边形的内角和各是多少吗？

68 第十七章 三角形

练习答案

1. （略）.
2. 四边形的一条对角线将四边形分成两个三角形. 从五边形的一个顶点出发，可以画出两条对角线，它们将五边形分成三个三角形.

[1] 让学生从特殊四边形的内角和联想一般四边形的内角和.

6. 让学生由三角形的内角和等于180°，是一个定值，猜想四边形的内角和也是一个定值. 由正方形、长方形的内角和等于360°可知，如果四边形的内角和是一个定值，这个定值是360°. 要得到四边形的内角和等于360°这个结论，让学生联想对角线的作用. 四边形的一条对角线，把它分成两个三角形，运用三角形的内角和等于180°，就得到四边形的内角和等于360°.

通过五边形、六边形内角和的探索，让学生进一步体会把多边形的问题转化为三角形的问题的方法，进而得出多边形的内角和公式.

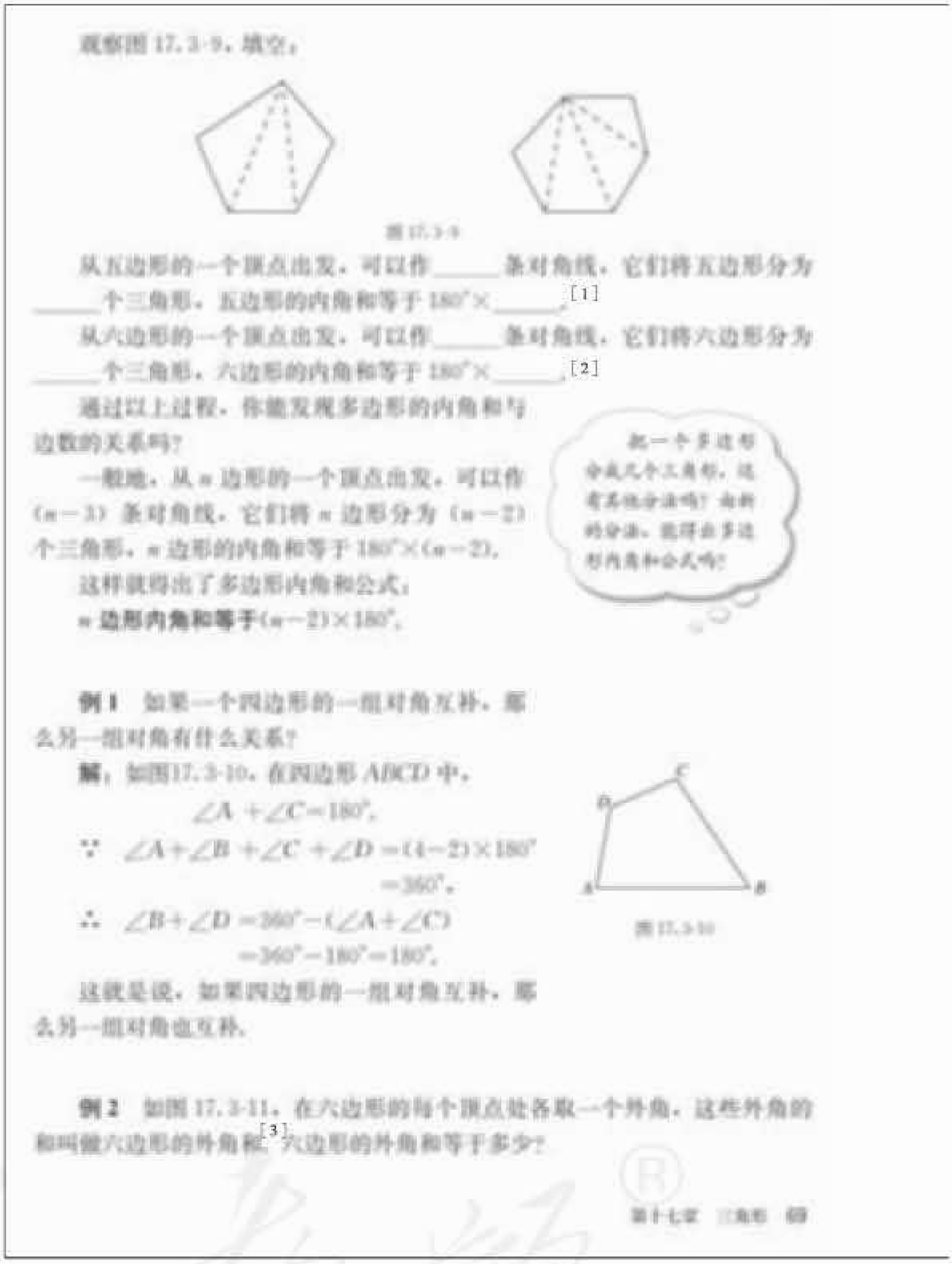
我们再来介绍两种把一个多边形分成几个三角形的分法，并由这两种分法得出多边形的内角和公式.

（1）如图，在 n 边形内任取一点 O，连接点 O 与各个顶点的线段，把 n 边形分成 n 个三角形. 因为这 n 个三角形的内角和是 $n\times 180^\circ$，以 O 为公共顶点的 n 个角的和是 360°，所以 n 边

[1] 依次填：2，3，3.

[2] 依次填：3，4，4.

[3] 六边形的每个顶点处有两个外角，它们相等，所以每个顶点处只取一个外角，把它们的和叫做六边形的外角和.



观察图 17.3-9，填空。

图 17.3-9

从五边形的一个顶点出发，可以作______条对角线，它们将五边形分为______个三角形，五边形的内角和等于 $180°\times$______.[1]

从六边形的一个顶点出发，可以作______条对角线，它们将六边形分为______个三角形，六边形的内角和等于 $180°\times$______.[2]

通过以上过程，你能发现多边形的内角和与边数的关系吗？

一般地，从 n 边形的一个顶点出发，可以作 $(n-3)$ 条对角线，它们将 n 边形分为 $(n-2)$ 个三角形，n 边形的内角和等于 $180°\times(n-2)$.

这样就得出了多边形内角和公式：

n 边形内角和等于 $(n-2)\times180°$.

把一个多边形分成几个三角形，还有其他分法吗？由新的分法，能得出多边形内角和公式吗？

例1 如果一个四边形的一组对角互补，那么另一组对角有什么关系？

解：如图17.3-10，在四边形 $ABCD$ 中，

$\angle A+\angle C=180°$.

$\because$ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=(4-2)\times180°=360°$,

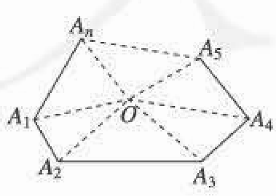
$\therefore$ $\angle B+\angle D=360°-(\angle A+\angle C)=360°-180°=180°$.

图 17.3-10

这就是说，如果四边形的一组对角互补，那么另一组对角也互补。

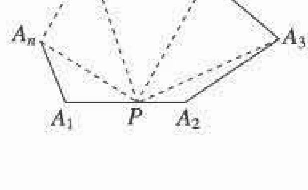
例2 如图 17.3-11，在六边形的每个顶点处各取一个外角，这些外角的和叫做六边形的外角和.[3] 六边形的外角和等于多少？

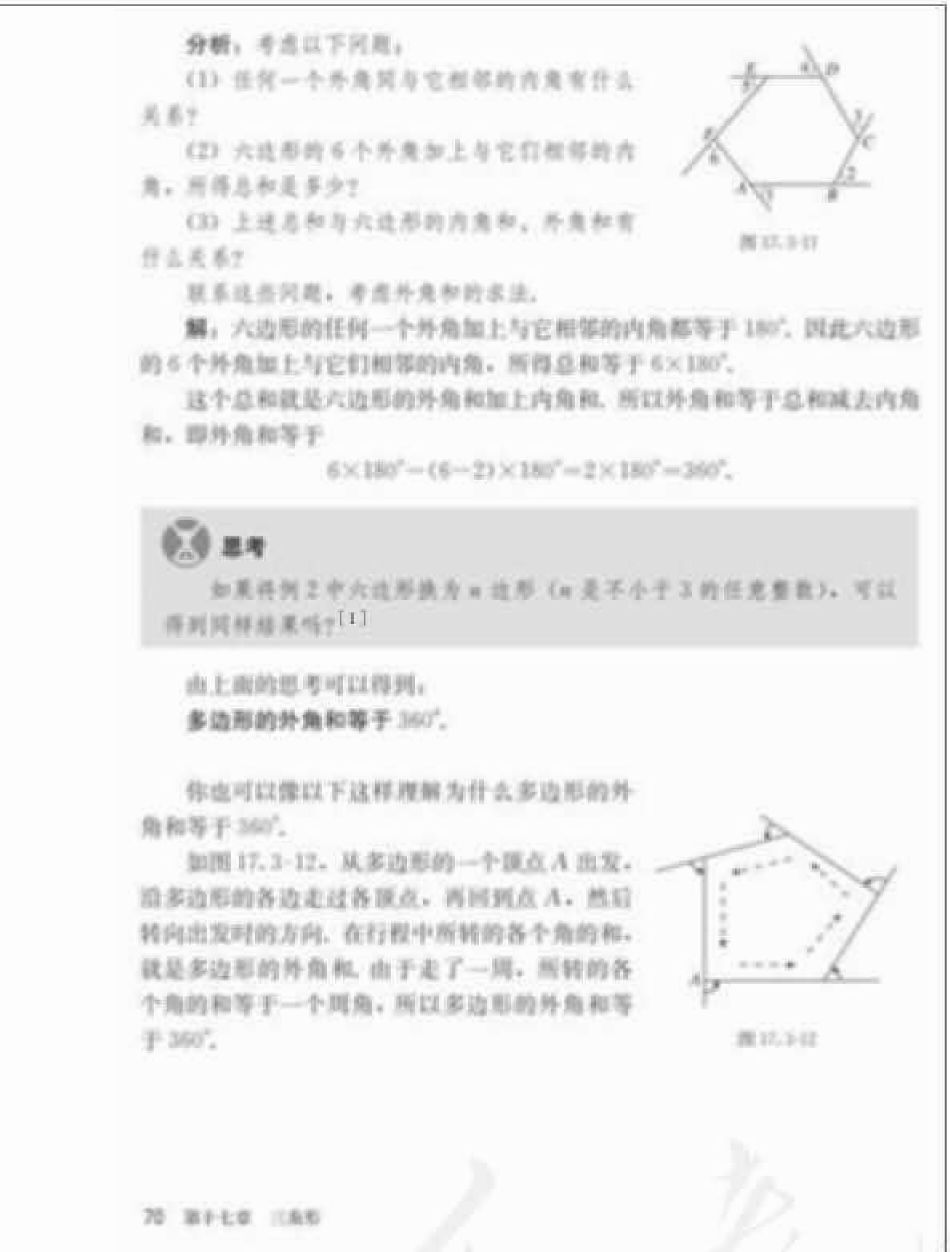
第十七章 三角形



形的内角和是 $n\times180°-360°$，即 $(n-2)\times180°$.

(2) 如图，在 n 边形的边上任意取一点 P，连接这点与各顶点的线段，把 n 边形分成 $(n-1)$ 个三角形. 因为这 $(n-1)$ 个三角形的内角和是 $(n-1)\times180°$，以 P 为公共顶点的 $(n-1)$ 个角的和是 $180°$，所以 n 边形的内角和是 $(n-1)\times180°-180°$，即 $(n-2)\times180°$.




分析：考虑以下问题：

(1) 任何一个外角同与它相邻的内角有什么关系？

(2) 六边形的 6 个外角加上与它们相邻的内角，所得总和是多少？

(3) 上述总和与六边形的内角和、外角和有什么关系？

联系这些问题，考虑外角和的求法.

图 17.3-11

解：六边形的任何一个外角加上与它相邻的内角都等于 180°. 因此六边形的 6 个外角加上与它们相邻的内角，所得总和等于 $6\times180^\circ$.

这个总和就是六边形的外角和加上内角和. 所以外角和等于总和减去内角和，即外角和等于

$$6\times180^\circ-(6-2)\times180^\circ=2\times180^\circ=360^\circ.$$

思考

如果将例 2 中六边形换为 n 边形（n 是不小于 3 的任意整数），可以得到同样结果吗？[1]

由上面的思考可以得到：

多边形的外角和等于 360°.

你也可以像以下这样理解为什么多边形的外角和等于 360°.

如图 17.3-12，从多边形的一个顶点 A 出发，沿多边形的各边走过各顶点，再回到点 A，然后转向出发时的方向. 在行程中所转的各个角的和，就是多边形的外角和. 由于走了一周，所转的各个角的和等于一个周角，所以多边形的外角和等于 360°.

图 17.3-12

70 第十七章 三角形

[1] 与六边形外角和的求法类似，n 边形的外角和是 $n\times180^\circ-(n-2)\times180^\circ=2\times180^\circ=360^\circ$.

7. 例 1 在探索另一组对角的关系时，要用到四边形的内角和等于 360°. 例 2 是求六边形的外角和. 多边形一个外角可以用相邻的内角表示（它们是互补关系），这样外角的问题就转化为内角的问题.

运用例 2 中的思路，n 边形的外角和是 n 个平角减去多边形的内角和，即

$$n\times180^\circ-(n-2)\times180^\circ=360^\circ.$$

多边形的外角和恒等于 360°，与边数的多少没有关系，这一点与内角和不同，要让学生注意.

8. 本节内容的展开运用了类比、推广的方法，以及把复杂问题转化为简单问题、化未知为已知的思想方法等，教学中应结合具体内容让学生加以体会.

练习答案

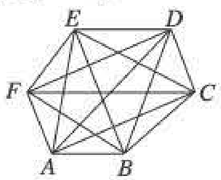
1. （1）65；

   （2）60；

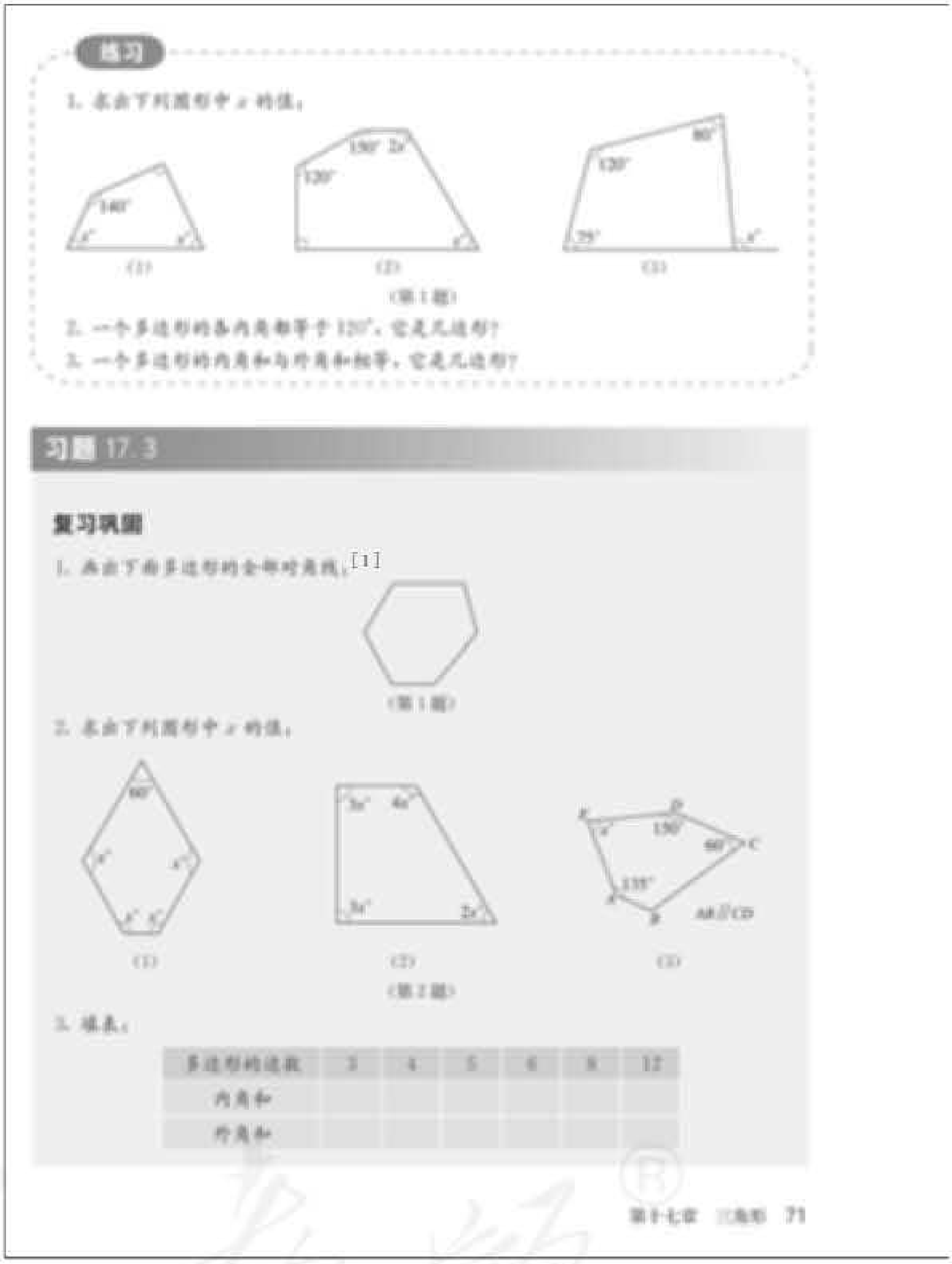
   （3）95.

2. 六边形.
3. 四边形.

［1］如图，



从顶点 A 出发有 3 条对角线，从顶点 B 出发有 3 条对角线，从顶点 C 出发有 2 条对角线（不与已画出的对角线重复），从顶点 D 出发有 1 条对角线（不与已画出的对角线重复），从顶点 E，F 出发的对角线都与已画出的对角线重复. 这样就画出了六边形的全部 9 条对角线.



练习

1. 求出下列图形中 x 的值.

140°　$x°$　$x°$　（1）

120°　150°　$2x$　（2）

120°　80°　75°　$x°$　（3）

（第 1 题）

2. 一个多边形的各内角都等于 120°，它是几边形？
3. 一个多边形的内角和与外角和相等，它是几边形？

习题 17.3

复习巩固

1. 画出下面多边形的全部对角线.[1]

（第 1 题）

2. 求出下列图形中 x 的值.

60°　$x°$　$x°$　$x°$　$x°$　（1）

$3x°$　$4x°$　$3x°$　$2x°$　（2）

E　D　C　A　B　$x°$　150°　60°　135°　$AB \parallel CD$　（3）

（第 2 题）

3. 填表.

多边形的边数	3	4	5	6	8	12
内角和						
外角和						

习题 17.3

1. 第 1 题复习巩固对角线的概念，同时培养学生有条理地思考，避免画对角线时出现遗漏.

第 2 题可先求出多边形的内角和，再列出关于 x 的方程，解相应的方程，就可以求出 x 的值.

第 3 题直接运用多边形的内角和与外角和公式.

在第 4 题中，由正多边形的每个内角相等及多边形内角和公式，可求出正多边形的每个内角的度数.

在第 5 题中，已知多边形的内角和求边数，实际是解一个一元一次方程.

由于多边形的外角和等于 360°，第 6 题实际上也是已知多边形的内角和求边数的问题.

2. 第 7 题是运用四边形的内角和等于 360°，由对角相等得出邻角互补，从而得出对边平行的关系.

4. 计算正五边形和正十边形的每个内角的度数.

5. 一个多边形的内角和等于 1 260°，它是几边形？

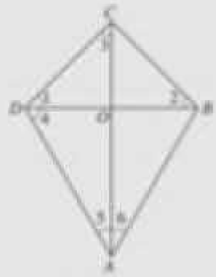
6. (1) 一个多边形的内角和是外角和的一半，它是几边形？

(2) 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形？

综合运用

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$．AB 与 CD 有怎样的位置关系？为什么？BC 与 AD 呢？

（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，$BC\perp CD$，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=60°$，$\angle 5=\angle 6$．

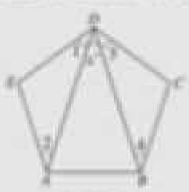
(1) CO 是$\triangle BCD$ 的高吗？为什么？

(2) $\angle 5$ 的度数是多少？

(3) 求四边形 $ABCD$ 各内角的度数.

拓广探索

9. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，且$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求 x 的值.



（第 9 题）

（第 10 题）

10. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle DAB=60°$．AB 与 DE 有怎样的位置关系？BC 与 EF 有这种关系吗？这些结论是怎样得出的？[1]

72 第十七章 三角形

在第 8 题中，关键是先求出$\angle 1$，$\angle 2$，从而得$\angle 3$，再求出$\angle COD$.

3. 在第 9 题中，先求出各内角，再求出$\angle 1$，$\angle 3$，就可以求出 x 的值.

在第 10 题中，可用与平行线有关的结论加以推断.

[1] 这个题稍难一点，可加些提示：

(1) 要判断 AB 与 DE 是否平行，可求出$\angle ADE$．要求出$\angle ADE$，可先求出$\angle ADC$.

(2) 要判断 BC 与 EF 是否平行，可先判断 BC 与 AD，EF 与 AD 是否平行.

[1] 用正三角形、正方形或正六边形可以镶嵌成一个平面图案．用正五边形不能镶嵌成一个平面图案．

[2] 用正三角形与正方形可以镶嵌成一个平面图案．用正三角形与正六边形也可以镶嵌成一个平面图案．

[3] 用任意三角形可以镶嵌成一个平面图案．

[4] 用任意四边形可以镶嵌成一个平面图案．

数学活动

活动1

有些地板的拼合图案如图1所示，它是用正方形的地砖铺成的．用地砖铺地，用瓷砖贴墙，都要求砖与砖严丝合缝，不留空隙，把地面或墙面全部覆盖．从数学角度看，这些工作就是用一些不重叠摆放的多边形把平面的一部分完全覆盖，通常把这类问题叫做用多边形覆盖平面（或平面镶嵌）的问题．

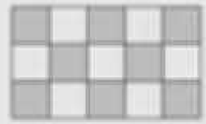


图1

下面我们来探究一些多边形能否镶嵌成平面图案，并思考为什么会出现这种结果．

（1）分别剪一些边长相同的正三角形、正方形、正五边形、正六边形，如果用其中一种正多边形镶嵌，哪几种正多边形能镶嵌成一个平面图案？[1] 如果用其中两种正多边形镶嵌，哪两种正多边形能镶嵌成一个平面图案？[2]

（2）任意剪出一些形状、大小相同的三角形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案．[3]

三角形

四边形

（3）任意剪出一些形状、大小相同的四边形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案．[4]

你还可以搜集一些其他用多边形镶嵌的平面图案，或者设计一些地板的平面镶嵌图，并与同学互相交流．

1. 本活动的目的是让学生通过探索平面图形的镶嵌，知道任意一个三角形、四边形或正六边形可以镶嵌平面，并能运用这几种图形进行简单的镶嵌设计．

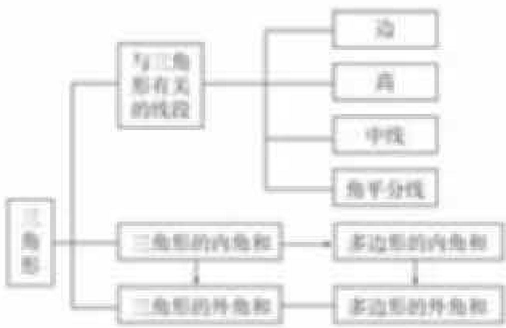
2. 可从简单的规则的多边形入手进行实验，探讨它们独自或两两组合能否镶嵌成平面图案．对于用其中一种镶嵌，学生容易得出结论．对于用其中两种镶嵌，则需要学生分情况讨论．再让学生分别用三角形与四边形进行实验，发现三角形或四边形能镶嵌成平面图案．

3. 一般地，如果拼接在同一个点的各个角的和恰好等于 360°（周角），相邻的多边形有公共边，那么多边形能镶嵌成一个平面图案．

4. 可让学生进行简单的镶嵌设计，这样既可以复习巩固所学内容，又能调动他们的积极性．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在本章中，我们进一步研究了三角形，如探索并证明了三角形三边之间的关系以及三角形内角和定理．类似地，我们研究了多边形，如探索并证明了多边形内角和公式．

三角形内角和定理是几何中一个很重要的结论，它可以由平行线的性质与平角的定义证明．由这一定理可以进一步得出直角三角形两个锐角的关系以及三角形外角的有关结论．

三角形是最简单的多边形．在研究多边形时，我们常常将它分为几个三角形，再利用三角形的性质得出多边形的有关结论．例如，本章得到的多边形的内角和公式就是上述方法的应用．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．三角形的三边之间有怎样的关系？得出这个结论的根据是什么？

2．三角形的三个内角之间有怎样的关系？如何证明这个结论？

3．直角三角形的两个锐角有怎样的关系？三角形的一个外角与和它不相邻的两个内角有怎样的关系？这些结论能由三角形内角和定理得出吗？

4．n 边形的 n 个内角有怎样的关系？如何推出这个结论？

5．n 边形的外角和与 n 有关吗？为什么？

74　第十七章　三角形

1．“本章知识结构图”给出了本章所学的有关概念和性质，揭示了有关内容之间的联系．

2．“回顾与思考”首先对本章内容进行概述．首先指出对本章内容的学习扩大与深化了学生对三角形有关内容的认识：在学生通过观察、操作了解三角形三边的关系，三角形内角和定理的基础上证明了这些结论；在研究三角形的基础上，研究了多边形，强调后者的学习类比着前者进行．然后指出三角形内角和定理在研究三角形有关内容时所起的重要作用．最后指出研究多边形时三角形的基础作用．这些内容可以帮助学生更好地认识本章内容．

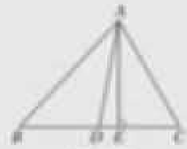
3．可以结合小结中最后给出的几个问题复习全章内容，还可以结合例题与练习进行复习．

[1] 通过本题回顾多边形内角和公式的得出过程，体会多边形问题转化为三角形问题的方法.

复习题 17

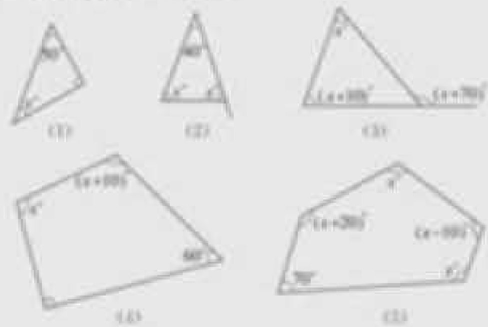
复习巩固

1. 如图，在△ABC 中，AD，AE 分别是边 BC 上的中线和高，AE=2 cm，$S_{\triangle ABD}=1.5\ cm^2$，求 BC 和 DC 的长.



(第1题)

2. 求出下列图形中 x 的值.



(第2题)

3. 填表.

多边形的边数	7		20	
内角和		$15\times180°$		$23\times180°$
外角和				

4. 从八边形的一个顶点出发，可以作几条对角线？它们将八边形分成几个三角形？这些三角形的内角和与八边形的内角和有什么关系？[1]

5. 一个多边形的内角和比四边形的内角和多 540°，并且这个多边形的各内角都相等，这个多边形的每个内角等于多少度？

综合运用

6. 如图，$\angle B=42°$，$\angle A+10°=\angle 1$，$\angle ACD=64°$，求证 $AB\parallel CD$.

(第6题)

(第7题)

第十七章 三角形 75

复习题 17

1. 第 1 题复习巩固三角形的高、中线的概念.

第 2 题可以先求出多边形的内角和，再列出关于 x 的方程，解相应的方程，就可以求出 x 的值. 第（3）小题也可以由三角形的外角的性质列出关于 x 的方程再求解.

第 3～5 题是多边形内角和与外角和公式的理解与运用.

2. 第 6 题要先求出$\angle A$ 或$\angle 1$.

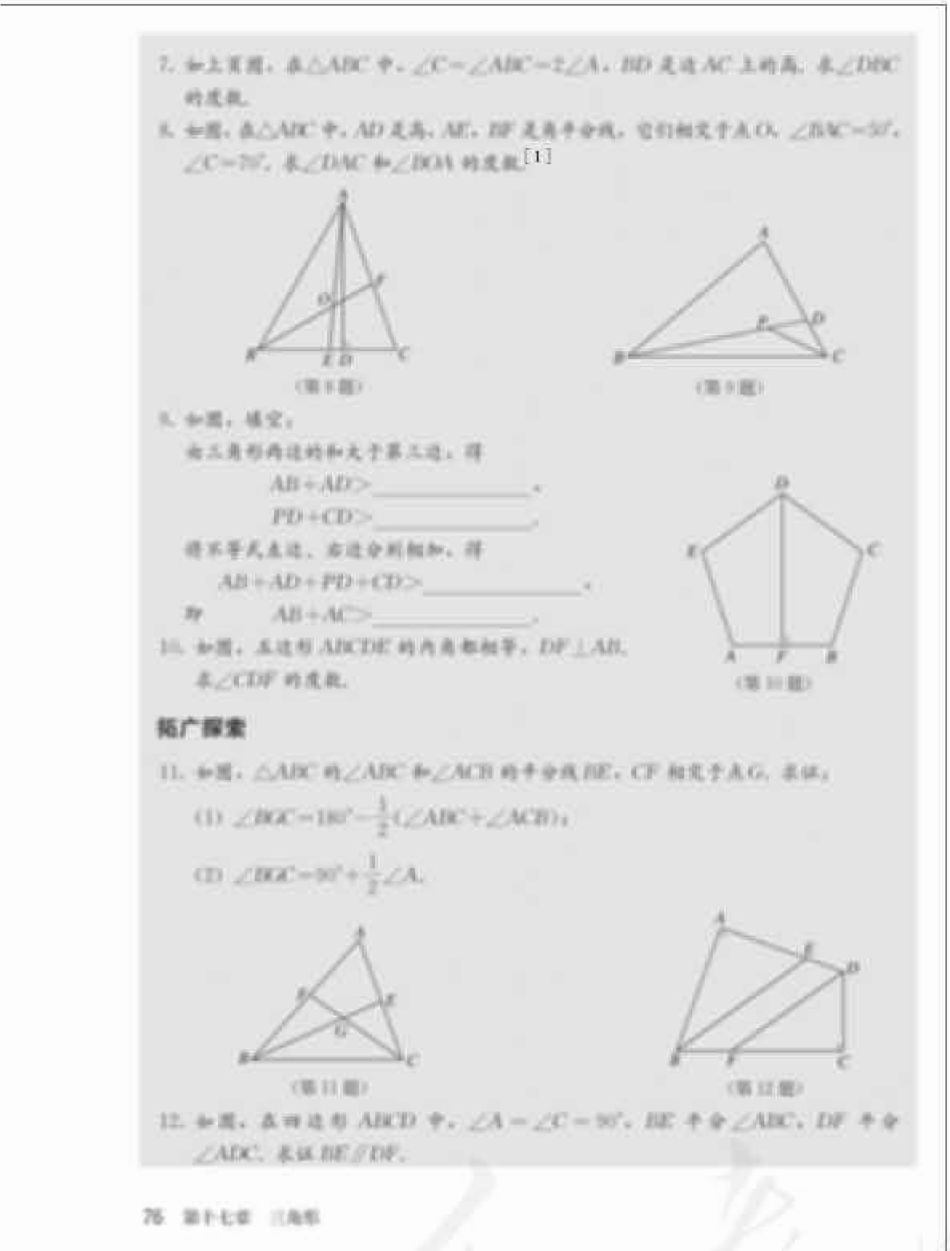
第 7 题可以先求出$\angle C$.

第 8 题求 $\angle BOA$，可由 $\angle BOA=180°-\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle BAC$ 求得.

第 9 题复习三角形三边的关系.

第 10 题先求五边形 $ABCDE$ 的内角的度数，再在四边形 $BCDF$ 中求$\angle CDF$ 的度数.

3. 第 11 题要运用三角形内角和定理，并让



7. 如上页图，在△ABC 中，$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，BD 是边 AC 上的高，求$\angle DBC$的度数.

8. 如图，在△ABC 中，AD 是高，AE，BF 是角平分线，它们相交于点 O，$\angle BAC=50^\circ$，$\angle C=70^\circ$，求$\angle DAC$和$\angle BOA$的度数.[1]

（第 8 题）　（第 9 题）

9. 如图，填空：

由三角形两边的和大于第三边，得

$AB+AD>$______，

$PD+CD>$______.

将不等式左边、右边分别相加，得

$AB+AD+PD+CD>$______，

即　$AB+AC>$______.

10. 如图，五边形 ABCDE 的内角都相等，$DF\perp AB$，求$\angle CDF$的度数.

（第 10 题）

拓广探索

11. 如图，△ABC 的$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线 BE，CF 相交于点 G．求证：

(1) $\angle BGC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$；

(2) $\angle BGC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

（第 11 题）　（第 12 题）

12. 如图，在四边形 ABCD 中，$\angle A=\angle C=90^\circ$，BE 平分$\angle ABC$，DF 平分$\angle ADC$．求证 $BE\parallel DF$.

76 第十七章 三角形

［1］可提示学生，求$\angle BOA$时，先求出$\angle ABC$.

学生进一步熟悉证明.

在第 12 题中，关键是证明$\angle EBC+\angle FDC=90^\circ$，$\angle DFC+\angle FDC=90^\circ$.

Ⅲ 习题解答

习题 17.1

1. 6个，分别是$\triangle ABD$，$\triangle ABE$，$\triangle ABC$，$\triangle ADE$，$\triangle ADC$，$\triangle AEC$.
2. 从四根木条中选出三根有四种情况：10，7，5；10，7，3；10，5，3；7，5，3. 在第一种情况中，任意两根木条的长的和都大于第三根木条的长，这三根木条能组成三角形. 在第二种情况中，$7+3=10$，有两根木条的长的和等于第三根木条的长，这三根木条不能组成三角形. 在第三种情况中，$5+3<10$，有两根木条的长的和小于第三根木条的长，这三根木条不能组成三角形. 在第四种情况中，任意两根木条的长的和都大于第三根木条的长，这三根木条能组成三角形. 所以从长为10，7，5，3的四根木条中选三根组成三角形有两种选法.
3. （略）.
4. （1）CE，BC；（2）$\angle CAD$，$\angle BAC$；（3）$\angle AFC$；（4）$\frac{1}{2}BC\cdot AF$.
5. C.
6. 长为6 cm的边可能是腰，也可能是底边. 所以要分两种情况计算.
   第一种情况，长为6 cm的边是腰. 设底边长为x cm，则$x+2\times6=20$. 解这个方程，得$x=8$. 因为$6+6>8$，所以长度为6 cm，6 cm，8 cm的三条线段能组成三角形.
   第二种情况，长为6 cm的边是底边. 设腰长为x cm，则$2x+6=20$. 解这个方程，得$x=7$. 长度为6 cm，7 cm，7 cm的三条线段能组成三角形.
   所以这个三角形其他两边的长可能是6 cm，8 cm；也可能都是7 cm.
7. （1）如果5是腰长，那么周长为$2\times5+6=16$；如果6是腰长，那么周长为$2\times6+5=17$.
   （2）由于$4+4<9$，只能以9为腰长，所以周长为$2\times9+4=22$.
8. 因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AB\cdot CE$，所以$BC\cdot AD=AB\cdot CE$，即$4AD=2CE$. 所以$AD$与$CE$的比是$1:2$.
9. 由$DE\parallel AC$可得$\angle1=\angle CAD$，由$DF\parallel BC$可得$\angle2=\angle BAD$，由AD是角平分线可得$\angle CAD=\angle BAD$，所以$\angle1=\angle2$.
10. 要使四边形木架不变形，至少要再钉上1根木条；要使五边形木架不变形，至少要再钉上2根木条；要使六边形木架不变形，至少要再钉上3根木条.

习题 17.2

1. （1）$x=33$；（2）$x=60$；（3）$x=54$；（4）$x=60$.
2. （1）一个三角形最多有一个直角. 如果一个三角形有两个直角，那么三角形的内角和大于$180°$，这个结果与三角形的内角和等于$180°$矛盾，所以一个三角形最多有一个直角.
   （2）一个三角形最多有一个钝角. 如果一个三角形有两个钝角，那么三角形的内角和大于$180°$，

这个结果与三角形的内角和等于 180° 矛盾，所以一个三角形最多有一个钝角.

(3) 直角三角形的外角不是锐角. 如果直角三角形的外角是锐角，那么与它相邻的内角是钝角，这时直角三角形的内角和大于 180°，这个结果与三角形的内角和等于 180° 矛盾，所以直角三角形的外角不是锐角.

3. 设 $\angle A=x^\circ$，则 $\angle B=x^\circ+10^\circ$，$\angle C=\angle B+10^\circ=x^\circ+10^\circ+10^\circ=x^\circ+20^\circ$.
由 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，得 $x+(x+10)+(x+20)=180$.
解这个方程，得 $x=50$.
所以 $\angle A=50^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=70^\circ$.

4. 解法 1：由 $AD\perp BC$，得 $\angle ADB=90^\circ$.
由 $\angle 1+\angle 2=90^\circ$，$\angle 1=\angle 2$，得 $\angle 2=45^\circ$.
由 $\angle BAC+\angle 2+\angle C=180^\circ$，得 $\angle BAC=180^\circ-\angle 2-\angle C=180^\circ-45^\circ-65^\circ=70^\circ$.
解法 2：由 $AD\perp BC$，得 $\angle ADC=90^\circ$. 所以 $\angle DAC+\angle C=90^\circ$. 由此可得 $\angle DAC=25^\circ$.
由 $\angle 1+\angle 2=90^\circ$，$\angle 1=\angle 2$，得 $\angle 1=45^\circ$.
所以 $\angle BAC=\angle 1+\angle DAC=45^\circ+25^\circ=70^\circ$.

5. 由 $AB/\!/CD$，得 $\angle 1=\angle A=40^\circ$.
$\angle 2=\angle 1+\angle D=40^\circ+45^\circ=85^\circ$.

6. $\angle C=22.5^\circ$.
提示：由 $\angle C+\angle E=45^\circ$，$\angle C=\angle E$ 可得.

7. $\angle ACB=85^\circ$.
提示：先求 $\angle ABC=80^\circ-45^\circ=35^\circ$，再求 $\angle ACB=180^\circ-35^\circ-45^\circ-15^\circ=85^\circ$.

8. $\angle BDC=97^\circ$，$\angle BFD=63^\circ$.
提示：$\angle BDC=\angle A+\angle ACD=62^\circ+35^\circ=97^\circ$.
在 $\triangle DBF$ 中，$\angle BFD=180^\circ-(\angle BDF+\angle DBF)=180^\circ-(97^\circ+20^\circ)=63^\circ$.

9. $x=140$.
提示：由 $\angle A=100^\circ$，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，得 $\angle ABC+\angle ACB=80^\circ$.
由 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，得 $\angle 2+\angle 4=40^\circ$.
所以 $x^\circ=180^\circ-(\angle 2+\angle 4)=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

10. 180°，90°，90°.

11. $\because$ $\angle BAC$ 是 $\triangle ACE$ 的外角，
$\therefore$ $\angle BAC=\angle ACE+\angle E$.
$\because$ $\angle ECD$ 是 $\triangle BCE$ 的外角，
$\therefore$ $\angle ECD=\angle B+\angle E$.
$\because$ CE 是 $\angle ACD$ 的平分线，
$\therefore$ $\angle ACE=\angle ECD$.
$\therefore$ $\angle BAC=\angle ACE+\angle E=\angle ECD+\angle E=\angle B+\angle E+\angle E=\angle B+2\angle E$.

习题 17.3

1. （略）.
2. （1）$4x+60=(5-2)\times180$. 解这个方程，得 $x=120$.
   （2）$3x+3x+2x+4x=(4-2)\times180$. 解这个方程，得 $x=30$.
   （3）由 $AB\parallel CD$，得$\angle B+\angle C=180^\circ$.
   所以 $x+150+135+180=(5-2)\times180$. 解这个方程，得 $x=75$.
3.

多边形的边数	3	4	5	6	8	12
内角和	180°	360°	540°	720°	1 080°	1 800°
外角和	360°	360°	360°	360°	360°	360°

4. 正五边形每个内角的度数是 108°，正十边形每个内角的度数是 144°.
   提示：以正五边形为例.
   解法 1：利用正多边形的内角和.
   由正五边形的内角和为$(5-2)\times180^\circ=540^\circ$，得每个内角是$\dfrac{540^\circ}{5}$，即 108°.
   解法 2：利用正多边形每个内角与其相邻的外角互补的关系.
   由正五边形的每个外角是$\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$，得正五边形的每个内角是 $180^\circ-72^\circ=108^\circ$.
5. 九边形.
6. （1）三角形；（2）六边形.
7. $AB\parallel CD$ ，$BC\parallel AD$.
   提示：由$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，得出$\angle A$ 与$\angle D$ 的关系.
8. （1）由 $BC\perp CD$，得$\angle BCD=90^\circ$.
   由$\angle1+\angle2=90^\circ$，$\angle1=\angle2$，得$\angle1=\angle2=45^\circ$.
   由$\angle1=\angle2=\angle3$，得$\angle3=45^\circ$.
   在$\triangle CDO$ 中，$\angle COD=180^\circ-\angle1-\angle3=90^\circ$.
   因此 CO 是$\triangle BCD$ 的高.
   （2）由$\angle COD=90^\circ$，$\angle4=60^\circ$，得$\angle5=90^\circ-\angle4=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.
   （3）由$\angle5=30^\circ$，$\angle5=\angle6$，得$\angle DAB=\angle5+\angle6=30^\circ+30^\circ=60^\circ$.
   在$\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=180^\circ-\angle4-\angle DAB=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$.
   $\angle ABC=\angle2+\angle ABD=45^\circ+60^\circ=105^\circ$.
   $\angle BCD=90^\circ$.
   $\angle ADC=\angle1+\angle4=45^\circ+60^\circ=105^\circ$.
9. 五边形的内角和为$(5-2)\times180^\circ=540^\circ$.
   由五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，得$\angle CDE=\angle E=\angle C=\dfrac{540^\circ}{5}=108^\circ$.

由$\angle 1+\angle 2+\angle E=180^\circ$，$\angle 1=\angle 2$，得$\angle 1=\angle 2=36^\circ$.

同理得$\angle 3=\angle 4=36^\circ$.

$\angle ADB=\angle CDE-\angle 1-\angle 3=108^\circ-36^\circ-36^\circ=36^\circ$，即$x=36$.

10. 六边形的内角和为$(6-2)\times 180^\circ=720^\circ$.

由六边形$ABCDEF$的内角都相等，得$\angle CDE=\angle B=\angle C=\angle E=\frac{720^\circ}{6}=120^\circ$.

在四边形$ABCD$中，$\angle ADC=360^\circ-\angle DAB-\angle B-\angle C=360^\circ-60^\circ-120^\circ-120^\circ=60^\circ$.

$\angle ADE=\angle CDE-\angle ADC=120^\circ-60^\circ=60^\circ$.

由$\angle DAB=\angle ADE$，得$AB /\!/ DE$.

由$\angle DAB+\angle B=60^\circ+120^\circ=180^\circ$，得$BC /\!/ AD$.

由$\angle ADE+\angle E=60^\circ+120^\circ=180^\circ$，得$EF /\!/ AD$.

由$BC /\!/ AD$，$EF /\!/ AD$，得$BC /\!/ EF$.

复习题 17

1. 由$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AE=1.5\ \text{cm}^2$，$AE=2\ \text{cm}$，得$BD=1.5\ \text{cm}$.

由AD是边BC上的中线，得$DC=BD=1.5\ \text{cm}$，$BC=2BD=3\ \text{cm}$.

2. (1) $x=40$；(2) $x=70$；(3) $x=60$；(4) $x=100$；(5) $x=115$.

3.

多边形的边数	7	17	20	25
内角和	$5\times 180^\circ$	$15\times 180^\circ$	$18\times 180^\circ$	$23\times 180^\circ$
外角和	360°	360°	360°	360°

4. 从八边形的一个顶点出发可以引出5条对角线，它们将八边形分成6个三角形，这些三角形的内角和与八边形的内角和相等.

5. $\left(\frac{900}{7}\right)^\circ$.

6. 由$\angle A+10^\circ=\angle 1$，$\angle B=42^\circ$，$\angle 1+\angle A+\angle B=180^\circ$，得$\angle A+10^\circ+\angle A+42^\circ=180^\circ$，解得$\angle A=64^\circ$.

由$\angle A=\angle ACD=64^\circ$，得$AB /\!/ CD$.

7. $\angle DBC=18^\circ$.

提示：先由$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，$\angle A+\angle ABC+\angle C=180^\circ$，求出$\angle C$.

8. $\angle DAC=20^\circ$，$\angle BOA=125^\circ$.

提示：先求出$\angle BAO$，$\angle ABO$.

9. BD；PC；$BD+PC$；$BP+PC$.

10. $\angle CDF=54^\circ$.

提示：由五边形$ABCDE$的内角都相等可求出$\angle B$，$\angle C$的度数. 在四边形$BCDF$中，

$\angle CDF=360°-\angle BFD-\angle B-\angle C$.

11. (1) $\because$ BE，CF 分别是$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线，

$\therefore$ $\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle FCB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\therefore$ $\angle EBC+\angle FCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$.

$\because$ 在$\triangle BGC$ 中，$\angle BGC=180°-(\angle GBC+\angle GCB)$，

$\therefore$ $\angle BGC=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$.

(2) $\because$ 在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$，$\angle BGC=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$，

$\therefore$ $\angle BGC=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

12. $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC+\angle ADC=360°-\angle A-\angle C$，$\angle A=\angle C=90°$，

$\therefore$ $\angle ABC+\angle ADC=180°$.

$\because$ BE 平分$\angle ABC$，DF 平分$\angle ADC$，

$\therefore$ $\angle EBC+\angle FDC=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ADC)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

$\because$ 在$\triangle DFC$ 中，$\angle DFC+\angle FDC=90°$，

$\therefore$ $\angle EBC=\angle DFC$.

$\therefore$ $BE/\!/DF$.

Ⅳ 教学设计案例

17.2 与三角形有关的角（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

三角形内角和定理.

2. 内容解析

三角形内角和定理是本章的重要内容，也是“图形与几何”必备的知识基础. 它从“角”的角度刻画了三角形的特征. 三角形内角和定理的探究体现了由实验几何到论证几何的研究过程，同时也说明了证明的必要性.

三角形内角和定理的证明以平行线的相关知识为基础. 定理的验证方法——剪图、拼图，不仅可以说明证明的必要性，而且也可以从中获得添加辅助线的思路和方法. 定理的证明思路是得出三

角形的三个内角与组成平角的三个角分别相等.

基于以上分析，确定本节课的教学重点：探索并证明三角形内角和定理，体会证明的必要性.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）探索并证明三角形内角和定理.

（2）能运用三角形内角和定理解决简单问题.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：学生能通过度量或剪图、拼图等实验进一步感知三角形的内角和等于 180°，发现操作实验的局限性，进而了解证明的必要性；在实验的过程中能发现其中蕴含的辅助线，并能运用平行线的性质证明三角形内角和定理.

达成目标（2）的标志是：学生能运用三角形内角和定理解决简单的与三角形中角有关的计算和证明问题.

三、教学问题诊断分析

证明三角形内角和定理需要添加辅助线，这是学生第一次遇到添加辅助线证明定理的问题. 由于添加辅助线是一种尝试性活动，规律性不强，学生会感到困难. 教学时，教师要让每个学生都亲自动手进行剪图、拼图，引导学生在实验的过程中感悟添加辅助线的方法，进而发现思路、证明定理.

本节课的教学难点是：如何添加辅助线证明三角形内角和定理.

四、教学过程设计

1. 探索并证明三角形内角和定理

问题 1 在小学我们已经知道任意一个三角形的三个内角的和等于 180°，你还记得是怎么发现这个结论的吗？请大家利用手中的三角形纸片进行探究.

师生活动：学生动手操作，然后汇报结果.

有的用度量的方法得出结论，有的通过剪图、拼图或折叠的方法得出结论.

图 1、图 2、图 3、图 4 是利用剪图、拼图的方法得到的. 图 5 是利用折叠的方法得到的. 学生可能还有其他的剪拼图方法.

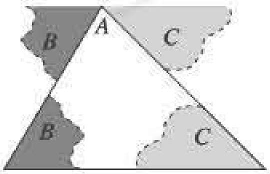


图 1

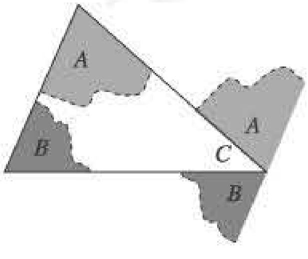


图 2

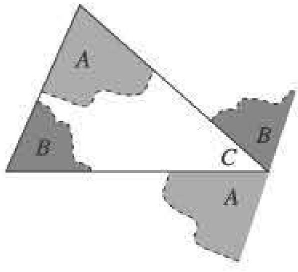


图 3

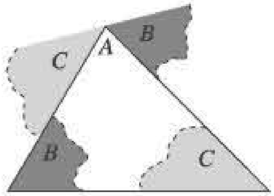


图 4

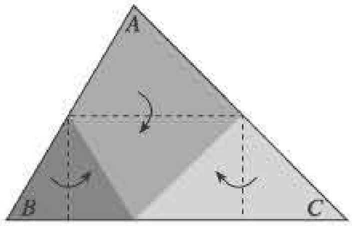


图 5

追问 1：运用度量的方法，得出的三个内角的和都是 180°吗？为什么？

师生活动：学生回答，不全是. 有的大于 180°，有的小于 180°，有的等于 180°. 因为测量可能会有误差.

追问 2：通过度量、剪拼图或折叠的方法验证了手中的三角形纸片的三个内角的和等于 180°，但我们手中的三角形只是所有三角形中有限的几个，而形状不同的三角形有无数多个，我们如何能得出“所有的三角形的三个内角的和都等于 180°”这个结论呢？

师生活动：小组交流，小组代表汇报交流结果，最后达成共识：需要通过推理的方法去证明.

设计意图：让学生通过实验操作，一方面发现实验操作的局限性（视觉误差、度量误差，实验有限性与三角形个数无限的矛盾），进而了解证明的必要性；另一方面从实验的过程（如图 1、图 2）中受到启发，为下一步证明三角形内角和定理提供思路和方法. 若有学生拼成图 3、图 4，虽然拼成 180°，有验证作用，但不容易形成证明思路. 若有学生利用折叠的方法（如图 5），教师也要给予肯定，并指出在以后学习了新的几何知识（全等三角形及轴对称等内容）后我们也能说明它的合理性.

问题 2　你能从以上的操作过程中受到启发，想出证明“三角形的内角和等于 180°”的方法吗？

师生活动：学生独立思考.

追问 1：在图 1 中，$\angle B$ 和 $\angle C$ 分别拼在 $\angle A$ 的左右，三个角合起来形成一个平角，出现了一条过点 A 的直线 l，直线 l 与边 BC 有什么位置关系？

师生活动：学生回答——平行.

追问 2：在操作过程中我们发现了与边 BC 平行的直线 l，由此，你又能受到什么启发？你能发现证明“三角形的内角和等于 180°”的思路吗？

师生活动：学生独立思考，然后回答问题——通过添加与边 BC 平行的辅助线 l，利用平行线的性质和平角的定义即可证明结论.

设计意图：让学生反思操作过程，体会添加辅助线的方法，获得证明思路，感悟辅助线在几何证明中的重要作用.

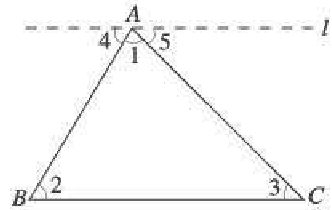


图 6

追问 3：结合图 1，你能写出已知、求证和证明吗？

师生活动：学生回答，教师板书，师生共同完成证明过程（如图 6）. 教师指出，经过证明的这个结论被称为“三角形内角和定理”.

设计意图：让学生通过严格的逻辑推理证明“任意一个三角形的三个内角的和都等于 180°”，感悟几何证明的意义，体会几何证明的规

范性.

追问 4：通过前面的操作和证明过程，你能受到什么启发？你能用其他方法证明此定理吗？

师生活动：学生独立思考，然后小组交流，并汇报不同的作辅助线方法和不同的证明思路.

学生可能从图 2 中受到启发，过点 C 作 AB 的平行线（如图 7），利用平行线性质和平角定义完成证明；也可以如图 8 所示，在三角形的边上任取一点 P 分别作另两边的平行线，或如图 9（如图 10）在三角形内部（外部）任取一点，分别作三边的平行线，将三角形的三个内角转化为一个平角，然后进行证明.

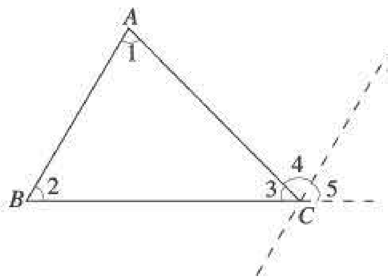


图 7

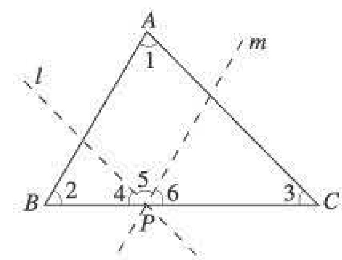


图 8

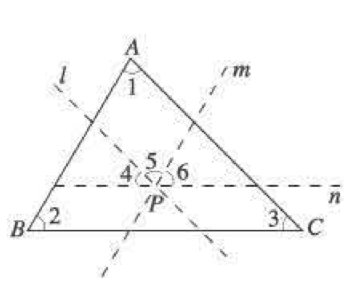


图 9

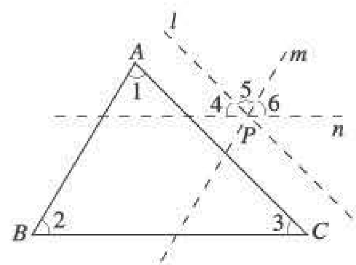


图 10

设计意图：鼓励学生从不同的角度思考问题，进一步体会作辅助线的方法，丰富学生的解题经验. 此处可根据学生的实际情况进行取舍.

2. 运用三角形内角和定理

例 1　如图 11，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle B=75^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求 $\angle ADB$ 的度数.

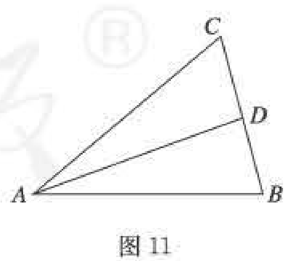


图 11

师生活动：(1) 教师引导学生分析解题思路：要想求出 $\angle ADB$ 的度数，根据三角形内角和定理，只要求出 $\angle DAB$ 的度数即可. 由于 $\angle BAC=40^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，所以很容易得出 $\angle DAB=20^\circ$；(2) 学生独立完成解题过程，一名学生板书；(3) 师生共同分析板书学生的解题过程.

设计意图：运用三角形内角和定理求相关角的度数，促进学生进一步巩固定理内容.

例 2　如图 12，C 岛在 A 岛的北偏东 50° 方向，B 岛在 A 岛的北偏东 80° 方向，C 岛在 B 岛的北偏西 40° 方向. 从 B 岛看 A，C 两岛的视角 $\angle ABC$ 是多少度？从 C 岛看 A，B 两岛的视角 $\angle ACB$ 呢？

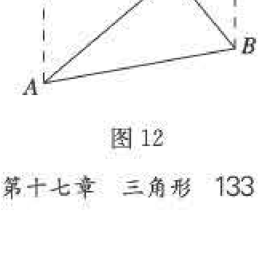


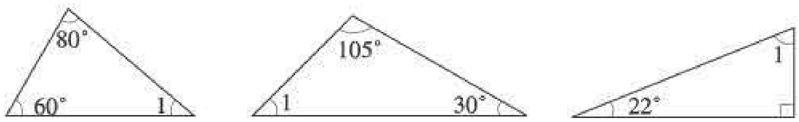
图 12

师生活动：(1) 教师引导学生将实际问题转化为数学中的三角形的角的问题，即 A，B，C 三岛的连线构成$\triangle ABC$，所求的$\angle ACB$ 是$\triangle ABC$ 的一个内角；(2) 教师引导学生分析解题思路：在$\triangle ABC$ 中，若能求出$\angle CAB$ 和$\angle ABC$，根据三角形内角和定理，即可求出$\angle ACB$，而根据已知条件，$\angle CAB$ 和$\angle ABC$ 很容易求出；(3) 学生独立完成解题过程，并相互批改.

设计意图：利用三角形内角和定理解决生活中的简单问题，提高学生的应用意识和数学表达能力.

练习

1. 如图 13，说出各图中$\angle 1$ 的度数：



(1)　　(2)　　(3)

图 13

2. 如图 14，从 A 处观测 C 处时的仰角$\angle CAD=30°$，从 B 处观测 C 处时的仰角$\angle CBD=45°$. 从 C 处观测 A，B 两处时的视角$\angle ACB$ 是多少？

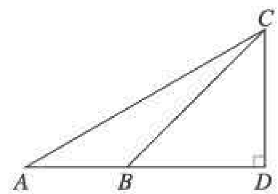


图 14

师生活动：学生口答第 1 题，独立完成第 2 题.

设计意图：第 1 题是通过简单的计算，使学生进一步熟悉三角形内角和定理. 第 2 题是让学生运用三角形内角和定理解决简单的实际问题.

3. **小结**

教师与学生一起回顾本节课所学的主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 本节课学习了哪些主要内容？

(2) 为什么要用推理的方法证明“三角形的内角和等于 180°”？

(3) 你是怎么找到三角形内角和定理的证明思路的？

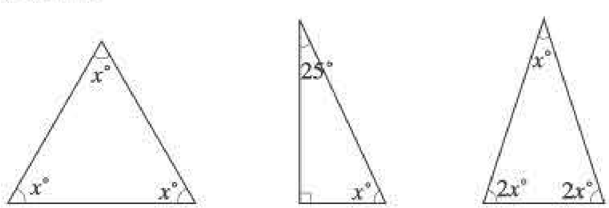
设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，掌握本节课的核心——三角形内角和定理，进一步体会证明的必要性，感悟辅助线的添加方法和在几何证明中的作用.

4. **布置作业**

教科书习题 17.2 第 1，3，7 题.

五、目标检测设计

1. 如图，写出图中 x 的值：

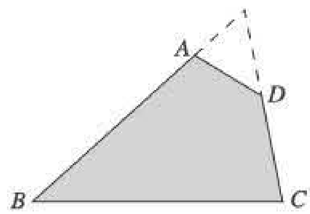


(第 1 题)

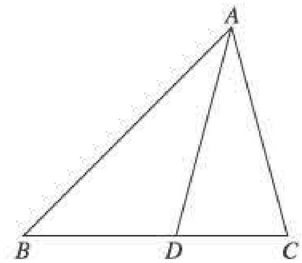
设计意图：考查学生对三角形内角和定理的理解.

2. 如图是某模具厂的一种模具. 按规定，BA，CD 的延长线的夹角应为 $61°$，王师傅测得 $\angle B=42°$，$\angle C=79°$，则可以判断该模具__________（填“符合”或“不符合”）要求，理由是：______________________________________.

设计意图：考查学生运用三角形内角和定理解决实际问题.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$，$\angle C=75°$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求 $\angle ADC$ 的度数.

设计意图：考查学生运用三角形内角和定理及角平分线的定义解决几何问题.

17.3 多边形及其内角和（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

多边形及其有关概念，多边形内角和公式.

2. 内容解析

多边形及其有关概念包括多边形的定义，多边形的边、内角、外角、对角线，凸多边形，正多边形等. 多边形以三角形为基础，多边形的边、内角、外角、内角和等有关概念都可以与三角形类比，多边形的对角线能把多边形分成几个三角形，因此，多边形的问题通常可以转化为三角形的问题来解决.

多边形内角和公式反映了多边形的要素之一——“角”之间的数量关系，是多边形的基本性质. 多边形内角和公式是三角形内角和定理的应用、推广和深化，它源于三角形内角和定理又包含三角形内角和定理. 多边形内角和公式为多边形外角和公式、四边形及正多边形的有关角的学习提供知识基础.

多边形内角和公式的探索是从具体的正方形、长方形的内角和研究出发，逐步深入地提出一般的问题（如：(1) 任意一个四边形的内角和是否也等于 $360°$？(2) 你能推导出五边形和六边形的内角和各是多少吗？(3) 你能发现多边形的内角和与边数的关系吗?)，进而获得一般结论，并加以推理论证，这个过程体现了从特殊到一般的研究问题方法. 多边形内角和公式的探索与证明都涉及将多边形分割成若干个三角形的化归过程，即将多边形分割成若干个三角形，利用三角形内角和公式得出多边形内角和公式，这个过程体现了将复杂图形转化为简单的基本单元的化归思想.

基于以上分析，确定本节课的教学重点：多边形内角和公式的探索与证明过程.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解多边形的有关概念，感悟类比方法的价值.

（2）探索并证明多边形内角和公式，体会化归思想和从具体到抽象的研究问题的方法.

（3）运用多边形内角和公式解决简单问题.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：学生能类比三角形的有关概念，了解多边形及多边形的边、内角、外角、对角线、凸多边形、正多边形等的有关特征，并能从具体情境中识别它们，感悟类比方法在学习多边形有关概念中的重要价值.

达成目标（2）的标志是：学生能在教师的启发引导下，从对具体的特殊的四边形内角和的研究出发，利用三角形内角和公式，逐步探索四边形、五边形、六边形……n 边形的内角和，并利用推理证明 n 边形内角和公式，体会从具体到抽象的研究问题的方法. 在参与四边形、五边形、六边形……n 边形分割成若干个三角形的过程中，感悟化归思想.

达成目标（3）的标志是：学生能将公式运用于简单的多边形内角和计算，能在多边形问题情境（如计算正多边形的每个内角的大小）中，自觉地联想用该公式解决问题.

三、教学问题诊断分析

由具体的特殊的多边形内角和到 n 边形内角和公式的获得，是一个多层次的探索过程，本质上是由具体到抽象以及逻辑推理的过程. 如何获得将多边形分割成三角形来解决问题的思路，如何确定分割后三角形的个数，这个过程不但结论随着多边形边数的变化而变化，而且需要关注的因素也较多——边数、从一个顶点出发的对角线数、分割的三角形数、内角和等，学生把握这一过程会有一定难度. 教学的关键是：（1）引导学生弄清解决问题（推导）的层次；（2）引导学生注意相关的因素（边数、从一个顶点出发的对角线数、三角形数）；（3）引导学生观察相关因素之间的变化关系（即边数的变化引起从一个顶点出发的对角线数的变化、对角线数的变化又引起三角形个数的变化），并使上述的（1）（2）（3）直观化.

本节课的教学难点是：获得将多边形分割成三角形来解决问题的思路，确定分割后的三角形的个数.

四、教学过程设计

1. 了解多边形的有关概念

教师引入本节课内容：前面我们已经研究了三角形的有关概念和性质，那么由条数大于三的线段首尾相接组成的封闭图形的概念和性质是什么呢？它们和三角形中的有关概念和性质是否有相似之处呢？让我们一起来探究吧.

问题 1　（1）你能从图 1 中想象出几个由一些线段围成的图形吗？

（2）类比三角形的定义，你能给多边形下定义吗？

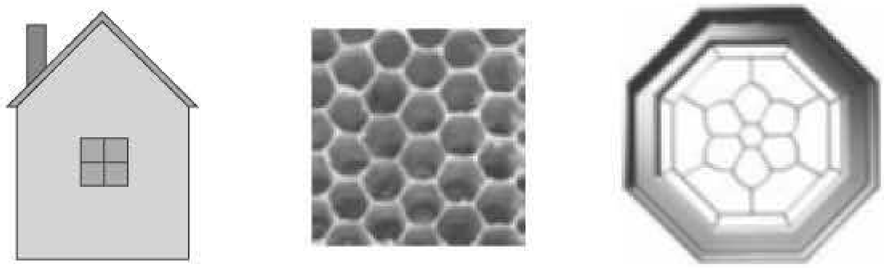


图 1

师生活动：学生边看、边议. 教师引导学生回忆三角形的定义，并仿照三角形的定义给多边形下定义. 教师举例说明多边形定义中的“在平面内”的意义.

设计意图：让学生类比三角形的定义给多边形下定义，感悟类比方法的重要作用.

追问 1：多边形按组成它的线段的条数可以分成三角形、四边形、五边形……如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形就叫做 n 边形. 你能说出图 2 是几边形吗？

师生活动：教师介绍多边形的分类，学生回答图 2 是五边形.

追问 2：在三角形中，我们专门研究了它的内角、外角，类似地，你能结合图 2 和图 3 指出这个五边形的内角、外角吗？

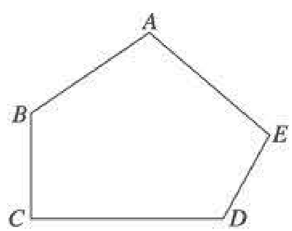


图 2

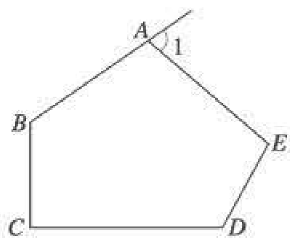


图 3

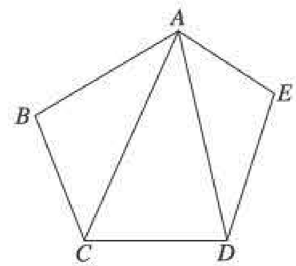


图 4

师生活动：学生回答图 2 中的$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$ 是五边形 $ABCDE$ 的 5 个内角，图 3 中的$\angle 1$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角. 教师进而指出，多边形相邻两边组成的角叫做多边形的内角，多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角.

设计意图：让学生了解多边形的概念，并通过类比的方法，了解多边形的内角、外角.

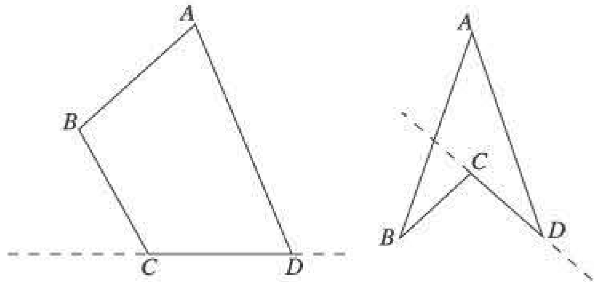
追问 3：连接多边形不相邻的两个顶点的线段，叫做多边形的对角线. 如图 4，从五边形 $ABCDE$ 的一个顶点出发可以得到几条对角线？过六边形 $ABCDEF$ 的顶点 C 画出所有的对角线，此时共有几条对角线？

师生活动：教师介绍对角线的概念，学生通过画图回答问题.

设计意图：让学生了解对角线的概念，通过画出从一个顶点出发的六边形的对角线，为研究 n 边形的内角和作铺垫.

追问 4：你能说出图 5 中两个四边形的异同点吗？

师生活动：教师引导学生分析得出，在图（1）中，画出四边形 $ABCD$ 的任何一条边（例如 CD）所在的直线，整个四边形都在这条直线的同一侧；在图（2）中，画出边 CD 所在直线，整个四边形不都在这条直线的同一侧. 教师介绍：像图（1）这样的多边形称为凸多边形，本节只讨论



（1）　　　　（2）

图 5

凸多边形.

设计意图：让学生了解凸多边形的概念.

追问 5：正方形的边、角有什么特点？你能给正多边形下定义吗？图 6 中的各个图形分别读作什么？

师生活动：（1）学生回答，并给正多边形下定义；（2）教师与学生共同分析正多边形的两个条件，并通过反例（如一般的长方形各个内角都相等，但它不是正方形，一般的菱形各边都相等，它也不是正方形），说明“各个角都相等、各条边都相等”两个条件缺一不可；（3）学生指出图 6 中的图形分别是正三角形、正方形、正五边形、正六边形.

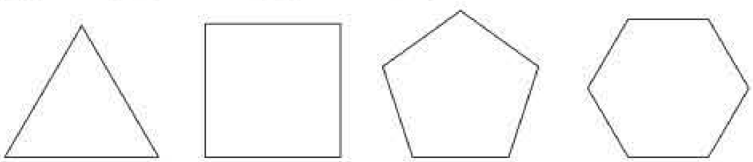


图 6

设计意图：让学生类比正方形学习正多边形，提高学生的学习能力.

2. 探索四边形、五边形、六边形的内角和

问题 2　我们知道，三角形的内角和等于 180°，正方形、长方形的内角和都等于 360°. 那么，任意一个四边形的内角和是否等于 360°呢？能证明你的结论吗？

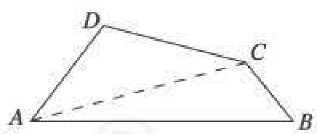


图 7

师生活动：教师引导学生分析问题解决的思路——如何利用三角形的内角和求出四边形的内角和，进而发现：只需连接一条对角线，即可将一个四边形分割为两个三角形（图 7）. 学生说出证明过程，教师板书.

设计意图：（1）从学生熟悉的、已知的特例出发，建立起四边形和三角形之间的联系，为提出一般问题作铺垫；（2）通过连接四边形的对角线，将四边形分割成两个三角形，得出四边形内角和等于两个三角形内角和之和，这个环节渗透了将复杂图形化为简单的基本单元的化归思想.

追问 1：这里连接对角线起到什么作用？

师生活动：学生回答——将四边形分割成两个三角形，进而将四边形的内角和问题转化为两个三角形所有内角的和的问题.

设计意图：让学生进一步感受对角线在探索四边形内角和中的作用，体会化归思想.

追问 2：类比前面的过程，你能探索出五边形的内角和吗？

师生活动：学生先独立思考，再分组讨论，然后代表汇报. 学生类比四边形内角和的研究过程，得出从五边形的一个顶点出发可以作 2 条对角线，将五边形分割成 3 个三角形（如图 8）. 进而得出五边形的内角和为$(5-2)\times180°=540°$. 教师进一步启发学生从顶点或边两个角度解释（从顶点的角度：所取顶点与相邻的两个顶点无法连成对角线，所以少了两个三角形；从边的角度：所取顶点与它所在的两条边不能构成三角形，所以少了两个三角形），进而可以得出五边形内角和为$(5-2)\times180°=540°$.

设计意图：将研究方法进行迁移，明确边数、从一个顶点作出的对角线条数、分割的三角形数、五边形内角和之间的关系，为进一步探究六边形内角和奠定基础.

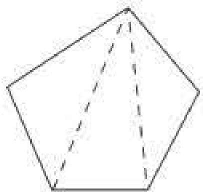


图 8

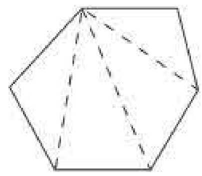


图 9

追问 3：如图 9，从六边形的一个顶点出发，可以作____条对角线，它们将六边形分为____个三角形，六边形的内角和等于 $180°\times$______.

师生活动：学生类比四边形、五边形内角和的研究过程回答追问 3.

设计意图：让学生进一步体会将六边形分割成几个三角形的化归过程，明确相关因素（边数、对角线条数、三角形数）对六边形内角和的影响，为从具体的多边形抽象到一般的 n 边形的内角和的研究奠定基础.

3. **探索并证明 n 边形的内角和公式**

问题 3 你能从四边形、五边形、六边形的内角和的研究过程获得启发，发现多边形的内角和与边数的关系吗？能证明你发现的结论吗？

师生活动：学生独立思考后，回答出 n 边形的内角和等于 $(n-2)\times180°$，然后师生共同分析证明思路. 证明过程如下：

从 n 边形的一个顶点出发，可以作 $(n-3)$ 条对角线，它们将 n 边形分为 $(n-2)$ 个三角形，这 $(n-2)$ 个三角形的内角和就是 n 边形的内角和，所以 n 边形的内角和等于 $(n-2)\times180°$.

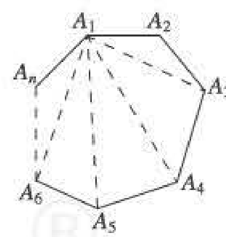


图 10

设计意图：让学生体会从具体到抽象的研究问题的方法，感悟化归思想的作用.

追问 1：通过前面的探究，填写下面表格：

边数	从某顶点出发的对角线数	三角形数	内角和
4			
5			
6			
……			
n			

师生活动：师生共同填写表格，得出规律：多边形的边数增加 1，内角和就增加 180°.

设计意图：通过填写表格，回顾 n 边形内角和的探索思路.

追问 2：前面我们通过从一个顶点出发作对角线，将多边形分割成几个三角形，进而探究出 n 边形的内角和，那么，是否还有其他分割多边形的方法呢？

师生活动：学生自主探究，小组讨论交流. 并让小组代表板演并讲解思路. 学生可能有以下几种方法：

方法 1：如图 11，在 n 边形内任取一点 O，连接 OA_1，OA_2，OA_3，…，OA_n，则 n 边形被分成了 n 个三角形，这 n 个三角形的内角和为 $n\times180°$，以 O 为公共顶点的 n 个角的和是 360°，所以 n 边形的内角和是 $n\times180°-360°$，即 $(n-2)\times180°$.

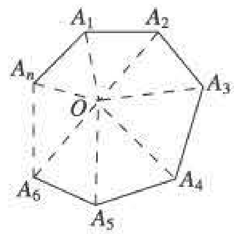


图 11

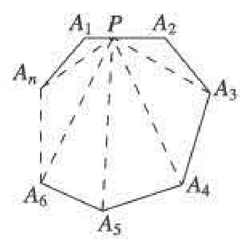


图 12

方法 2：如图 12，在 A_1A_2 上任取一点 P，连接 PA_3，PA_4，PA_5，…，PA_n，则 n 边形被分成了 $(n-1)$ 个三角形，这 $(n-1)$ 个三角形的内角和为 $(n-1)\times180°$，以 P 为公共顶点的 $(n-1)$ 个角的和是 180°，所以 n 边形的内角和是 $(n-1)\times180°-180°$，即 $(n-2)\times180°$.

设计意图：让学生尝试用不同的方法分割多边形，把 n 边形问题转化为熟悉的三角形问题，再次体会化归思想的作用，进一步加深对 n 边形内角和公式推理过程的理解.

4. 巩固多边形内角和公式

例 1 填空：

(1) 十边形的内角和为______°.

(2) 已知一个多边形的内角和为 1 080°，则它的边数为______.

师生活动：学生独立完成，并口头说明理由.

设计意图：让学生从正反两个方面运用公式，解决与多边形内角和有关的简单计算问题.

例 2 如果一个四边形的一组对角互补，那么另一组对角有什么关系？

师生活动：教师提出问题，学生画出图形（图 13），并根据图形将文字语言翻译成符号语言，明确题中已知 $\angle A+\angle C=180°$，所求的是 $\angle B+\angle D$ 的度数，在这里要用到四边形内角和等于 360°. 完成解题过程后，教师引导学生得出结论：如果四边形的一组对角互补，那么另一组对角也互补.

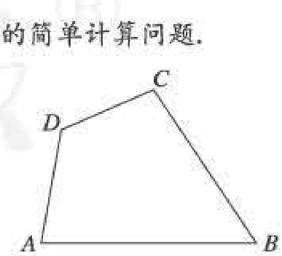


图 13

设计意图：让学生理解文字语言，并会将文字语言转化为图形语言和符号语言，进一步巩固多边形内角和公式，利用公式解决具体问题.

练习

1. 图 14 中的 $x=$________，图 15 中的 $x=$________.

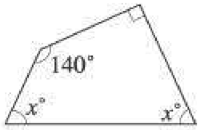


图 14

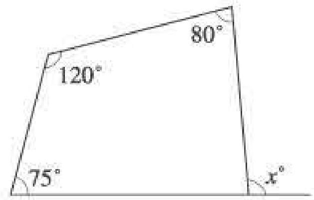


图 15

2. 一个多边形的各个内角都等于 108°，它是______边形.

设计意图：通过练习巩固多边形的内角和公式.

5. **小结**

教师与学生一起回顾本节课所学的主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 本节课学习了哪些主要内容？

(2) 我们是怎样得到多边形内角和公式的？

(3) 在探究多边形内角和公式的过程中，连接对角线起到什么作用？

设计意图：引导学生从知识内容和学习过程两个方面总结自己的收获，通过建立知识之间的联系，凸显将复杂图形转化为简单的基本单元的化归思想，强调从特殊到一般地研究问题的方法.

6. **布置作业**

教科书习题 17.3 第 1，2，4，5 题.

五、目标检测设计

1. 若正 n 边形的每个内角为 120°，则 n 的值是（　　）.

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 8

设计意图：考查学生对正多边形概念的理解及对多边形内角和公式的运用.

2. 已知一个多边形的内角和是 1 440°，求这个多边形的边数.

设计意图：考查学生对多边形内角和公式的运用.

3. 若两个多边形的边数比为 1∶2，内角和的度数比为 1∶3，求这两个多边形的边数.

设计意图：考查学生运用多边形内角和公式进行计算的能力.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 三条线段可连接成三角形的判定

已知线段 a，b，c，当它们满足下列条件之一时，可以连接成三角形：

(1) $a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$，即每条线段都小于其他两条线段的和.

(2) $|a-b|<c<a+b$，即三条线段中，某一条线段大于其他两条线段差的绝对值，而小于其他两条线段的和.

(3) 设 c 是最长线段，有 $c<a+b$，即最长线段小于其他两条线段的和.

2. 三角形中的主要线段及其性质

(1) 三角形的角平分线

三角形内角的平分线与对边的交点和该角顶点所构成的线段，叫做三角形的内角平分线，简称三角形的角平分线. 三角形的角平分线是三角形的重要元素之一.

三角形的角平分线分对边两段之比等于夹这个角的两边对应之比.

如图 17-1 所示，AD 是$\triangle ABC$ 的$\angle BAC$ 的平分线，则 $BD:DC=AB:AC$.（证明时只需延长 BA 到 E，使 $AE=AC$，连接 CE，进而证明 $AD\parallel EC$. 再利用平行线截得比例线段定理可证出结论.）

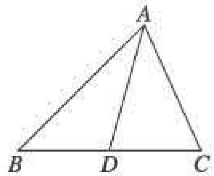


图 17-1

三角形的三条角平分线相交于一点（三条角平分线共点），这个点叫做三角形的内心. 内心位于三角形内部，它到三边的距离相等，因而三角形的内心就是三角形内切圆的圆心.

(2) 三角形的高

从三角形的顶点向对边所在直线作垂线，垂足和该顶点所构成的线段，叫做三角形的高. 三角形的高是三角形的重要元素之一.

三角形的三条高所在直线相交于一点（三条高所在直线共点），这个点叫做三角形的垂心. 在锐角三角形中，垂心位于三角形内部；在直角三角形中，垂心是直角顶点；在钝角三角形中，垂心位于三角形外部.

在锐角三角形中，以三条高的垂足为顶点的三角形叫做垂足三角形. 它是锐角三角形的内接三角形中周长最小的三角形（详见“轴对称”一章拓展资源“费马光行最速原理与法尼亚诺问题”）.

(3) 三角形的中线

连接三角形的顶点和它的对边中点所构成的线段，叫做三角形的中线. 三角形的中线是三角形的重要元素之一.

三角形的三条中线相交于一点（三条中线共点），这个点叫做三角形的重心，并且重心把中线分成 $2:1$ 的两段. 如图 17-2 所示，$GA:GD=2:1$，$GB:GE=2:1$，$GC:GF=2:1$. 重心位于三角形内部. 在物理上，物体受重力的作用点就是该物体的重心. 如果一块薄三角形板是由质地均匀的材料构成，那么三角形的几何重心就是该三角形板的物理重心.

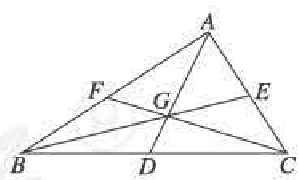


图 17-2

中线性质“三角形的三条中线相交于一点并且这一点将中线分成 $2:1$ 的两段”可证明如下：

如图 17-3，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的两条中线，BE，CF 相交于点 G. 连接并延长 AG，与 BC 相交于点 D.

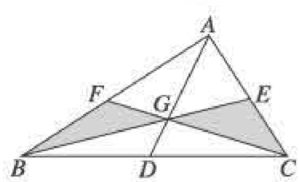


图 17-3

因为$\triangle BCE$，$\triangle BCF$ 的面积都是$\triangle ABC$ 面积的一半，又$\triangle BCG$ 是它们的公共部分，所以$\triangle CGE$，$\triangle BGF$ 的面积相等，不妨设为 S.

因为 E，F 分别是 AC，AB 的中点，所以$\triangle AEG$ 的面积$=\triangle CGE$ 的面积$=S$，$\triangle AFG$ 的面积$=\triangle BGF$ 的面积$=S$. 于是，$\triangle BGA$，

$\triangle CGA$ 的面积相等且都等于 $2S$，但是它们有公共底 AG，因此$\triangle BGA$，$\triangle CGA$ 在底 AG 上的高相等. 而$\triangle BGD$，$\triangle CGD$ 有公共底边 DG 和相等的高，故$\triangle BGD$，$\triangle CGD$ 的面积相等，又它们分别以 BD，CD 为底边，且有同一个高，从而它们的底相等，即 $BD=CD$，点 D 是 BC 的中点，AD 是中线，这就是说$\triangle ABC$ 的三条中线相交于一点.

$\triangle BCE$，$\triangle ACD$ 的面积都是$\triangle ABC$ 面积的一半，又四边形 $DCEG$ 是它们的公共部分，因而$\triangle BGD$ 与$\triangle AEG$ 面积相等，于是$\triangle BGD$ 面积也是 S. 由于$\triangle BGA$，$\triangle BGD$ 的底边共线，且高相等，所以 $GA:GD=\triangle BGA$ 的面积$:\triangle BDG$ 的面积$=2S:S=2:1$. 同理可证 $GB:GE=2:1$，$GC:GF=2:1$.

3. 三角形内角和

(1) 欧几里得证明三角形内角和定理

在欧几里得的《原本》中，三角形内角和定理被安排为第一卷的命题 32：“在任意三角形中，如果延长一边，则外角等于二内对角的和，而且三角形的三个内角的和等于二直角.”

他是用平行线的性质，先证明外角等于两个内对角的和，进而证明三角形内角和定理.

在欧几里得几何中，三角形内角和定理与另一个更弱的命题等价：“所有三角形三内角之和都相同.”

由三角形内角和定理推出“所有三角形三内角之和都相同”是显然的.

现在证明命题“所有三角形三内角之和都相同”可推出三角形内角和定理. 证明如下：

设任何三角形的内角和都是 x，如图 17-4 所示，有

$\angle BAC+\angle B+\angle C=x$，　①

$\angle 1+\angle B+\angle 3=x$，　②

$\angle 2+\angle 4+\angle C=x$　③

$\angle 3+\angle 4=180^\circ$，　④

$\angle 1+\angle 2=\angle BAC$.　⑤

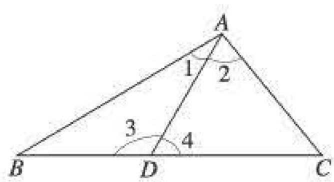


图 17-4

②+③并用④⑤①代入，得

$$\begin{aligned}2x &= (\angle 1+\angle B+\angle 3)+(\angle 2+\angle 4+\angle C)\\ &= (\angle 1+\angle 2)+(\angle B+\angle C)+(\angle 3+\angle 4)\\ &=\angle BAC+\angle B+\angle C+180^\circ\\ &=x+180^\circ.\end{aligned}$$

解得 $x=180^\circ$.

(2) 关于三角形内角和的勒让德定理

法国数学家勒让德（A.－M. Legendre，1752—1833）在研究平行公理的过程中，作出了巨大贡献. 他不用欧几里得的第五公设（平行公理）证明了下列有关三角形内角和的有关定理：

勒让德第一定理　任何三角形的内角和不能大于 180°.

勒让德第二定理　如果某一给定的三角形的内角和等于 180°，那么所有三角形的内角和也等于 180°.

勒让德第三定理　如果某一给定的三角形的内角和小于 180°，那么所有三角形的内角和也小

于 180°.

4. **视线、视角和仰角、俯角**

(1) 从观测者（图 17-5 (1) (2) (3) 中的点 O）至被观测点（点 A，B）的射线就是观测者观测该点的视线（如图 (1) 中的 OM，ON，图 (2) 中的 OA，图 (3) 中的 OB）.

(2) 观测某物两端的视线之间的夹角就是观测者观测该物的视角（如图 (1) 中的 $\angle AOB$ 就是观测 A，B 的视角）.

(3) 观测者位置低于观测点（图 (2) 中的点 A）时，观测者的视线（OA）与观测者的水平视线（OP）之间的夹角就是观测者观测该点的仰角（如图 (2) 中的 $\angle POA$ 就是观测点 A 的仰角）.

(4) 观测者位置高于观测点（图 (3) 中的点 B）时，观测者的视线（OB）与观测者的水平视线（OP）之间的夹角就是观测者观测该点的俯角（如图 (3) 中的 $\angle POB$ 就是观测点 B 的俯角）.

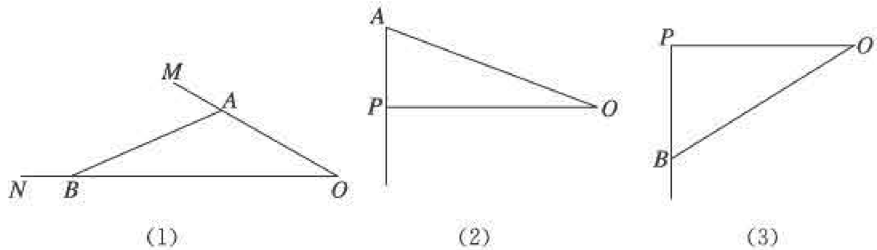


图 17-5

5. **多边形的三角形剖分**

用一个多边形的所有两两不内交（两条对角线不相交或虽然相交但交点不在对角线内部）的对角线，将这个多边形划分成若干个三角形，称为这个多边形的一个三角形剖分. 例如图 17-6 的图形就是对同一个七边形的四个不同的三角形剖分. 围绕多边形的三角形剖分有两个有趣的问题：(1) n 边形的三角形剖分能得到多少个三角形？(2) 对同一个 n 边形的三角形剖分有多少种不同方法？

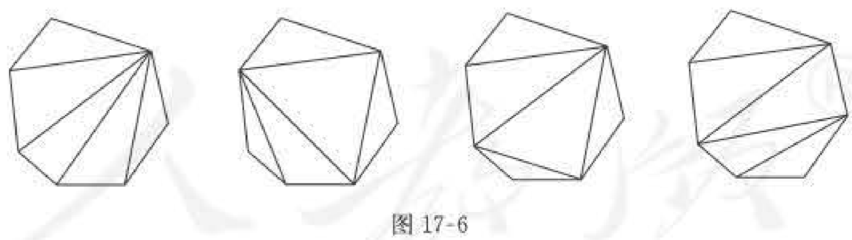


图 17-6

(1) 归纳上述七边形的三角形剖分的情形，不难发现，七边形的三角形剖分能剖分出 5 个三角形.

一般地，n 边形的三角形剖分能且只能剖分出 $(n-2)$ 个三角形.

证明如下：

设 n 边形剖分出的三角形的个数是 N，由于这些三角形的顶点不在 n 边形的内部，所以剖分出的各三角形的所有内角和就是 n 边形的 n 个内角之和，有

$$N\times180^\circ=(n-2)\times180^\circ.$$

故 $N=n-2$.

(2) 数学家欧拉（L. Euler，1707—1783）在 1751 年向德国数学家哥德巴赫（C. Goldbach，1690—1764）提出一个问题：对同一个 n 边形的三角形剖分有多少种不同方法?

设 n 边形有 D_n 种不同三角形剖分方法. 欧拉计算出：

$D_3=1$，$D_4=2$，$D_5=5$，$D_6=14$，$D_7=42$，$D_8=132$，$D_9=429$.

图 17-7 是六边形的所有 14 种不同剖分方法：

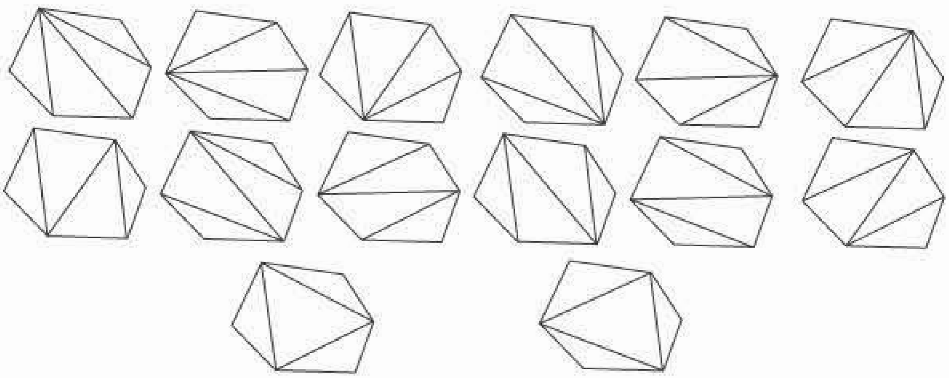


图 17-7

欧拉将这些结果告诉了他的朋友匈牙利数学家谢格奈（J. A. Segner，1704—1777). 谢格奈在 1758 年得到了递归关系式

$$D_n=D_2D_{n-1}+D_3D_{n-2}+\cdots+D_{n-1}D_2.$$

欧拉归纳地得出

$$D_n=\frac{2\times6\times10\times\cdots\times(4n-10)}{(n-1)!}. \quad ①$$

但是，并没有给出证明.

1941 年数学家乌尔班（H. Urban）发现并证明了递归关系式 $D_{n+1}=\frac{4n-6}{n}\times D_n$，由此证明了欧拉的公式①.

6. 正方形的剖分

将一个正方形分成 d 个小正方形，叫做正方形 d 阶剖分. 图 17-8 是 $d=4$，6，7，8 的正方形剖分.

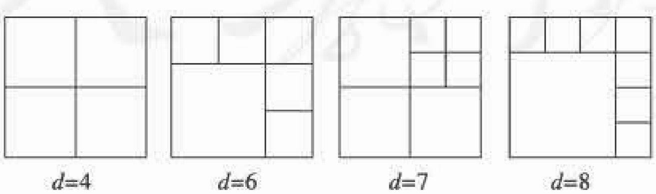


图 17-8

如果将一个正方形的每组对边的中点连线，可将这个正方形分成 4 个小正方形，比原来多了 3 个正方形，所以由 $d=6$，可得 $d=9$，12，15，…的剖分；由 $d=7$，可得 $d=10$，13，16，…的剖分；由 $d=8$，可得 $d=11$，14，17，…的剖分. 一般地，除 $d=2$，3，5 外，正方形的 d 阶剖分都

是存在的.

图 17-9 是 $d=9$ 的部分剖分图.

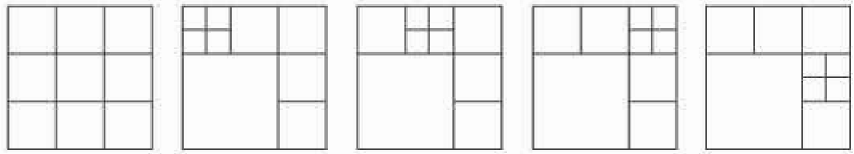


图 17-9

7. 用多边形镶嵌平面

(1) 用任意多边形镶嵌平面

用全等的任意三角形可以镶嵌平面.

因为任一三角形的三个内角之和是 180°，所以只要有六个全等三角形就可以拼成一块平面区域，如图 17-10 所示. 因此，只要有足够多的全等三角形，就可以镶嵌任意大的平面.

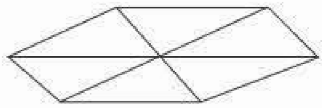


图 17-10

用全等的任意四边形可以镶嵌平面.

因为任一四边形的四个内角之和是 360°，所以只要有四个全等四边形就可以拼成一块平面区域，如图 17-11 所示. 因此，只要有足够多的全等四边形，就可以镶嵌任意大的平面.

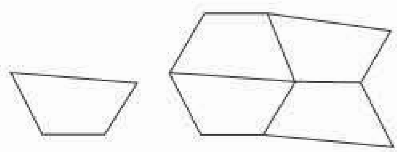


图 17-11

用全等的任意 n 边形 ($n\geqslant5$) 能否镶嵌平面呢?

在一般情形下，用全等的任意五边形是不能镶嵌平面的，但对于特殊的全等五边形还是可能的. 例如，有一组对边平行的任意五边形是能镶嵌平面的，如图 17-12 所示.

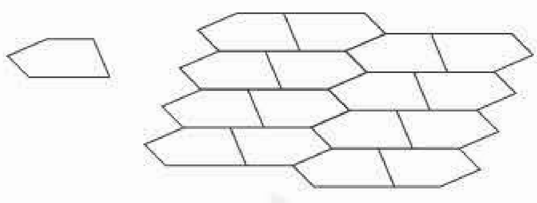


图 17-12

1975 年 7 月，美国著名科普数学家马丁·加德纳在《科学美国人》上再次提出五边形镶嵌平面问题，引起广大数学爱好者的浓厚兴趣. 现在已发现能够镶嵌平面的凸五边形有 13 类之多. 其中，第 13 类如图 17-13 所示，这是圣地亚哥的一位妇女玛乔里·赖斯 (Marjorie Rice) 于 1977 年 12 月找到的.

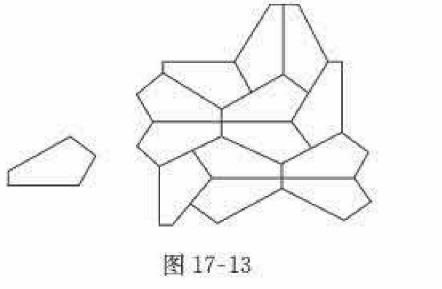


图 17-13

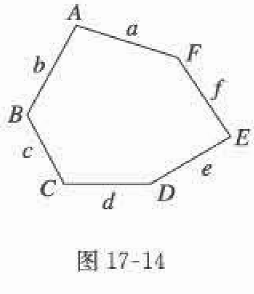


图 17-14

1918 年莱因哈特（K. Reinhardt）证明：能够镶嵌平面的凸六边形只有三类. 如图 17-14，设凸六边形 $ABCDEF$，边长顺次为 a，b，c，d，e，f.

第 1 类：$\angle A+\angle B+\angle C=360^\circ$，$a=d$；

第 2 类：$\angle A+\angle B+\angle D=360^\circ$，$a=d$，$c=e$；

第 3 类：$\angle A=\angle C=\angle E=120^\circ$，$a=b$，$c=d$，$e=f$.

有趣的是，数学家已经证明凸七边形以及多于七边的凸多边形都不能镶嵌平面.

（2）用正多边形镶嵌平面

正多边形的边数 n	3	4	5	6	8	9	10	12
每个内角的度数	60	90	108	120	135	140	144	150

①用同一种正多边形镶嵌平面

设用 m 个全等的正 n 边形能镶嵌平面，则有

$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n}\cdot m=360,$$

化简得

$$(m-2)(n-2)=4.$$

有且仅有三组正整数解：

$$\begin{cases}m=6,\\n=3;\end{cases}\qquad\begin{cases}m=4,\\n=4;\end{cases}\qquad\begin{cases}m=3,\\n=6.\end{cases}$$

即分别用 6 个正三角形（等边三角形）、4 个正方形、3 个正六边形可以镶嵌平面.

②用多种正多边形镶嵌平面

用两种正多边形镶嵌平面：解不定方程 $px+qy=360$，其中 x，y 是正多边形每个内角的度数（取自上表第二行），p，q 是对应正多边形的个数.

例如，$x=60$（正三角形），$y=90$（正方形）时，$p=3$，$q=2$，即 3 个正三角形和 2 个正方形可以镶嵌平面，如图 17-15 所示.

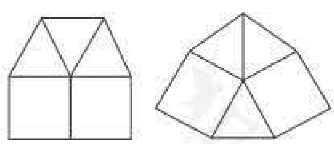


图 17-15

再如，$x=90$（正方形），$y=135$（正八边形）时，$p=1$，$q=2$，即 1 个正方形和 2 个正八边形可以镶嵌平面.

$x=108$（正五边形），$y=144$（正十边形）时，$p=2$，$q=1$，即 2 个正五边形和 1 个正十边形可以镶嵌平面.

用三种正多边形镶嵌平面：解不定方程 $px+qy+rz=360$，其中 x，y，z 是正多边形每个内角的度数（取自上表第二行），p，q，r 是对应正多边形的个数.

例如，$x=90$（正方形），$y=120$（正六边形），$z=150$（正十二边形）时，$p=q=r=1$，即 1 个正方形、1 个正六边形和 1 个正十二边形可以镶嵌平面.

（3）用多种正多边形拼成多边形

例如，用若干个边长都是 1 的正三角形和正方形拼成多边形.

设可以拼出 n 边形，因为用的是正三角形和正方形拼成多边形，所以这个多边形的内角的大小只有四种可能：$60°$，$90°$，$120°$，$150°$. 设这四种角分别有 s，t，u，v 个，则有

$$\begin{cases} s+t+u+v=n, \\ 60s+90t+120u+150v=(n-2)\times 180. \end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases} s+t+u+v=n, & ① \\ 2s+3t+4u+5v=6n-12. & ② \end{cases}$$

消去 v，得 $3s+2t+u=12-n\geqslant 0$. 从而 $n\leqslant 12$. 即用若干个边长都是 1 的正三角形和正方形最多拼成 12 边形.

对于给定的 n，只需求解由①②组成的方程组，解出 s，t，u，v 就可以了. 图 17-16 的图形就是其中的一部分结果（顺次是五边形、六边形、七边形、八边形、九边形、十边形、十一边形、十二边形）.

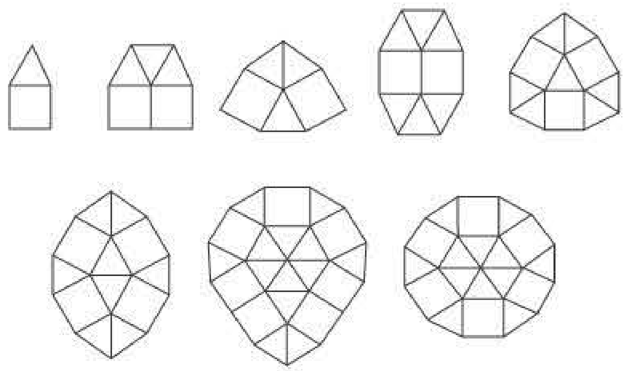


图 17-16

参考资料

[1] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分）. 北京：科学出版社，1984.

[2] 欧几里得著，兰纪正等译. 几何原本. 西安：陕西科学技术出版社，1990.

[3] 库图佐夫著，王联芳译. 罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要. 北京：科学普及出版社，1958.

[4] 贺贤孝. 证明的艺术. 长沙：湖南教育出版社，2000.

[5] 贺贤孝. 数学中的未解之谜. 长沙：湖南教育出版社，1998.

[6] 王青建主编. 数学开心辞典. 北京：科学出版社，2008.

二、拓展性问题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，中线 AD 将这个三角形的周长分成 15 和 12 两部分，求这个三角形的三边长.

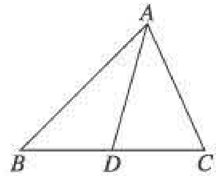


图 17-17

答案：如图 17-17，设 AB（或 BC）的长为 x，$AB+BD=\frac{3x}{2}$. 若 $\frac{3x}{2}=15$，

解出三边长分别是10，10，7；若$\frac{3x}{2}=12$，解出三边长分别是8，8，11.

2. 现有8根木棍，长度分别是1，2，3，4，5，6，7，8. 从中取出三根木棍围成三角形，其中最长边是8，另两边的差大于2. 这样的三角形你能找出几种？

答案：共4种：8，7，2；8，7，3；8，7，4；8，6，3.

3.（1）有4条线段，它们的长度都是整数，总长度是7. 其中任意三条线段都不能构成三角形，求这4条线段的长度；

（2）有5条线段，它们的长度都是整数，总长度是12. 其中任意三条线段都不能构成三角形，求这5条线段的长度；

（3）有6条线段，它们的长度都是整数，总长度是20. 其中任意三条线段都不能构成三角形，求这6条线段的长度.

答案：（1）1，1，2，3；（2）1，1，2，3，5；（3）1，1，2，3，5，8.

4. 平面上有四个点A，B，C，D，用它们作顶点可以组成几个三角形？由于这四个点的位置不同，组成三角形的个数也不同，能有几种不同情形？

答案：按点共线分类，可分三种不同情形.

（1）四点共线　四个点A，B，C，D在同一条直线上，不能组成三角形.

（2）三点共线　四个点A，B，C，D中有且仅有三个点（例如B，C，D）在同一条直线上，如图17-18所示. 可组成三个三角形：$\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$.

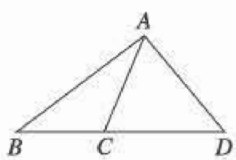


图17-18

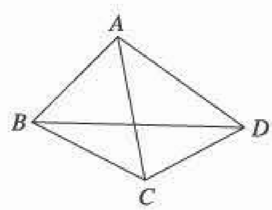


图17-19

（3）任意三点不共线　四个点A，B，C，D中任何三个点都不在同一条直线上，如图17-19所示. 可组成四个三角形：$\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$，$\triangle BCD$.

5. 用长度分别是1，2，3，4，5的5根木棒拼成一个三角形.

答案：为了叙述简便起见，用符号（a，b，c）表示边长是a，b，c的三角形. $a+b$表示长度a，b的两根木棒相连接. 下面是答案的一部分：

（5，2+3，1+4），（5+1，2+3，4），（5+1，2+4，3），

（4+2，5，1+3），（5+2，3+4，1），（5+2，1+4，3），

（5+2，4，1+3），（4+3，5，1+2），（4+3，1+5，2）.

6. 将一个三角形剖分成若干个面积相等的小三角形，称为该三角形的等积三角形剖分.

（1）给定一个任意三角形，将其剖分成3个等积的三角形.

（2）给定一个任意三角形，将其剖分成4个等积的三角形.

答案：（1）图17-20是答案的一部分.

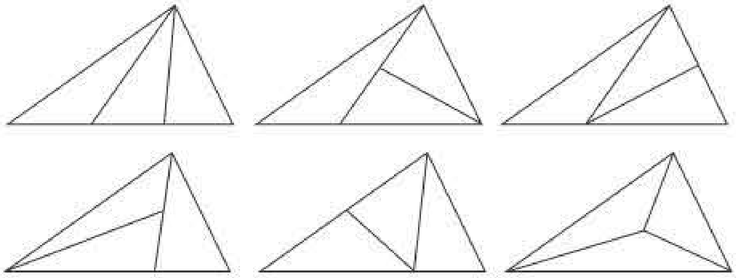


图 17-20

(2) 图 17-21 是答案的一部分.

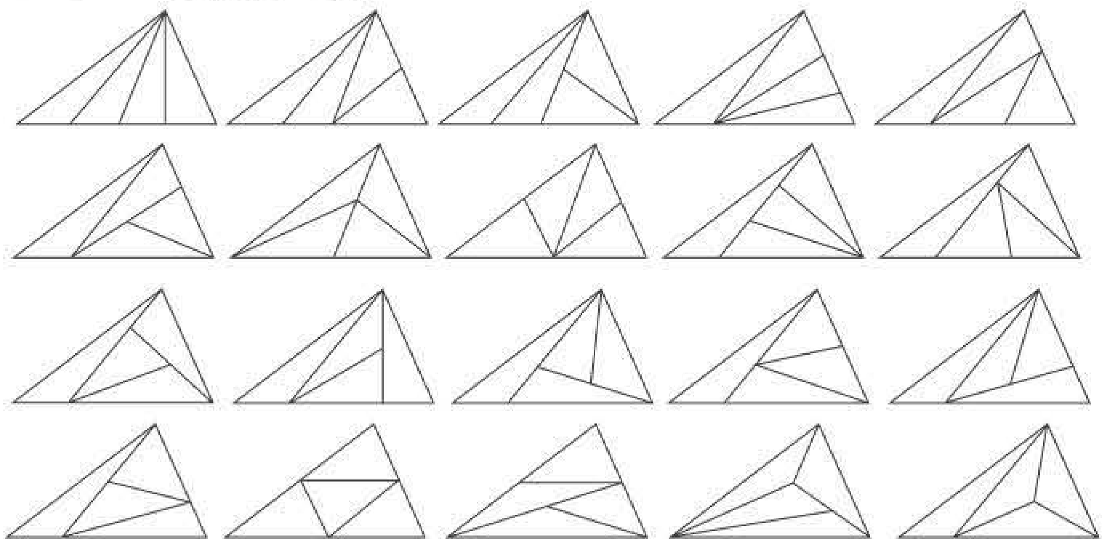


图 17-21

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容是三角形的有关概念和性质，多边形的有关概念以及多边形的内角和与外角和公式. 对于三角形的有关概念，应考查学生是否知道三角形的构成要素，能否按角的大小关系或按边的相等关系对三角形进行分类，能否画出任意三角形的高、中线、角平分线，是否了解三角形的内角、外角的概念，能否画出任意三角形的外角. 对于三角形的性质，应考查学生能否由“两点之间，线段最短”得出三角形的三边关系，能否利用三角形的三边关系判定三条线段是否可以围成一个三角形，能否探索并证明三角形内角和定理，能否利用此定理推出“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”“直角三角形的两个锐角互余”“有两个角互余的三角形是直角三角形”，能否运用三角形内角和定理解决与三角形内角有关的角的计算与证明问题，是否了解“三角形的稳定性”，能否运用“三角形的稳定性”解释生活中的问题，是否知道三角形的三条中线相交于一点

（重心）. 对于多边形有关的概念以及多边形的内角和与外角和公式，应考查学生是否知道多边形的构成要素，能否按边的条数对多边形进行分类，是否了解多边形的内角、外角的概念，能否画出一个多边形的外角，能否探索出多边形内角和、外角和公式，能否运用多边形内角和、外角和公式解决与多边形的角有关的问题，是否会判断一个多边形是正多边形.

2. 考查三角形、多边形的有关概念和性质，应注意以下问题：

（1）对于三角形、多边形的有关概念，应将其置于具体的问题情境中（如几何图形中），结合具体问题考查能否正确理解概念的本质特征，不要单纯考查对概念的记忆.

（2）对于三角形、多边形的性质，应着重考查运用性质解决有关问题的能力，要注意测试题的难度，特别要避免过多地添加辅助线的测试题.

3. 在从三角形到多边形的教学中，要关注学生对类比思想的领会程度，以及学生对证明的必要性认识水平和推理的规范性的掌握情况，关注学生能否感悟到研究几何问题的方法——由实验几何到论证几何，由具体到抽象，由特殊到一般等.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

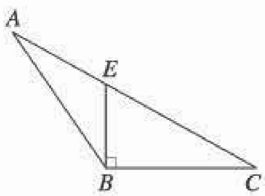
（一）选择题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 下列每组数分别是三根小木棒的长度，用它们能摆成三角形的是（　　）.

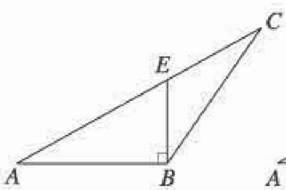
（A）3 cm，4 cm，8 cm　　（B）8 cm，7 cm，15 cm

（C）13 cm，12 cm，20 cm　　（D）5 cm，5 cm，11 cm

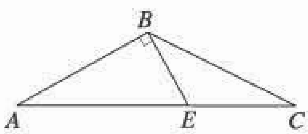
2. 下列四个图形中，线段 BE 是$\triangle ABC$ 的高的是（　　）.



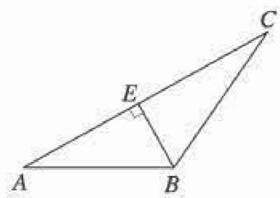
（A）



（B）



（C）



（D）

3. 若一个多边形的外角和与它的内角和相等，则这个多边形是（　　）.

（A）三角形　　（B）四边形　　（C）五边形　　（D）六边形

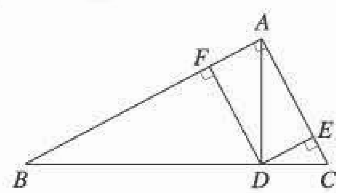
4. 等腰三角形的周长为 13 cm，其中一边长为 3 cm，则该等腰三角形的底边长为（　　）.

（A）7 cm　　（B）3 cm　　（C）9 cm　　（D）5 cm

5. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AC\neq AB$，AD 是斜边 BC 上的高，$DE\perp AC$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E，F，则图中与$\angle C$（$\angle C$ 除外）相等的角的个数是（　　）.

（A）3 个　　（B）4 个

（C）5 个　　（D）6 个



（第 5 题）

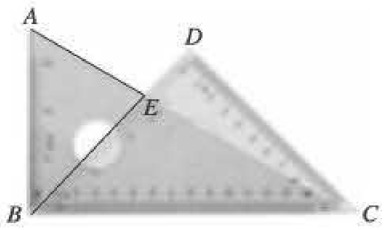
（二）填空题（每小题 5 分，共 25 分）

6. 已知$\triangle ABC$ 的两条边长分别为 2 和 5，则第三边 c 的取值范围是________.

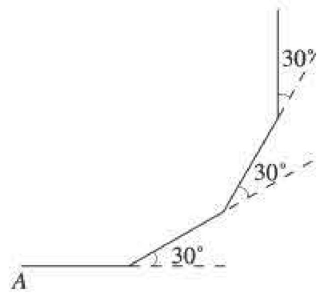
7. 如果一个多边形的内角和为 1 260°，那么从这个多边形的一个顶点出发共有______条对

角线.

8. 如图是一副三角尺拼成的图案，则$\angle AEB=$______°.



（第 8 题）



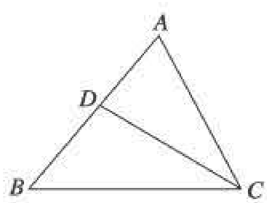
（第 10 题）

9. 如果三角形的一个外角等于与它相邻的内角的 4 倍，等于与它不相邻的一个内角的 2 倍，则此三角形最小内角的度数是________°.

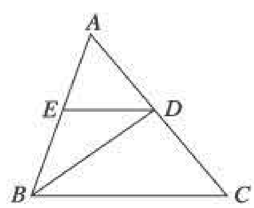
10. 如图，小亮从 A 点出发，沿直线前进 10 m 后向左转 30°，再沿直线前进 10 m，又向左转 30°……照这样走下去，他第一次回到出发地 A 点时，一共走了______ m.

（三）**解答题**（第 11，12 题各 12 分，第 13，14 题各 13 分，共 50 分）

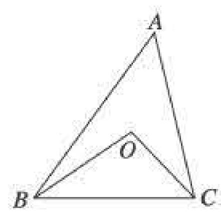
11. 如图，$\triangle ABC$ 中，CD 平分$\angle ACB$，$\angle A=68°$，$\angle BCD=31°$. 求$\angle B$，$\angle ADC$ 的度数.



（第 11 题）



（第 13 题）



（第 14 题）

12. 一个多边形的内角和比它的外角和的 3 倍少 180°，这个多边形的边数是多少？

13. 如图，在$\triangle ABC$ 中，BD 是$\angle ABC$ 的角平分线，$DE \parallel BC$，交 AB 于点 E，$\angle A=60°$，$\angle BDC=95°$，求$\triangle BDE$ 各内角的度数.

14. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=50°$，O 是$\triangle ABC$ 内一点，且$\angle ABO=20°$，$\angle ACO=30°$. 求$\angle BOC$ 的度数.

参考答案

1. C. 本题考查学生对三角形三边关系的掌握.
2. D. 本题考查学生对三角形高的概念的理解.
3. B. 本题考查学生对多边形内角和公式、外角和公式的掌握.
4. B. 本题考查学生对等腰三角形的概念及三角形的三边关系的理解.
5. A. 本题考查学生对直角三角形两个锐角互余的掌握.
6. $3<c<7$. 本题考查学生用不等式表示三边关系的能力.
7. 6. 本题考查学生对多边形内角和公式及多边形对角线概念的掌握.
8. 75. 本题考查学生对三角形外角性质在实际问题中的应用的能力.

9. 36. 本题考查学生运用三角形内、外角关系建立方程解决问题的能力.

10. 120. 本题考查学生运用多边形外角和知识解决实际问题的能力.

11. $\angle B=50^\circ$，$\angle ADC=81^\circ$. 本题考查学生对角平分线、三角形的内角及外角性质的掌握.

12. 7. 本题考查学生对多边形内角和公式、外角和性质的掌握情况及建立方程解决问题的能力.

13. $\angle EBD=\angle EDB=35^\circ$，$\angle BED=110^\circ$. 本题考查学生运用三角形内外角的关系、角平分线的概念、平行线的性质、三角形内角和定理等解决问题的能力.

14. $\angle BOC=100^\circ$. 本题考查学生运用三角形内角和定理或三角形外角性质以及转化思想解决问题的能力.

第十八章　全等三角形

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

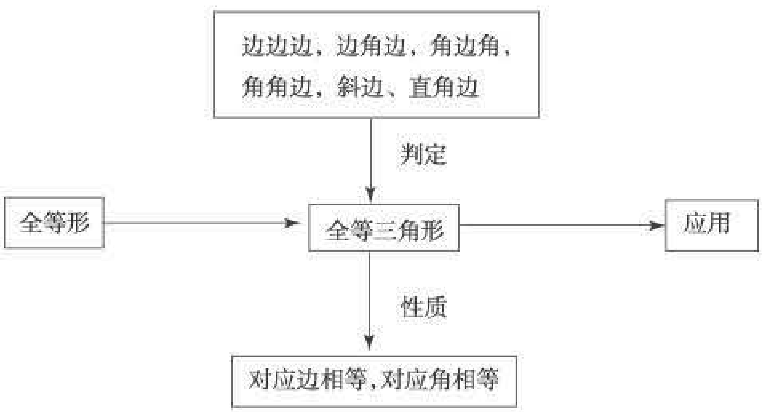
1. 理解全等三角形的概念，能识别全等三角形中的对应边、对应角，掌握并能运用全等三角形的性质.

2. 经历探索三角形全等条件的过程，掌握判定三角形全等的基本事实（“边边边”“边角边”和“角边角”）和定理（“角角边”），能判定两个三角形全等.

3. 能利用三角形全等证明一些结论.

4. 探索并证明角的平分线的性质定理，能运用角的平分线的性质.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

中学阶段重点研究的两个平面图形间的关系是全等和相似，本章将以三角形为例研究全等. 对全等三角形研究的问题和研究方法将为后面相似的学习提供思路，而且全等是一种特殊的相似，全等三角形的内容是学生学习相似三角形的重要基础. 本章还将借助全等三角形进一步培养学生的推理论证能力，主要包括用分析法分析条件与结论的关系，用综合法书写证明格式，以及掌握证明几何命题的一般过程. 由于利用全等三角形可以证明线段、角等基本几何元素相等，所以本章的内容也是后面将学习的等腰三角形、四边形、圆等内容的基础.

本章分三节，主要介绍了全等三角形的概念、性质、判定方法，以及如何利用三角形全等进行证明.

第 18.1 节首先介绍了现实世界中的全等现象，然后从“重合”的角度引入了全等形的概念，在此基础上给出了全等三角形的概念. 接着由全等三角形的概念导出了全等三角形的性质.

第 18.2 节由图形的性质与判定在命题陈述上的互逆关系出发，引出由三条边分别相等、三个角分别相等判定两个三角形全等的方法．接下来，教科书构建了一个完整的探索三角形全等条件的活动——首先提出探究的问题：由全等三角形的定义可知，满足三条边分别相等、三个角分别相等的两个三角形全等，那么能否减少条件，简捷地判定两个三角形全等呢？然后从“一个条件”开始，逐渐增加条件的数量，分别探究“一个条件”“两个条件”“三个条件”……能否保证两个三角形全等．对于“三个条件”的情形，分为三条边、两条边和一个角、两个角和一条边以及三个角分别相等的情况依次进行了探究．同时，根据对各判定方法学习要求的差别设置了不同的学习方式，有的让学生通过作图实验，猜想结论，再以基本事实的形式给出判定方法，有的让学生通过举反例说明判定方法不成立，有的则由已获得的判定方法证明新的判定方法．最后，探究了判定直角三角形全等的特殊方法．

第 18.3 节首先由平分角的仪器的工作原理引出了作一个角的平分线的尺规作图，然后探究并证明了角的平分线的性质，同时总结了证明一个几何命题的一般步骤，最后给出了角的平分线的性质定理的逆定理．

本章重点研究了三角形全等的判定方法，并在其中渗透了研究几何图形的基本问题和方法．在推理论证方面，本章既有直接利用三角形全等的判定方法证明两个三角形全等的问题，又有通过证明两个三角形全等推出线段相等或角相等的问题，在问题的设计中还融入了平行线的性质与判定、三角形中边或角的等量关系、距离的概念、折纸情境等内容，推理论证的难度比“三角形”一章提高了．为了降低学生利用全等三角形的知识进行推理论证的难度，本章设置了多道例题做出示范，包括怎样分析条件与结论的关系，怎样书写证明格式，还总结了证明几何命题的一般步骤．

四、课时安排

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

18.1	全等三角形	1 课时
18.2	三角形全等的判定	6 课时
18.3	角的平分线的性质	3 课时
数学活动		
小结		2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1．重视渗透研究几何图形的基本问题和方法

研究几何图形的基本问题和方法指的是研究几何图形的主要内容和一般性方法，对它的理解有利于学生在学习不同几何对象时产生正迁移．在前面的几何学习中，学生学习了线段、角等基本几何元素，研究了相交线与平行线、三角形等基本几何图形，积累了一些几何研究的经验，本章利用和进一步强化了这些经验．例如，在七年级上册“相交线与平行线”一章，学生认识了图形的判定和图形的性质的含义，知道它们是研究几何图形的两个重要方面，这些已有的认识将有利于学生理解性质和判定也是研究全等三角形的重要内容，同时对将研究的内容做到心中有数．此外，本章还

利用了判定和性质在命题陈述上的互逆关系来引出对全等三角形进行判定的内容——在介绍三角形的判定方法之前，首先回顾了全等三角形的性质，然后将其中的条件和结论交换位置，来考虑判定三角形全等的方法. 而在利用三角形全等证明线段相等或角相等时，本章注重体现判定和性质的综合运用，即先证明两个三角形全等，再进一步证明其中某些对应元素相等.

同时，本章在推出新结论时，多次应用了实验和论证相结合的方式. 例如，介绍角的平分线的性质时，先让学生通过作图、测量，猜想性质，再利用三角形全等进行证明. 又如，习题 18.2 的第 13 题让学生先观察、分析，找出图中的全等三角形，再证明它们全等. 再如，“活动 2　用全等三角形研究‘筝形’”让学生利用已有研究平面图形的经验，通过作图、测量、折纸等多种方法探究筝形的角、对角线的性质，再用全等三角形的知识证明.

2. 注重设计让学生自主探究的活动

在几何学习中，学生的动手操作和自主探究对他们运用几何思想、发现几何结论具有积极的意义. 本章设置了多处让学生自主探究的活动，例如，为了帮助学生理解和掌握判定两个三角形全等的方法，教科书在第 18.2 节设计了一个完整的探究活动，提出了探究目标（在三条边分别相等，三个角也分别相等的六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等）和探究思路（从“一个条件”开始，逐渐增加条件的数量，对“一个条件”“两个条件”“三个条件”……的情形分别进行探究），编排了一系列的探索活动（探究 2～5，第 86，88 页的思考栏目）. 在探索活动中，将作图问题与判定全等问题结合起来，操作性强，便于学生自主探究. 而信息技术应用栏目“探究三角形全等的条件”则是作为对正文中用尺规作三角形的补充，让学生用《几何画板》软件根据给定的边、角条件画三角形，加深理解哪些条件能决定三角形的形状和大小. 而且借助技术手段，学生可以自己设计动态过程，在图形的运动变化中确定三角形全等的条件.

又如，在“活动 2　用全等三角形研究‘筝形’”中，提出了探究的手段——用画图、测量、折纸等方法猜想，用全等三角形的知识证明猜想的结论，以及探究的对象——筝形的角、对角线的性质. 学生可以利用已有研究几何图形的经验自主探究.

3. 注重体现知识间的联系

全等三角形的性质是由两个三角形全等推出线段相等和角相等的结论，而三角形全等的判定是由线段相等和角相等的条件判定两个三角形具有全等的关系，因此全等三角形和线段相等、角相等之间存在必然的联系. 在前面的学习中，学生通过直观认识了线段相等和角相等，知道了两条直线平行与相应的角相等之间的关系、平移前后新旧图形具有全等关系，了解了三角形中所蕴含的线段或角的等量关系（例如，一边上的中线、角平分线、三角形内角和定理及其推论中都蕴含了线段或角的等量关系），而学生在生活中的折纸等活动帮助他们建立起了重合的经验. 本章在编排上尽可能地将这些知识和经验与全等三角形建立起联系. 例如，教科书第 78 页的思考栏目将平移、翻折、旋转三种图形的变化与全等三角形联系起来，让学生通过观察和借助生活中的经验认识到，一个三角形经过平移、翻折、旋转后得到的三角形与原来的三角形全等. 这相当于让学生用运动的眼光看待全等问题，丰富了他们认识全等的角度.

又如，本章在编制练习和习题时，充分融入了学生对线段相等和角相等的直观认识（其实也是欧氏几何中关于全等的公理：等量加等量和相等，等量减等量差相等，彼此能重合的物体是全等

的，整体大于部分）、平行线的性质与判定、三角形中边或角的等量关系、距离的概念、折纸情境等内容，使学生在巩固新知识的同时，建立起新旧知识之间的联系.

六、对本章教学的建议

1. 用研究几何图形的基本思想和方法贯穿本章的教学

学生在前面的几何学习中研究了相交线与平行线、三角形等几何图形，对于研究几何图形的基本问题、思路和方法形成了一定的认识，本章在教学中要充分利用学生已有的研究几何图形的思想方法，用几何思想贯穿全章的教学. 例如，在教授本章之前，可以先让学生根据研究几何图形的经验，思考全等三角形的主要研究内容是什么. 学生明确了性质和判定是研究全等三角形的两个重要方面，不仅可以对将学习的内容做到心中有数，而且可以帮助他们从数学内部认识研究全等的目的. 又如，在教学全等三角形的性质之前，可以提示学生：三角形的性质描述的是三角形的边和角所具有的共同特征，那么全等三角形的性质研究的是什么内容. 而在学生学习三角形全等的判定方法之前，可以先让他们回忆图形的判定讨论的是确定某种图形需要的条件，从而明确研究全等三角形的判定就是要确定能保证两个三角形全等的条件；再让他们利用性质和判定在命题陈述上的互逆关系，得到用三条边分别相等、三个角分别相等判定两个三角形全等的方法. 再如，“活动 2” 中学生独立研究筝形的性质时，要先让他们回顾研究几何图形的基本思路和方法.

2. 让学生充分经历探究过程

本章在编排判定三角形全等的内容时构建了一个完整的探究活动，包括探究的目标、探究的思路和分阶段的探究活动. 教学中可以让学生充分经历这个探究过程，在明确探究目标、形成探究思路的前提下，按计划逐步探索两个三角形全等的条件. 特别是判定三角形全等的“边边边”“边角边”“角边角”方法是以基本事实的方式给出来的，不需要证明来确认其正确性，判定直角三角形全等的“斜边、直角边”方法在本章中也暂时没给出证明，教学中要让学生通过画图、测量、实验、分析、归纳等操作来感知三角形的边、角条件与两个三角形全等之间的关系，在充分探索的基础上感受结论的合理性.

本章在编排中将画图与探究三角形的全等条件结合起来，既有用尺规画一个三角形与已知三角形全等，又有用技术手段根据已知数据画三角形. 教学中要充分利用探索画图方法的过程对形成结论的价值，让学生自主探索画图的步骤、创设多种画法、解释作图依据等，在活动中发现结论.

3. 重视对学生推理论证能力的培养

本章是初中阶段培养逻辑推理能力的重要内容，主要包括证明两个三角形全等，以及通过证明三角形全等证明两条线段或两个角相等. 教学中要在学生已有推理论证经验的基础上，利用三角形全等的证明，进一步培养学生推理论证的能力. 按照整套教科书对推理能力培养的循序渐进的安排，本章的教学重点是引导学生分析条件与结论的关系，书写严谨的证明格式，对于以文字形式给出的几何命题，从具体问题的证明中总结出证明的一般步骤. 教学中可以以具体的问题为载体，先引导学生分析由已知推出结论的思路，由教师示范证明的格式，再逐步要求学生独立分析、写出完整的证明过程. 同时要注意根据教学内容及时地安排相应的训练，让学生切实提高推理论证能力.

Ⅱ 教材分析

[1] 第十一章的回顾与思考中具体阐述了“图形的判定”和“图形的性质”的含义，这里再次向学生指出这两个方面是研究几何图形的重要内容.

[2] 对全等形的研究不局限于全等三角形. 本章以三角形为例，研究的内容和方法可以推广到一般的全等形.

[3] 本章将证明两个三角形全等，还将通过证明三角形全等来证明线段或角相等.

[4] 章头图的钢架桥中有许多形状、大小相同的图形，让学生试着找一找.

第十八章 全等三角形

在我们的周围，经常可以看到形状、大小完全相同的图形，这样的图形叫做全等形. 研究全等形的性质和判定两个图形全等的方法，是几何学的一个重要内容.[1] 本章将以三角形为例，[2] 对这些问题进行研究.

上一章我们通过推理论证得到了三角形内角和定理等重要结论. 本章中，推理论证将发挥更大的作用.[3] 我们将通过证明三角形全等来证明线段或角相等，利用全等三角形证明角的平分线的性质. 通过本章学习，你对三角形的认识会更加深入，推理论证能力会进一步提高.

[4]

1. 在前面的章节中，学生已经学过线段、角、相交线与平行线以及三角形的有关知识，并在“三角形”一章中学习了如何通过推理论证证明一个结论，这些都为他们学习全等三角形的知识提供了基础. 通过本章的学习，学生将理解全等三角形的概念和性质，掌握判定两个三角形全等的方法，同时，学生还将用全等解决一些简单的线段相等或角相等的问题，例如证明角的平分线的性质定理.

2. “全等”是图形之间一种特殊的关系. 在现实世界中，从自然景观到微型模型，从建筑物到艺术作品，甚至日常生活用品，都可以找到全等图形的例子. 可以让学生自己说出从章头图的钢架桥中可以抽象出哪些全等的图形.

18.1 全等三角形

图18.1-1所示的例子中都有形状、大小相同的图形，你能再举出一些类似的例子吗？

图18.1-1

探究

把一块三角尺放在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板和三角尺的形状、大小完全一样吗？把三角尺和裁得的纸板放在一起能够完全重合吗？从同一张底片冲洗出来的两张尺寸相同的照片上的图形，放在一起也能够完全重合吗？[1]

可以看到，形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合．能够完全重合的两个图形叫做**全等形**（congruent figures）．

能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形**（congruent triangles）．

思考

在图18.1-2（1）中，把$\triangle ABC$沿直线BC平移，得到$\triangle DEF$．

在图18.1-2（2）中，把$\triangle ABC$沿直线BC翻折180°，得到$\triangle DBC$．

在图18.1-2（3）中，把$\triangle ABC$绕点A旋转，得到$\triangle ADE$．

各图中的两个三角形全等吗？[2]

［1］学生通过观察可以得出：裁得的纸板和三角尺形状、大小完全一样；把三角尺和裁得的纸板放在一起能够完全重合；从同一张底片冲洗出来的两张尺寸相同的照片上的图形，放在一起也能够完全重合．

［2］各图中的两个三角形是全等的．

1. 本节主要介绍全等三角形的概念和性质，要求学生能识别全等三角形中的对应边、对应角．

2. 教科书通过具体例子引出本章要研究的主题——形状、大小相同的图形，然后让学生通过操作、观察，得出形状、大小相同的图形的特征：放在一起能够完全重合，由此引出全等形的概念．本章主要研究全等三角形，因此教科书在给出全等形的概念后，特别给出了全等三角形的概念．

3. 一个图形经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，即平移、翻折、旋转前后的图形全等．这就初步帮助学生建立起了平移、翻折、旋转三种图形的变化与全等形的关系．同时，这个结论是运用全等形的概念得出的，能起到巩固新概念的作用．另一方面，掌握这个结论，对学生在某些情况下确定全等三角形的对应元素有帮助．

4. 在全等三角形中，我们把互相重合的边或角叫做对应边或对应角．教学时，结合具体图

(1)　(2)　(3)

图 18.1-2

一个图形经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，即平移、翻折、旋转前后的图形全等.

把两个全等的三角形重合到一起，重合的顶点叫做**对应顶点**，重合的边叫做**对应边**，重合的角叫做**对应角**. 例如，图 18.1-2（1）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，记作 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，其中点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F 是对应顶点；AB 和 DE，BC 和 EF，AC 和 DF 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle B$ 和 $\angle E$，$\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角.

[1] 全等用符号“≌”表示，读作“全等于”.

记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上. 例如，图 18.1-2（2）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 全等，点 A 和点 D，点 B 和点 B，点 C 和点 C 是对应顶点，记作 $\triangle ABC\cong\triangle DBC$.

思考

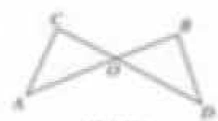
图 18.1-2（1）中，$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，对应边有什么关系？对应角呢？[2]

全等三角形有这样的性质：

全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等.

练习

1. 试找出图 18.1-2（2）、图 18.1-2（3）中两个全等三角形的对应边、对应角.
2. 如图，$\triangle OCA\cong\triangle OBD$，点 C 和点 B，点 A 和点 D 是对应顶点，试找出这两个三角形中相等的边和角.



（第 2 题）

第十八章　全等三角形　79

[1] 全等符号“≌”中，“∽”表示形状相同（即相似），“＝”表示大小相等，合起来就是形状相同，大小相等，也就是全等.

[2] 因为对应边是重合的边，对应角是重合的角，所以 $AB=DE$，$BC=EF$，$AC=DF$，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的对应边相等，对应角相等.

练习答案

1. 在图 18.1-2（2）中，AB 和 DB，BC 和 BC，AC 和 DC 是对应边，$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle ABC$ 和 $\angle DBC$，$\angle ACB$ 和 $\angle DCB$ 是对应角.
   在图 18.1-2（3）中，AB 和 AD，BC 和 DE，AC 和 AE 是对应边，$\angle BAC$ 和 $\angle DAE$，$\angle B$ 和 $\angle D$，$\angle C$ 和 $\angle E$ 是对应角.
2. $AC=DB$，$OA=OD$，$OC=OB$；$\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle B$，$\angle AOC=\angle DOB$.

形使学生理解“对应”的意义就可以了，不需过多解释. 以后还会遇到“对应”这个词，在后面的运用中，学生会逐步加深理解.

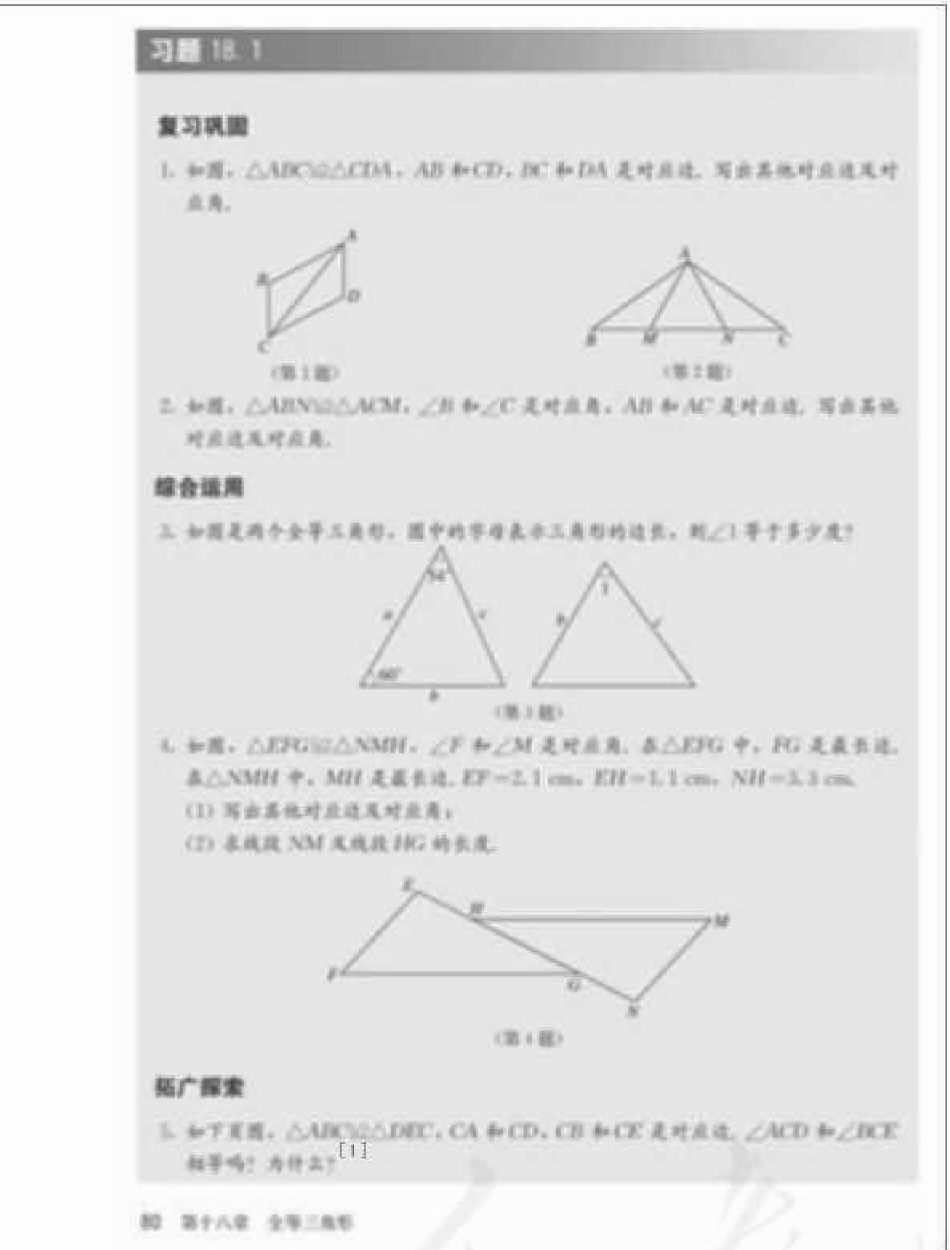
因为全等三角形的对应边、对应角是后面判定三角形全等、应用三角形全等证明线段相等或角相等时常用到的概念，所以在本节要求学生能在全等三角形中正确地找出对应边、对应角. 找对应边、对应角通常有两种方法：(1) 全等三角形的对应角所对的边是对应边，两个对应角所夹的边是对应边；(2) 全等三角形的对应边所对的角是对应角，两条对应边所夹的角是对应角.

由于两个三角形可能有各种各样的位置关系，还可以根据具体情况，针对两个全等三角形不同的位置关系，总结出确定对应边、角的规律：

(1) 有公共边的，公共边一定是对应边；

(2) 有公共角的，公共角一定是对应角；

(3) 有对顶角的，对顶角一定是对应角；



习题 18.1

复习巩固

1. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$AB$ 和 CD，BC 和 DA 是对应边. 写出其他对应边及对应角.

(第 1 题)

2. 如图，$\triangle ABN \cong \triangle ACM$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角，AB 和 AC 是对应边. 写出其他对应边及对应角.

(第 2 题)

综合运用

3. 如图是两个全等三角形，图中的字母表示三角形的边长，则 $\angle 1$ 等于多少度？

(第 3 题)

4. 如图，$\triangle EFG \cong \triangle NMH$，$\angle F$ 和 $\angle M$ 是对应角. 在 $\triangle EFG$ 中，FG 是最长边. 在 $\triangle NMH$ 中，MH 是最长边. $EF=2.1$ cm，$EH=1.1$ cm，$NH=3.3$ cm.

(1) 写出其他对应边及对应角；

(2) 求线段 NM 及线段 HG 的长度.

(第 4 题)

拓广探索

5. 如下页图，$\triangle ABC \cong \triangle DEC$，$CA$ 和 CD，CB 和 CE 是对应边. $\angle ACD$ 和 $\angle BCE$ 相等吗？为什么？[1]

80 第十八章 全等三角形

[1] 可提示学生：
$\angle ACD=\angle DCE-\angle ACE$，
$\angle BCE=\angle ACB-\angle ACE$.

（4）两个全等三角形中一对最长的边（或最大的角）是对应边（或角），一对最短的边（或最小的角）是对应边（或角）；等等.

5. 对应边、对应角，对边、对角容易混淆. 对应边、对应角是两个三角形的两条边之间或两个角之间的关系. 而对边、对角是一个三角形中边和角之间的关系，“对边”指与某个角相对的边，“对角”指与某条边相对的角. 教学中可结合图形向学生说明，让学生注意它们的区别.

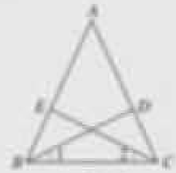
6. 教科书是用“完全重合”来定义全等三角形的，由这个定义可以推出全等三角形的性质：对应边相等、对应角相等.

习题 18.1

本节安排了 6 道习题. 第 1，2 题复习巩固对应边、对应角的概念. 第 3 题要用到全等三角形的性质. 第 4 题由 $NM=EF$ 可直接求出线段 NM 的长度；求线段 HG 的长度，则要先由

[1] 可提示学生：由图可知$\angle 1+\angle 2=(\angle ABC+\angle ACB)-(\angle ABD+\angle ACE)$，所以可以先分别求出$\angle ABC+\angle ACB$和$\angle ABD+\angle ACE$的度数.

（第5题）



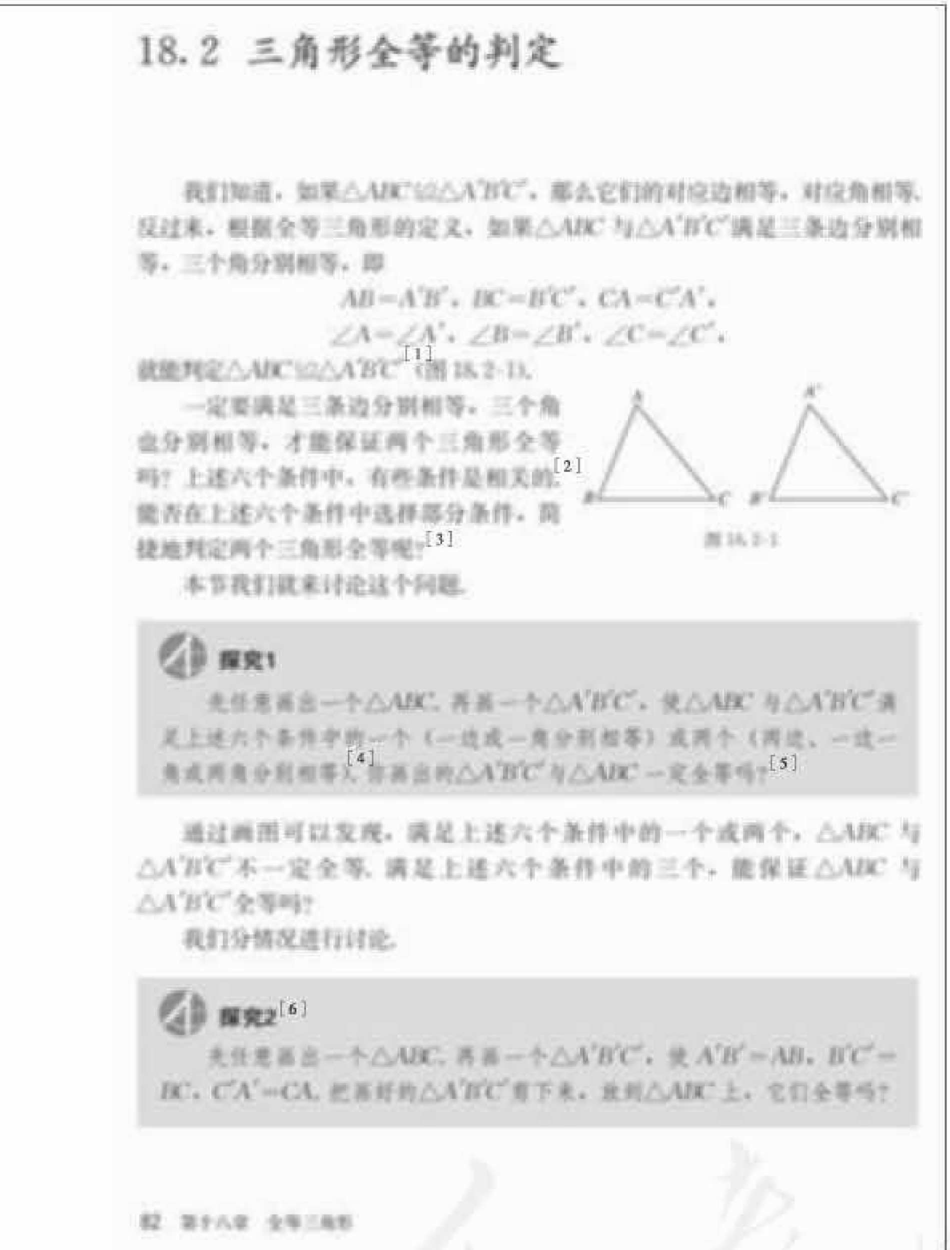
（第6题）

6. 如图，[illegible]，点 E 和点 D 是对应顶点.

(1) 写出它们的对应边和对应角；

(2) 若$\angle A=$[illegible]，$\angle ABD=$[illegible]，且$\angle 1=\angle 2$，求$\angle 1$的度数.[1]

$GE=HN$求出线段GE的长度，再由$HG=GE-EH$得到答案. 第5题要求学生能够发现$\angle ACD=\angle DCE-\angle ACE$，$\angle BCE=\angle ACB-\angle ACE$. 第6题则需要学生把$\angle 1+\angle 2$看成一个整体.



18.2 三角形全等的判定

我们知道，如果$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么它们的对应边相等，对应角相等。反过来，根据全等三角形的定义，如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足三条边分别相等，三个角分别相等，即

$$AB=A'B'，BC=B'C'，CA=C'A'，$$
$$\angle A=\angle A'，\angle B=\angle B'，\angle C=\angle C'，$$

就能判定$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$[1]（图18.2-1）。

图18.2-1

一定要满足三条边分别相等，三个角也分别相等，才能保证两个三角形全等吗？上述六个条件中，有些条件是相关的[2]。能否在上述六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等呢？[3]

本节我们就来讨论这个问题。

探究1

先任意画出一个$\triangle ABC$，再画一个$\triangle A'B'C'$，使$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足上述六个条件中的一个（一边或一角分别相等）或两个（两边、一边一角或两角分别相等）[4]。你画出的$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$一定全等吗？[5]

通过画图可以发现，满足上述六个条件中的一个或两个，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不一定全等。满足上述六个条件中的三个，能保证$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？

我们分情况进行讨论。

探究2[6]

先任意画出一个$\triangle ABC$，再画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$B'C'=BC$，$C'A'=CA$。把画好的$\triangle A'B'C'$剪下来，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

82 第十八章 全等三角形

[1] 类似于平行线的性质和判定的学习，可以让学生自己说出将全等三角形性质的条件和结论反过来会得到什么结论，并由全等三角形的定义说明结论的正确性。

[2] 例如只要全等三角形的两个对应角相等，就能由三角形内角和定理得到第三个对应角相等。

[3] 这个问题提出了本节探究的目标，即寻求判定两个三角形全等的简捷方法。

[4] 根据这个角是否为这条边的对角，一边一角分别相等又分为两种情况。

[5] 当$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$满足六个条件中的一个或两个时，不一定全等。

[6] 教科书从“探究2”开始探讨满足六个条件中的三个是否能保证两个三角形全等，“探究2”探讨的是满足三条边分别相等的情形。

1. 本节的主要内容是探索判定三角形全等的条件，以及利用三角形全等进行简单的证明。

2. 为了让学生经历一个完整的探索三角形全等条件的过程，教科书按照下面的思路进行编排。

首先，在探究之前引导学生明确探究的方向。先提出问题“一定要满足三条边分别相等，三个角也分别相等，才能保证两个三角形全等吗?”接着指出三角形的边角之间存在相关关系，再问“能否在上述六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等呢?”通过这些引导让学生明确探究的方向是寻求使三角形全等的简捷条件。

接着，通过“探究1”让学生从满足上述六个条件中的一个或两个入手，探究在这样的情形下能否保证两个三角形全等。

然后，从“探究2”开始，让学生探究满足上述六个条件中的三个能否保证两个三角形全等，并对三个条件的情形逐一设置栏目或例题讨论，具体为：

（1）探究2：三边分别相等；

[1] 在画图时，两弧在直线 $B'C'$ 的另一侧还有一个交点，因此按已知条件可画出两个三角形，这两个三角形都与 $\triangle ABC$ 完全重合.

[2] 可以先让学生回忆三角形具有稳定性的含义，再让他们用 SSS 的结论进行解释.

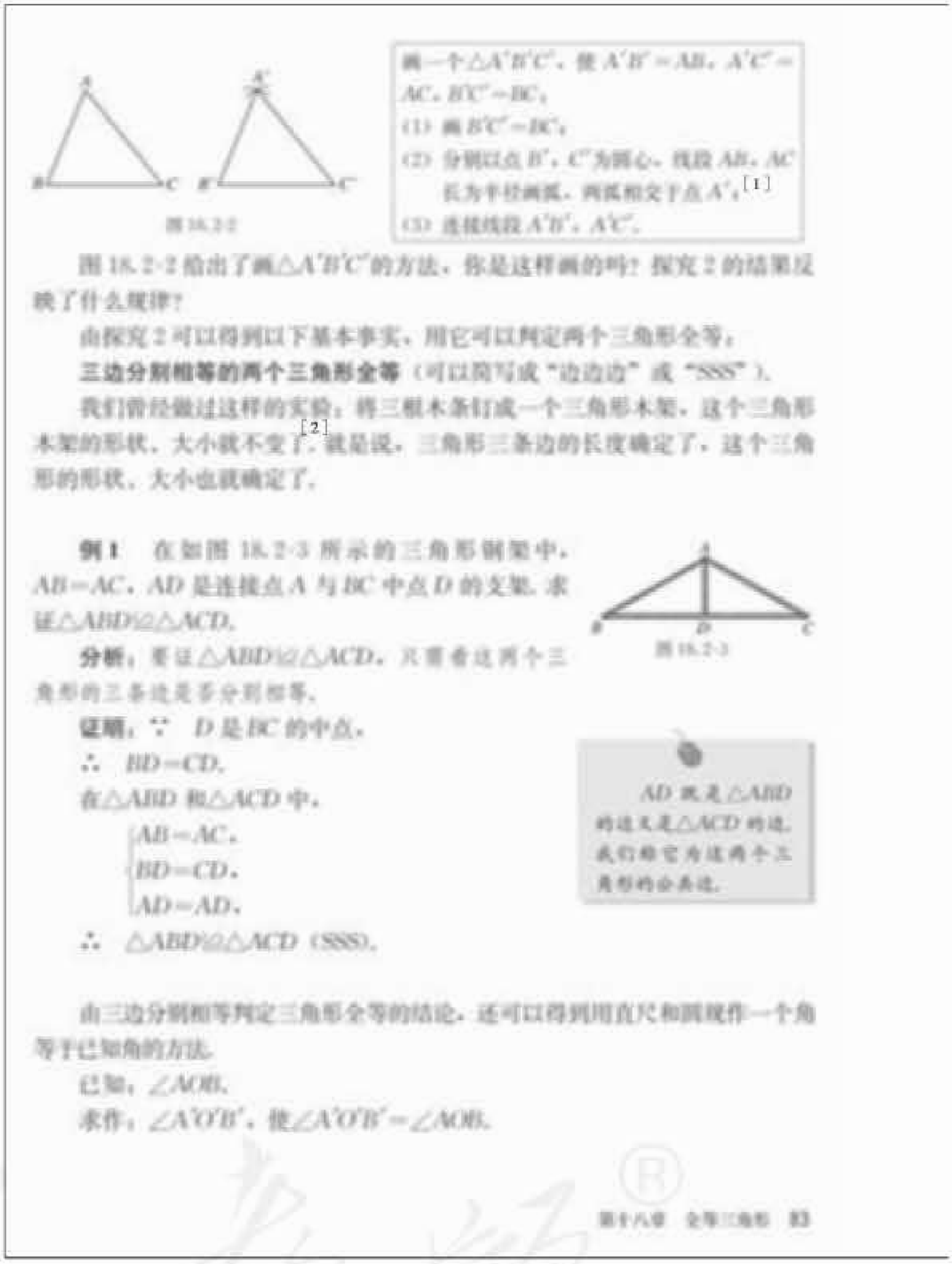


图 18.2-2

画一个 $\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$B'C'=BC$：

(1) 画 $B'C'=BC$；

(2) 分别以点 B'，C' 为圆心，线段 AB，AC 长为半径画弧，两弧相交于点 A'；[1]

(3) 连接线段 $A'B'$，$A'C'$.

图 18.2-2 给出了画 $\triangle A'B'C'$ 的方法，你是这样画的吗？探究 2 的结果反映了什么规律？

由探究 2 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）.

我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了.[2] 就是说，三角形三条边的长度确定了，这个三角形的形状、大小也就确定了.

例 1 在如图 18.2-3 所示的三角形钢架中，$AB=AC$，AD 是连接点 A 与 BC 中点 D 的支架. 求证 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

图 18.2-3

分析：要证 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，只需看这两个三角形的三条边是否分别相等.

证明：$\because$ D 是 BC 的中点，

$\therefore$ $BD=CD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (SSS).

AD 既是 $\triangle ABD$ 的边又是 $\triangle ACD$ 的边，我们称它为这两个三角形的公共边.

由三边分别相等判定三角形全等的结论，还可以得到用直尺和圆规作一个角等于已知角的方法.

已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle A'O'B'$，使 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

第十八章 全等三角形 83

(2) 两边和一角分别相等，包括：

探究 3：两边和它们的夹角分别相等，

第 86 页“思考”：两边和其中一边的对角分别相等；

(3) 两角和一边分别相等，包括：

探究 4：两角和它们的夹边分别相等，

例 4：两角和其中一角的对边分别相等；

(4) 第 88 页“思考”：三角分别相等.

最后，通过“探究 5”，让学生探究判定两个直角三角形全等的特殊方法.

3. 为了让学生探究三边分别相等的两个三角形是否全等，“探究 2”设计了一个作图实验的过程：先任意画出一个三角形，再画出一个三角形，使两个三角形的三边分别相等，然后比较两个三角形，看它们是否能够完全重合. 在“探究 2”之后，教科书将“边边边”作为基本事实直接提出来. 为了让学生充分相信这一事实，教学中需让学生充分经历上述探究过程.

图 18.2-4

作法：(1) 如图 18.2-4，以点 O 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 OA，OB 于点 C，D；

(2) 画一条射线 $O'A'$，以点 O' 为圆心，OC 长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C'；

(3) 以点 C' 为圆心，CD 长为半径画弧，与第 2 步中所画的弧相交于点 D'；

(4) 过点 D' 画射线 $O'B'$，则 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

想一想，为什么这样作出的 $\angle A'O'B'$ 和 $\angle AOB$ 是相等的？[1]

练习

1. 如图，C 是 AB 的中点，$AD=CE$，$CD=BE$．求证 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.

(第 1 题)　(第 2 题)

2. 工人师傅常用角尺平分一个任意角．做法如下：如图，$\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA，OB 上分别取 $OM=ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与点 M，N 重合．过角尺顶点 C 的射线 OC 便是 $\angle AOB$ 的平分线．为什么？

探究 3[2]

先任意画出一个 $\triangle ABC$，再画出一个 $\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$（即两边和它们的夹角分别相等）．把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下来，放到 $\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

34　第十八章　全等三角形

[1] 由作法可知 $OC=O'C'$，$OD=O'D'$，$CD=C'D'$，根据"边边边"可知 $\triangle COD \cong \triangle C'O'D'$，所以 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

练习答案

1. 证明：

$\because$ C 是 AB 的中点，

$\therefore$ $AC=CB$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\begin{cases} AC=CB, \\ AD=CE, \\ CD=BE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ (SSS).

2. 在 $\triangle CMO$ 和 $\triangle CNO$ 中，

$$\begin{cases} OM=ON, \\ CM=CN, \\ CO=CO, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle CMO \cong \triangle CNO$ (SSS).

$\therefore \angle COM=\angle CON$.

[2] "探究 3"继续探讨满足六个条件中的三个是否能保证两个三角形全等，这里探究的是满足两条边和一个角分别相等的情形中的两边和它们的夹角分别相等的情形.

"探究 2"中画第二个三角形相当于已知三边画三角形，这是一种重要的作图，在几何中用途很多．教科书采用的画法是尺规作图法，利用了作一条线段等于已知线段的基本作图．在作出一边 $B'C'$ 后，就有了三角形的两个顶点 B'，C'，关键是确定第三个顶点 A'．这个顶点在以 B' 为圆心，AB 为半径，以 C' 为圆心，AC 为半径的圆上，也就是两个圆的交点．作图时，让学生只画出两段弧就可以了.

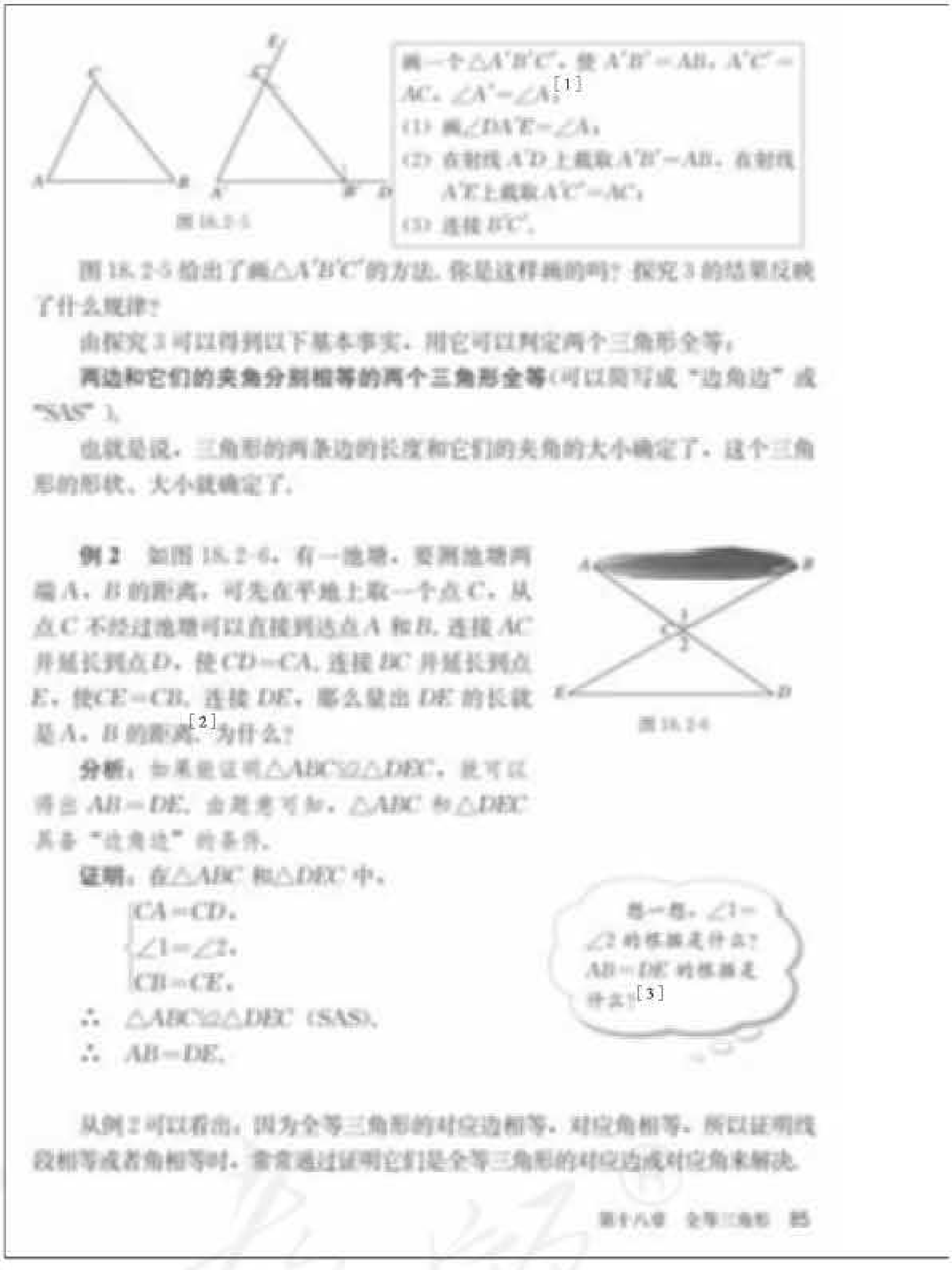
4. 教科书设置例 1 的目的是让学生应用"边边边"证明两个三角形全等．这是学生第一次遇到全等问题的证明，教科书在"分析"中用分析法分析证明思路，在证明过程中用综合法演示证明格式．教学中要让学生注意体会、模仿.

例 1 的已知中没有直接给出三角形全等所需的三个条件，有的条件（$BD=CD$）需要根据已知去证明．现阶段例题、习题中常遇到的由已知推出全等条件的情况：有利用中点的定义或线

[1] 这个作法利用了作一个角等于已知角的基本作图.

[2] 这里要向学生交待清楚测量方法，并指出测量中所作的 $CD=CA$，$CE=CB$，以及 A，C，D 和 B，C，E 各成一条直线，都是已知条件，证明时可以利用它们.

[3] $\angle 1=\angle 2$ 的根据是对顶角相等，$AB=DE$ 的根据是全等三角形的对应边相等.



画一个 $\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$：[1]

(1) 画 $\angle DA'E=\angle A$；

(2) 在射线 $A'D$ 上截取 $A'B'=AB$，在射线 $A'E$ 上截取 $A'C'=AC$；

(3) 连接 $B'C'$.

图 18.2-5

图 18.2-5 给出了画 $\triangle A'B'C'$ 的方法. 你是这样画的吗？探究 3 的结果反映了什么规律？

由探究 3 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等（可以简写成"边角边"或"SAS"）.

也就是说，三角形的两条边的长度和它们的夹角的大小确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 2 如图 18.2-6，有一池塘，要测池塘两端 A，B 的距离，可先在平地上取一个点 C，从点 C 不经过池塘可以直接到达点 A 和 B. 连接 AC 并延长到点 D，使 $CD=CA$. 连接 BC 并延长到点 E，使 $CE=CB$. 连接 DE，那么量出 DE 的长就是 A，B 的距离.[2] 为什么？

图 18.2-6

分析：如果能证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$，就可以得出 $AB=DE$. 由题意可知，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 具备"边角边"的条件.

证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases} CA=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \\ CB=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ (SAS).

$\therefore$ $AB=DE$.

想一想，$\angle 1=\angle 2$ 的根据是什么？$AB=DE$ 的根据是什么？[3]

从例 2 可以看出，因为全等三角形的对应边相等，对应角相等，所以证明线段相等或者角相等时，常常通过证明它们是全等三角形的对应边或对应角来解决.

第十八章 全等三角形 85

段的和（差）证明线段相等，利用垂直的定义、角平分线的性质、三角形的内角和定理或角的和（差）证明角相等.

5. 作一个角等于已知角是《课程标准》要求的能用尺规完成的基本作图. 教学中只要求学生能作出图形，保留作图痕迹，并了解作图依据即可，不要求学生写出作法.

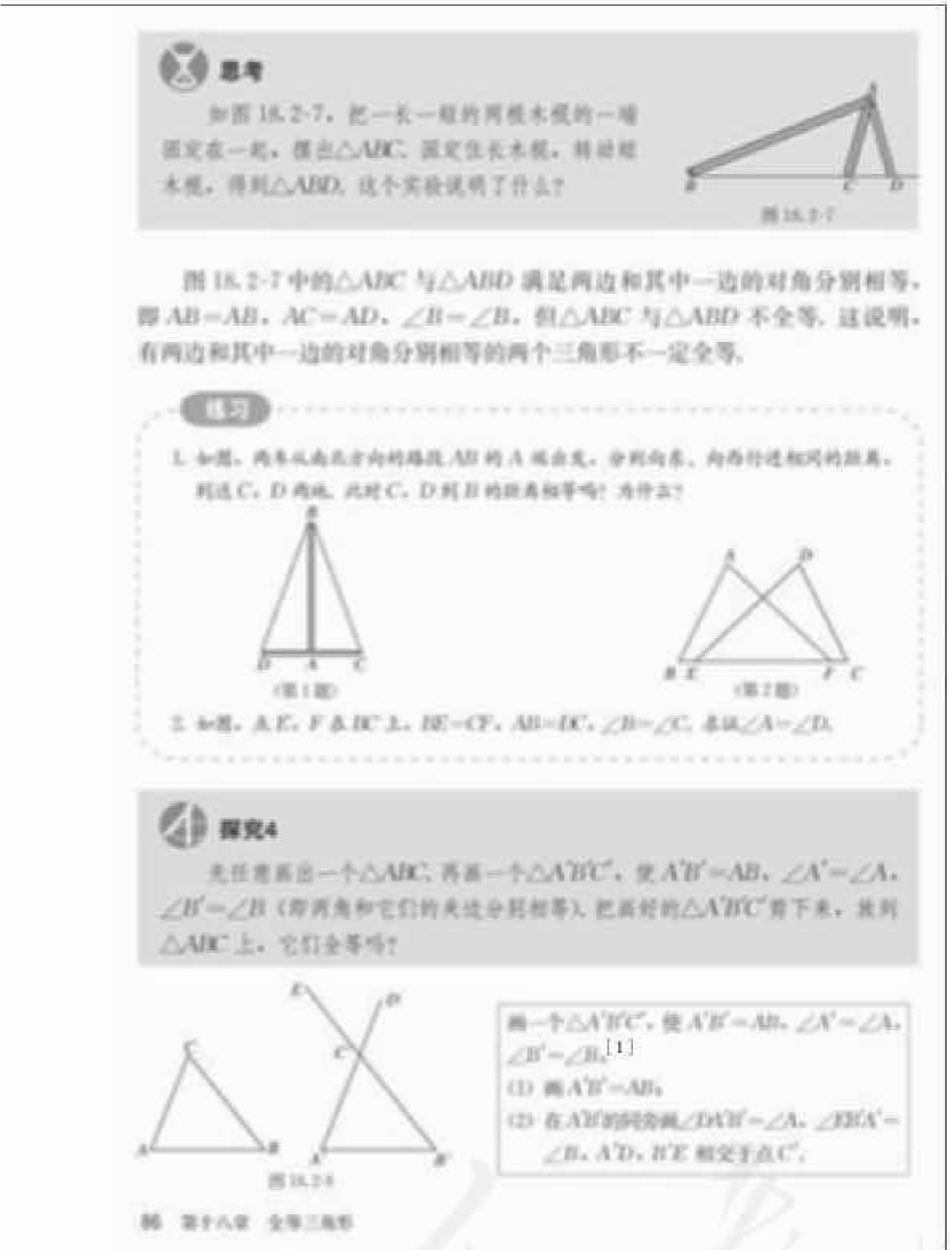
6. 教科书对"边角边"的处理与"边边边"类似，先通过"探究 3"的作图实验操作，让学生经历探究满足两边和它们的夹角分别相等的两个三角形是否全等的过程，然后在让学生总结探究出的规律后，直接以基本事实的方式给出"边角边"判定方法.

已知两边及其夹角作三角形除了教科书上的作法，也可以先画一边，然后画角，再画另一边：

(1) 作 $A'B'=AB$；

(2) 作 $\angle B'A'E=\angle A$；

(3) 在射线 $A'E$ 上截取 $A'C'=AC$；



思考

如图 18.2-7，把一长一短的两根木棍的一端固定在一起，摆出△ABC. 固定住长木棍，转动短木棍，得到△ABD. 这个实验说明了什么？

图 18.2-7

图 18.2-7 中的△ABC 与△ABD 满足两边和其中一边的对角分别相等，即 AB=AB，AC=AD，∠B=∠B，但△ABC 与△ABD 不全等. 这说明，有两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等.

练习

1. 如图，两车从南北方向的路段 AB 的 A 端出发，分别向东、向西行进相同的距离，到达 C，D 两地. 此时 C，D 到 B 的距离相等吗？为什么？

（第1题） （第2题）

2. 如图，点 E，F 在 BC 上，BE=CF，AB=DC，∠B=∠C. 求证∠A=∠D.

探究4

先任意画出一个△ABC，再画一个△A'B'C'，使 A'B'=AB，∠A'=∠A，∠B'=∠B（即两角和它们的夹边分别相等）. 把画好的△A'B'C'剪下来，放到△ABC 上，它们全等吗？

画一个△A'B'C'，使 A'B'=AB，∠A'=∠A，∠B'=∠B.[1]

(1) 画 A'B'=AB；

(2) 在 A'B'的同旁画∠DA'B'=∠A，∠EB'A'=∠B，A'D，B'E 相交于点 C'.

图 18.2-8

86 第十八章 全等三角形

练习答案

1. 相等. 证明如下.

在△ABC 和△ABD 中，

$$\begin{cases} AB=AB, \\ \angle BAC=\angle BAD, \\ AC=AD, \end{cases}$$

∴ △ABC ≌ △ABD (SAS).

∴ BC=BD.

2. 证明：∵ BE=CF，

∴ BE + EF = CF + EF，即 BF=CE.

在△ABF 和△DCE 中，

$$\begin{cases} AB=DC, \\ \angle B=\angle C, \\ BF=CE, \end{cases}$$

∴ △ABF ≌ △DCE (SAS).

∴∠A=∠D.

[1] 这个作法利用了作一条线段等于已知线段、作一个角等于已知角的基本作图.

(4) 连接 $B'C'$.

7. 例 2 从实际背景中引申出几何问题——证明两条线段相等. 可以引导学生观察并思考，要证的两条线段是两个三角形中的两条边，如果能证明两个三角形全等，那么在这两条线段是全等三角形的对应边的情况下就得到了两条线段相等. 因此，教科书设置例 2 有两个目的，一是为学生提供应用“边角边”的机会，二是让学生认识到，今后遇到证明线段相等或角相等的问题，可以尝试先判定两个三角形全等，再利用其对应边相等或对应角相等解决问题.

8. 教科书接下来设置了一个“思考”栏目，用做实验的方式探讨满足两条边和其中一条边的对角分别相等，能否保证两个三角形全等的问题. 教学中也可以画出如图 18.2-7 的图形，让学生直观地发现结论. 这个过程也再次让学生体会到要判断一个命题是假命题，只要举出一个反例.

9. 教科书对“角边角”判定方法的处理与

[1] $\angle A$ 既是$\triangle ACD$的角，又是$\triangle ABE$的角，因此是两个三角形的公共角. 这也说明，在证明两个三角形全等时，公共角和公共边一样可作为已知条件使用.

图 18.2-8 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 4 的结果反映了什么规律？

由探究 4 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）.

也就是说，三角形的两个角的大小和它们的夹边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 3 如图 18.2-9，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$. 求证 $AD=AE$.

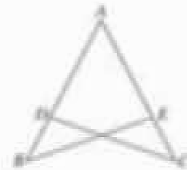


图 18.2-9

分析：证明$\triangle ACD \cong \triangle ABE$，就可以得出$AD=AE$.

证明：在$\triangle ACD$和$\triangle ABE$中，

$$\begin{cases} \angle A=\angle A \text{（公共角）}, \\ AC=AB, \\ \angle C=\angle B, \end{cases}$$ [1]

∴ $\triangle ACD \cong \triangle ABE$（ASA）.

∴ $AD=AE$.

例 4 如图 18.2-10，在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$. 求证$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

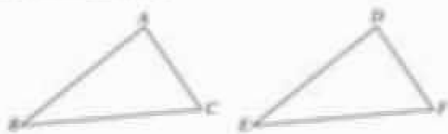


图 18.2-10

分析：如果能证明$\angle C=\angle F$，就可以利用“角边角”证明$\triangle ABC$和$\triangle DEF$全等. 由三角形内角和定理可以证明$\angle C=\angle F$.

证明：在$\triangle ABC$中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

∴ $\angle C=180°-\angle A-\angle B$.

同理 $\angle F=180°-\angle D-\angle E$.

又 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，

∴ $\angle C=\angle F$.

第十八章 全等三角形 87

“边边边”“边角边”判定方法类似，即先通过“探究 4”中的作图实验操作，让学生经历探究过程，然后在让学生总结探究出的规律后，直接以基本事实的方式给出“角边角”判定方法.

10. 在得到“角边角”之后，教科书设置了例 3 和例 4. 设置例 3 的目的是给学生应用“角边角”解决问题做出示范，而且例 3 与例 2 类似，都是通过证明全等三角形的对应边相等来证明线段相等的. 而设置例 4 则主要是为了得到全等三角形的“角角边”判定方法.

与其他判定方法先由作图实验探究，再由基本事实给出的方式不同，教科书用“角边角”来证明“角角边”的正确性. 首先，例 4 的题干提出了问题，即已知两个三角形的两角分别相等且其中一组等角的对边相等，求证这两个三角形全等. 接着，教科书在“分析”中指出要用“角边角”证明，需要知道两个三角形的第三对角相等，而这可以利用三角形内角和定理证明. 例


在△ABC 和△DEF 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ BC=EF,\\ \angle C=\angle F,\end{cases}$$

∴ △ABC≌△DEF(ASA).

因此，我们可以得到下面的结论：

两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

也就是说，三角形的两个角的大小和其中一个角的对边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

思考

三个角分别相等的两个三角形全等吗？解答上述问题后，把三角形全等的判定方法做一个小结.

练习

1. 如图，AB⊥BC，AD⊥DC，垂足分别为 B，D，∠1=∠2. 求证 AB=AD.

（第1题）　（第2题）

2. 如图，要测量池塘两岸相对的两点 A，B 的距离，可以在池塘外取 AB 的垂线 BF 上的两点 C，D，使 BC=CD，再画出 BF 的垂线 DE，使 E 与 A，C 在一条直线上，这时测得 DE 的长就是 AB 的长. 为什么？

思考

对于两个直角三角形，除了直角相等的条件，还要满足几个条件，这两个直角三角形就全等了？

练习答案

1. 证明：∵ $AB\perp BC$，$AD\perp DC$，

∴ $\angle B=\angle D=90^\circ$.

在△ABC 和△ADC 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ \angle 1=\angle 2,\\ AC=AC,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (AAS).

∴ $AB=AD$.

2. 证明：∵ $AB\perp BF$，$DE\perp BF$，

∴ $\angle B=\angle EDC=90^\circ$.

在△ABC 和△EDC 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ BC=DC,\\ \angle ACB=\angle ECD,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle EDC$ (ASA).

∴ $AB=ED$.

4 说明“角角边”是“角边角”的推论.

11. 至此，判定两个三角形全等的“三个条件”中就剩下三角分别相等的条件了. 由于这个情形容易举出反例说明，教科书在接下来的“思考”栏目中提出了问题. 教学中可让学生自己画出两个三角分别相等但不全等的三角形. 例如，图 1 中 $DE\parallel BC$，于是 $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，又 $\angle A=\angle A$，但显然 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 大小不同.

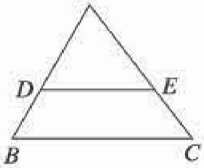


图 1

在这个“思考”栏目中，教科书还让学生在解答上述问题后，把三角形全等的判定方法做一个总结. 学生应该能够总结出运用“边边边”“边角边”“角边角”“角角边”可以判定两个三角形全等，但已知两边及其中一边的对角分别相等，或已知三个角分别相等，不能得到两个三角形全等的结论.

[1] 与前面已知三边、两边及其夹角和两角及其夹边作三角形的作图不同，这里需使用量角器画 90° 角，因此不属于尺规作图. 学生在第 18.3 节学了作已知角的平分线的方法之后，就可以完成已知一直角边和斜边作直角三角形的尺规作图了.

[2] 在《课程标准》中，“斜边、直角边”条件是作为定理而不是基本事实要求的.

[3] H，L 分别是英文 Hypotenuse（斜边）和 Leg（直角边）的头一个字母.

由三角形全等的条件可知，对于两个直角三角形，满足一直角边及其相对（或相邻）的锐角分别相等，或斜边和一锐角分别相等，或两直角边分别相等，这两个直角三角形就全等了. 如果满足斜边和一条直角边分别相等，这两个直角三角形全等吗？

探究5

任意画出一个 Rt△ABC，使 $\angle C=90^\circ$. 再画一个 Rt△$A'B'C'$，使 $\angle C'=90^\circ$，$B'C'=BC$，$A'B'=AB$. 把画好的 Rt△$A'B'C'$ 剪下来，放到 Rt△ABC 上，它们全等吗？

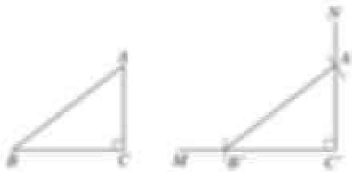


图 18.2-11

画一个 Rt△$A'B'C'$，使 $\angle C'=90^\circ$，$B'C'=BC$，$A'B'=AB$：

(1) 画 $\angle MC'N=90^\circ$；[1]

(2) 在射线 $C'M$ 上截取 $B'C'=BC$；

(3) 以点 B' 为圆心，AB 长为半径画弧，交射线 $C'N$ 于点 A'；

(4) 连接 $A'B'$.

图 18.2-11 给出了画 Rt△$A'B'C'$ 的方法. 你是这样画的吗？探究 5 的结果反映了什么规律？

由探究 5 可以得到判定两个直角三角形全等的一个方法：

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等[2]（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”[3]）.

例5 如图 18.2-12，$AC\perp BC$，$BD\perp AD$，垂足分别为 C，D，$AC=BD$. 求证 $BC=AD$.

证明：∵ $AC\perp BC$，$BD\perp AD$，

∴ $\angle C$ 与 $\angle D$ 都是直角.

在 Rt△ABC 和 Rt△BAD 中，

$$\begin{cases} AB=BA, \\ AC=BD, \end{cases}$$

∴ Rt△ABC ≌ Rt△BAD（HL）.

∴ $BC=AD$.

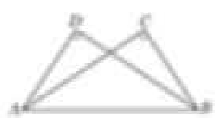


图 18.2-12

第十八章 全等三角形

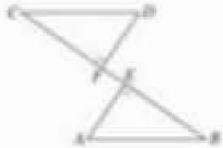
12. 在针对“角角边”设置了两个练习之后，教科书接下来安排了一个“思考”栏目，讨论直角三角形的判定方法. 两个直角三角形由于有了直角相等的特殊条件，在应用全等三角形的判定方法时会出现简化的情况. 因此教科书让学生总结“还要满足几个条件，这两个直角三角形就全等了”. 学生应该不难总结出只需找到另外两个条件就可以了，也就是满足一边一锐角分别相等，或两直角边分别相等的两个直角三角形是全等的.

13. 由于直角三角形是特殊的三角形，它还具备一般三角形所没有的特殊性质. 例如，对于一般三角形来说，已知两边和其中一边的对角分别相等，不能判定两个三角形全等. 而对于直角三角形来说，已知斜边和一条直角边分别相等，能够得到两个直角三角形全等的结论. 与前面几种判定方法的处理方式类似，教科书在“探究5”中安排了画图实验，让学生通过画一直角边和斜边分别相等的两个直角三角形并进行比较，

练习

1. 如图，C 是路段 AB 的中点，两人从 C 同时出发，以相同的速度分别沿两条直线行走，并同时到达 D，E 两地．$DA\perp AB$，$EB\perp AB$．D，E 到路段 AB 的距离相等吗？为什么？

（第1题）



（第2题）

2. 如图，$AB=CD$，$AE\perp BC$，$DF\perp BC$，垂足分别为 E，F，$CE=BF$．求证 $AE=DF$．

习题 18.2

复习巩固

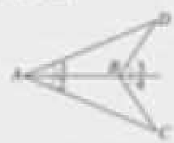
1. 如图，$AB=AD$，$CB=CD$．$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 全等吗？为什么？

（第1题）

（第2题）

2. 如图，$AB=AC$，$AD=AE$．求证 $\angle B=\angle C$．
3. 如图，把两根钢条的中点连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具（卡钳）[1]．在图中，要测量工件内槽宽 AB，只要测量哪些量？为什么？

（第3题）



（第4题）

练习答案

1. 相等．证明如下．
$\because DA\perp AB$，$EB\perp AB$，
$\therefore \angle A=\angle B=90^\circ$．
在 $Rt\triangle ACD$ 和 $Rt\triangle BCE$ 中，
$\begin{cases}AC=BC,\\CD=CE,\end{cases}$
$\therefore Rt\triangle ACD\cong Rt\triangle BCE$（HL）．
$\therefore AD=BE$．

2. 证明：$\because AE\perp BC$，$DF\perp BC$，
$\therefore \angle AEB=\angle DFC=90^\circ$．
$\because BF=CE$，
$\therefore BF-EF=CE-EF$，
$\therefore BE=CF$．
在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle DCF$ 中，
$\begin{cases}AB=DC,\\BE=CF,\end{cases}$
$\therefore Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle DCF$（HL）．
$\therefore AE=DF$．

[1] 卡钳是一种测量工具，工作原理是利用全等三角形对应边相等，把不能直接测量的物体“移”到可以直接测量的位置测量．

猜想结论，然后直接给出“斜边、直角边”的判定定理．

由于这是第一次涉及特殊三角形的特殊性，教学时可以提示学生注意这一点，为他们今后学习特殊三角形作准备．

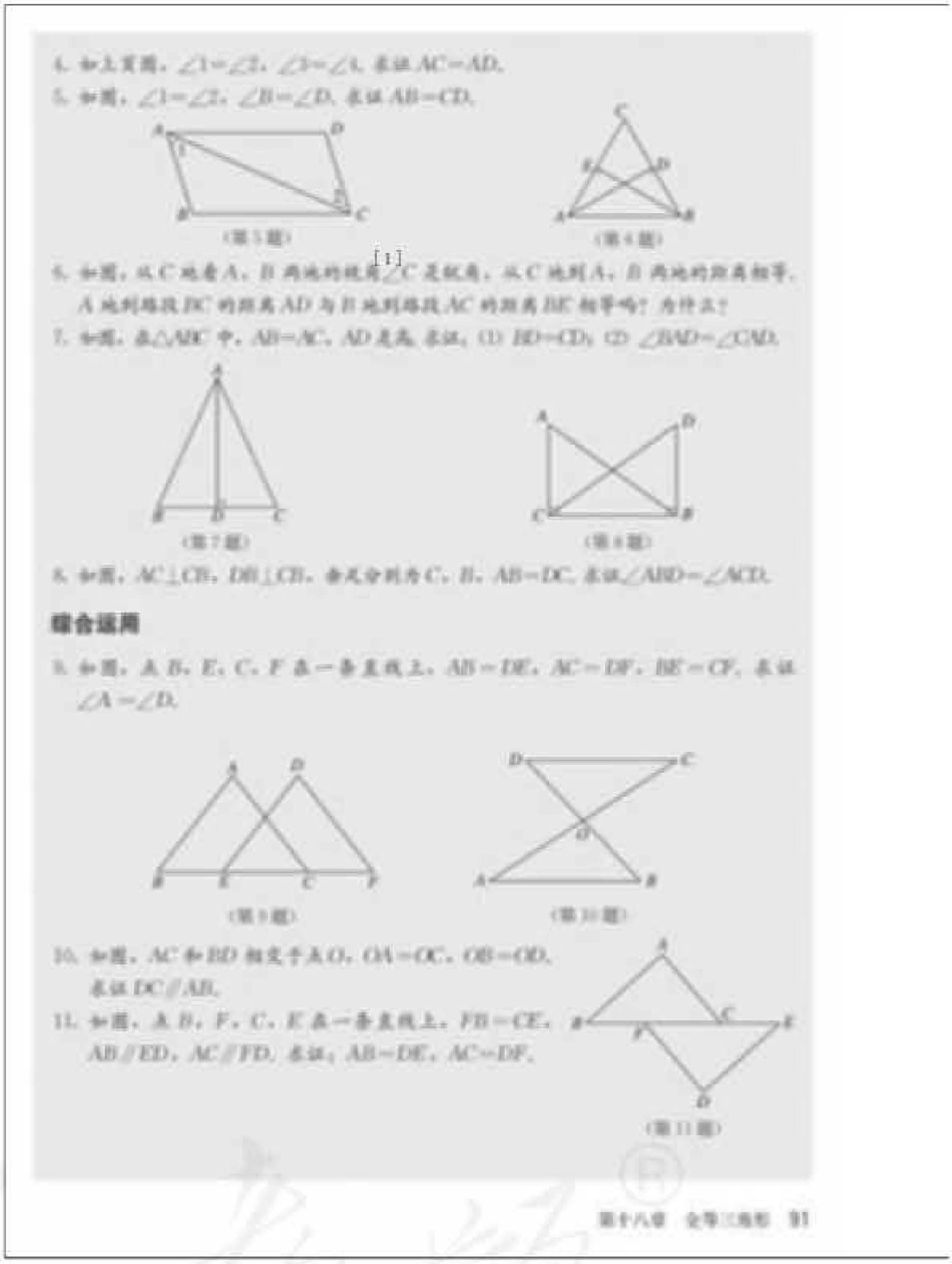
14．“探究5”后的例5的设置目的是为学生利用“斜边、直角边”证明三角形全等作出示范．与例2，例3类似，例5也是需将证明线段相等转化为证明全等三角形的对应边相等的题目．

习题 18.2

1．本节安排了13道习题．“复习巩固”的8道题是利用判定方法证明三角形全等或由三角形全等得到线段相等或角相等的直接训练，判定三角形全等的条件在已知条件中几乎都是一目了然的．

2．“综合运用”的3道题中增加了线段的“等量加等量和相等”，平行线与相应角相等的转

[1] 这里的视角指的是从 A，B 两地引出的光线在位于 C 地的人眼处所成的夹角，可以抽象为图中的 $\angle C$.



4. 如上页图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证 $AC=AD$.

5. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle B=\angle D$. 求证 $AB=CD$.

（第 5 题）

（第 6 题）

6. 如图，从 C 地看 A，B 两地的视角[1] $\angle C$ 是锐角，从 C 地到 A，B 两地的距离相等. A 地到路段 BC 的距离 AD 与 B 地到路段 AC 的距离 BE 相等吗？为什么？

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是高. 求证：(1) $BD=CD$；(2) $\angle BAD=\angle CAD$.

（第 7 题）

（第 8 题）

8. 如图，$AC\perp CB$，$DB\perp CB$，垂足分别为 C，B，$AB=DC$. 求证 $\angle ABD=\angle ACD$.

综合运用

9. 如图，点 B，E，C，F 在一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证 $\angle A=\angle D$.

（第 9 题）

（第 10 题）

10. 如图，AC 和 BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 求证 $DC\parallel AB$.

11. 如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，$FB=CE$，$AB\parallel ED$，$AC\parallel FD$. 求证：$AB=DE$，$AC=DF$.

（第 11 题）

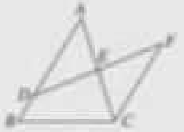
第十八章 全等三角形 91

化等知识的运用.

3. “拓广探索”的第 12 题中，为了证明线段相等需要证明哪两个三角形全等不是一目了然的，证明三角形全等需要的条件也要转化. 第 13 题中要找到图中所有的全等三角形，必须充分利用已知条件，包括公共边，还需要由已证的全等三角形推出相等关系.

拓广探索

12. 如图，D 是 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，$DE=FE$，$FC\parallel AB$，AE 与 CE 有什么关系？证明你的结论。



（第12题）

（第13题）

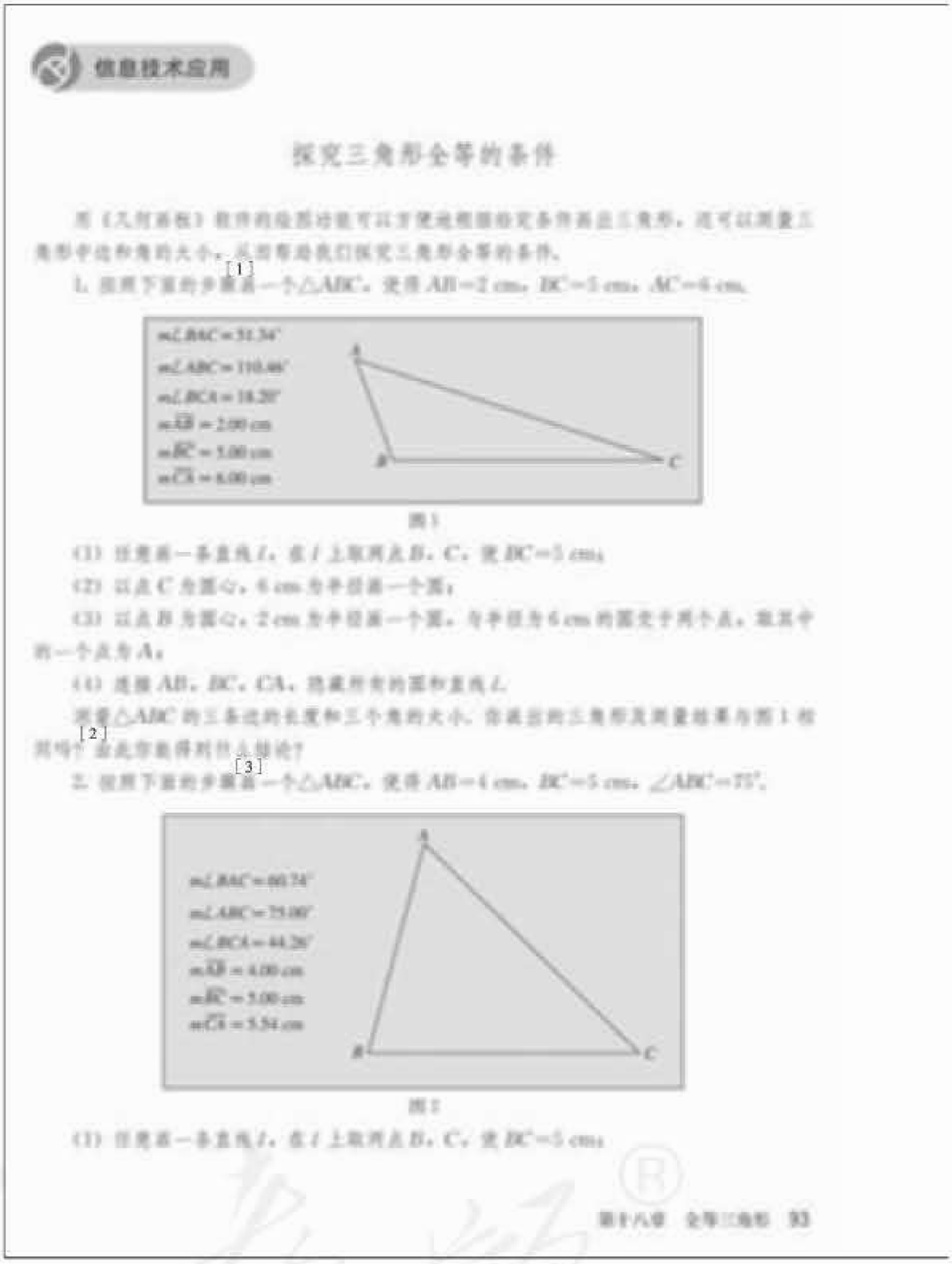
13. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，点 E 在 AD 上。找出图中的全等三角形，并证明它们全等。[1]

［1］本题设计的目的是让学生先猜想结论，然后证明，这是数学中常用的方法.

［1］这个画三角形的步骤与已知三边作三角形的尺规作图是类似的，只不过这里已知的是三边的长度.

［2］可以告诉学生，由于不同的计算机的精确度不同等原因，他们画出的三角形的测量结果可能与图1稍有不同.

［3］这个画三角形的步骤也与已知两边及其夹角作三角形的尺规作图类似，只不过这里已知的是两边的长度和夹角的度数.



信息技术应用

探究三角形全等的条件

用《几何画板》软件的绘图功能可以方便地根据给定条件画出三角形，还可以测量三角形中边和角的大小，从而帮助我们探究三角形全等的条件.

1. 按照下面的步骤[1]画一个△ABC，使得 AB=2 cm，BC=5 cm，AC=6 cm.

图1

(1) 任意画一条直线 l，在 l 上取两点 B，C，使 BC=5 cm；

(2) 以点 C 为圆心，6 cm 为半径画一个圆；

(3) 以点 B 为圆心，2 cm 为半径画一个圆，与半径为 6 cm 的圆交于两个点，取其中的一个点为 A；

(4) 连接 AB，BC，CA，隐藏所有的圆和直线 l.

测量△ABC 的三条边的长度和三个角的大小. 你画出的三角形及测量结果与图1相同吗？[2]由此你能得到什么结论？

2. 按照下面的步骤[3]画一个△ABC，使得 AB=4 cm，BC=5 cm，∠ABC=75°.

图2

(1) 任意画一条直线 l，在 l 上取两点 B，C，使 BC=5 cm；

第十八章　全等三角形　93

信息技术应用

这个栏目让学生用《几何画板》软件按照给定的条件画三角形，目的是让学生在动手操作的过程中加深理解哪些条件能决定三角形的形状和大小.

栏目中分别给出了用《几何画板》软件按照给定的三边长度、两边长度及其夹角大小和三个角大小画三角形的步骤. 学生可以按照这些步骤画三角形，也可以自己创造画三角形的办法，只要画出的三角形符合给定条件就可以. 教科书没有给出按“角边角”“角角边”“边边角”给定条件画三角形的步骤，需要学生在之前活动经验的基础上自己创造画法.

每按照一组条件画出三角形后，都要让学生用《几何画板》软件对画出的三角形进行测量，并将测量结果与教科书对照，或同学之间比较，然后让学生回答由此推断的结论.


(2) 连接 BC，以点 B 为中心，将 BC 逆时针旋转 $75°$，得到 BC'；

(3) 在 BC' 上取点 A，使 $AB=4$ cm；

(4) 连接 AB、CA，隐藏直线 l 和 BC'。

测量 $\triangle ABC$ 的三条边的长度和三个角的大小，你画出的三角形及测量结果与图 2 相同吗？由此你能得到什么结论？

3. 按照下面的步骤画一个 $\triangle ABC$，使得 $\angle A=45°$，$\angle B=75°$，$\angle C=60°$。

图 3

(1) 任意画一条直线 l，在 l 上任意取两点 B，C，连接 BC；

(2) 以点 B 为中心，将 BC 逆时针旋转 $75°$，得到 BC''；

(3) 以点 C 为中心，将 BC 顺时针旋转 $60°$，得到 CB'；

(4) 记 BC'' 与 CB' 的交点为 A，连接 AB、CA，隐藏直线 l 和 BC''、CB'。

测量 $\triangle ABC$ 的三条边的长度和三个角的大小，你画出的三角形及测量结果与图 3 相同吗？由此你能得到什么结论？

4. 分别按“角边角”“角角边”和“边边角”的条件画几个三角形，每组三角形全等吗？请你总结一下判定三角形全等的条件。

最后，可以让学生按照活动目的、活动过程、活动结论等项目对整个活动作一个总结，还可以让学生讨论其他可能的用《几何画板》软件探究三角形全等条件的活动内容. 例如，在教科书第 94 页的图 3 中，在 AB 上任取一点 D，作 $DE /\!/ AC$，交 BC 于点 E. 测量 $\triangle BDE$ 三条边的长度和三个角的大小. 沿 AB 拖动点 D，观察 $\triangle BDE$ 的测量结果的变化，并由此推断结论.

18.3 角的平分线的性质

思考

图 18.3-1 是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$，$BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是这个角的平分线. 你能说明它的道理吗？[1]

图 18.3-1

这种平分角的方法告诉了我们一种作已知角的平分线的方法.

已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle AOB$ 的平分线.

作法：(1) 以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N.

(2) 分别以点 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长[2]为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部[3]相交于点 C.

(3) 画射线 OC. 射线 OC 即为所求（图 18.3-2）.

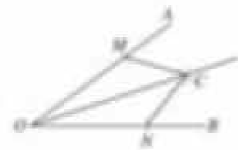


图 18.3-2

思考

如图 18.3-3，任意作一个角 $\angle AOB$，作出 $\angle AOB$ 的平分线 OC. 在 OC 上任取一点 P，过点 P 画出 OA，OB 的垂线，分别记垂足为 D，E，测量 PD，PE 并作比较，你得到什么结论？在 OC 上再取几个点试一试.

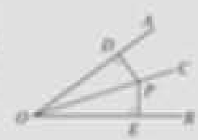


图 18.3-3

通过以上测量，你发现了角的平分线的什么性质？

第十八章 全等三角形 95

[1] 证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD, \\ BC=DC, \\ AC=AC, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS).

$\therefore$ $\angle BAC=\angle DAC$.

$\therefore$ AE 是 $\angle BAD$ 的平分线.

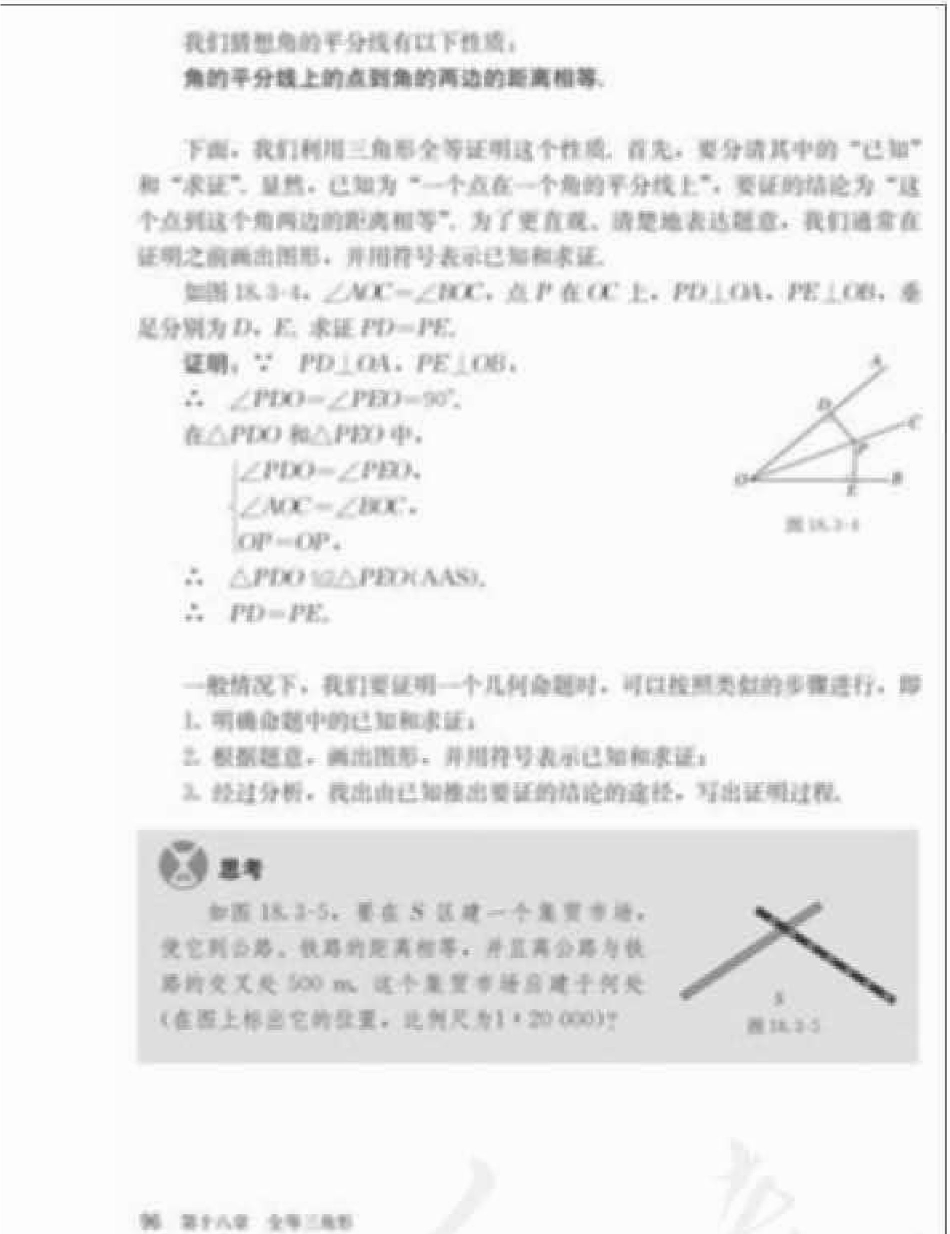
[2] 若用小于或等于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径，则两弧没有交点.

[3] 两弧应在角的内部相交的原因是所作射线为角的平分线.

1. 本节首先由一种平分角的仪器的工作原理引入了作一个角的平分线的尺规作图，而它们依据的都是全等三角形的“边边边”判定方法.

2. 教科书接下来设置了一个“思考”栏目，让学生通过作图、测量来猜想角的平分线的性质. 为了让学生准确地推断出角的平分线的性质的内容，并且确信他们推出的性质具有一般性，在学生作图时要强调几点：(1) 所作的角应为任意大小的；(2) 在角的平分线上取的点应是任意位置的；(3) 过角的平分线上一点向角的两边所作的与两边相交的线段必须是垂线. 同时，这个先操作再提出猜想的过程也为学生接下来证明性质时分清其中的“已知”和“求证”作了铺垫.

3. 教科书利用三角形全等证明了角的平分线的性质，这个性质是以文字叙述的命题的形式给出的. 教科书在完成证明的同时，给出了如何证明一个几何命题的示范. 首先，明确角的平分线的性质中的题设（已知）和结论（求证）；其次，



我们猜想角的平分线有以下性质：

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

下面，我们利用三角形全等证明这个性质. 首先，要分清其中的“已知”和“求证”. 显然，已知为“一个点在一个角的平分线上”，要证的结论为“这个点到这个角两边的距离相等”. 为了更直观、清楚地表达题意，我们通常在证明之前画出图形，并用符号表示已知和求证.

如图 18.3-4，$\angle AOC=\angle BOC$，点 P 在 OC 上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为 D，E. 求证 $PD=PE$.

证明：∵ $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

∴ $\angle PDO=\angle PEO=90°$.

在△PDO 和△PEO 中，

$$\begin{cases}\angle PDO=\angle PEO,\\ \angle AOC=\angle BOC,\\ OP=OP,\end{cases}$$

∴ $\triangle PDO\cong\triangle PEO$(AAS).

∴ $PD=PE$.

图 18.3-4

一般情况下，我们要证明一个几何命题时，可以按照类似的步骤进行，即

1. 明确命题中的已知和求证；
2. 根据题意，画出图形，并用符号表示已知和求证；
3. 经过分析，找出由已知推出要证的结论的途径，写出证明过程.

思考

如图 18.3-5，要在 S 区建一个集贸市场，使它到公路、铁路的距离相等，并且离公路与铁路的交叉处 500 m. 这个集贸市场应建于何处（在图上标出它的位置，比例尺为1∶20 000）？

图 18.3-5

96 第十八章 全等三角形

画出图形表达角的平分线的性质，并用数学符号表示题设和结论；最后，写出证明过程. 在完成证明之后，教科书还总结了证明几何命题的一般步骤.

4. 为了得到角的平分线的性质的逆定理，教科书在接下来的“思考”栏目中提出了一个具有实际背景的问题——在公路和铁路的交叉区域内建一个集贸市场，使这个市场到公路和铁路的距离相等，并且离公路与铁路的交叉处 500 m. 学习了角的平分线的性质，学生可能猜想到集贸市场应建在公路和铁路夹角的平分线上.

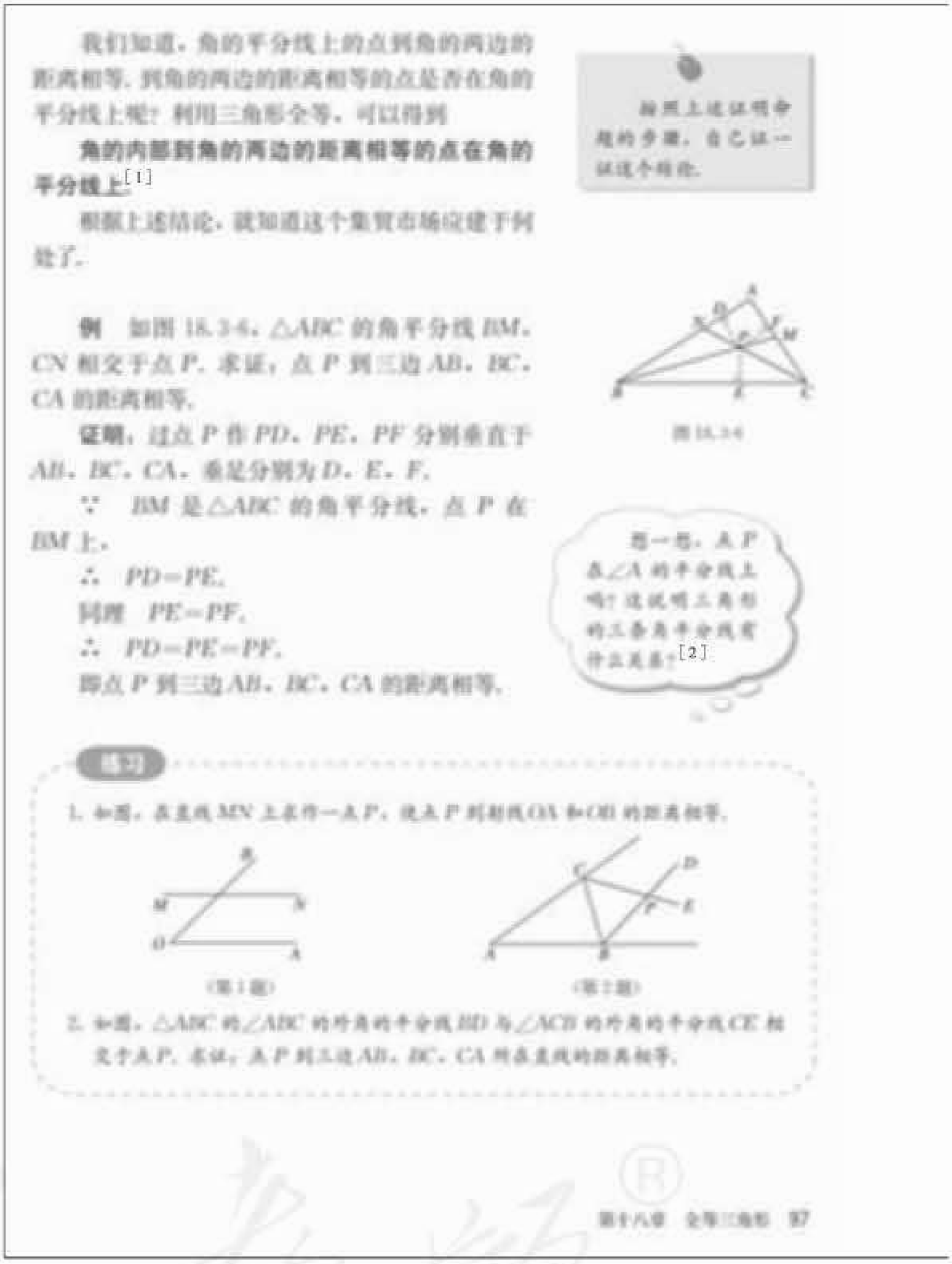
教科书没有立刻给出答案，而是从另一个角度引导——将角的平分线的性质的题设和结论交换位置，所得的结论是否仍然成立？这就引出了“角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”. 接着让学生利用三角形全等证明这个结论，学生在验证结论的同时也就回答了上述实际问题.

[1] 这个结论与角的平分线的性质是互逆定理．教学中不必向学生提出逆定理的概念，只要让学生认识到这两个定理的条件和结论是相反的就可以了．

[2] 由于点 P 在 $\angle A$ 的内部，而且 $PD=PF$，所以点 P 在 $\angle A$ 的平分线上．这说明三角形的三条角平分线交于一点．

练习答案

1. （图略）．提示：作 $\angle AOB$ 的平分线，它与直线 MN 的交点就是点 P．
2. 证明：过点 P 作 $PF\perp AB$，$PG\perp BC$，$PH\perp CA$，垂足分别为 F，G，H．
   ∵ 点 P 在 $\angle ABC$ 的外角的平分线上，
   ∴ $PF=PG$．
   ∵ 点 P 在 $\angle ACB$ 的外角的平分线上，
   ∴ $PG=PH$．
   ∴ $PF=PG=PH$．


我们知道，角的平分线上的点到角的两边的距离相等．到角的两边的距离相等的点是否在角的平分线上呢？利用三角形全等，可以得到

角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上．[1]

根据上述结论，就知道这个集贸市场应建于何处了．

请按照上述证明命题的步骤，自己证一证这个结论．

例 如图 18.3-6，$\triangle ABC$ 的角平分线 BM，CN 相交于点 P．求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 的距离相等．

图 18.3-6

证明： 过点 P 作 PD，PE，PF 分别垂直于 AB，BC，CA，垂足分别为 D，E，F．

∵ BM 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上，

∴ $PD=PE$．

同理 $PE=PF$．

∴ $PD=PE=PF$．

即点 P 到三边 AB，BC，CA 的距离相等．

想一想，点 P 在 $\angle A$ 的平分线上吗？这说明三角形的三条角平分线有什么关系？[2]

练习

1. 如图，在直线 MN 上求作一点 P，使点 P 到射线 OA 和 OB 的距离相等．

（第1题）　　（第2题）

2. 如图，$\triangle ABC$ 的 $\angle ABC$ 的外角的平分线 BD 与 $\angle ACB$ 的外角的平分线 CE 相交于点 P．求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 所在直线的距离相等．

第十八章　全等三角形　97

5. 对于角的平分线的性质定理的逆定理，可以让学生按照教科书第 96 页证明命题的一般步骤完成证明．例如，可按照下述方式证明．

如图 2，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别是 D，E，$PD=PE$．求证：点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上．

证明：经过点 P 作射线 OC．

∵ $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

∴ $\angle ODP=\angle OEP=90^\circ$．

在 Rt$\triangle ODP$ 和 Rt$\triangle OEP$ 中，

$$\begin{cases} OP=OP, \\ PD=PE, \end{cases}$$

∴ Rt$\triangle ODP\cong$ Rt$\triangle OEP$（HL）．

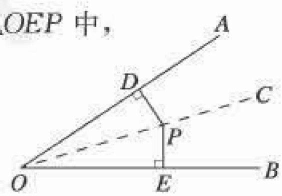
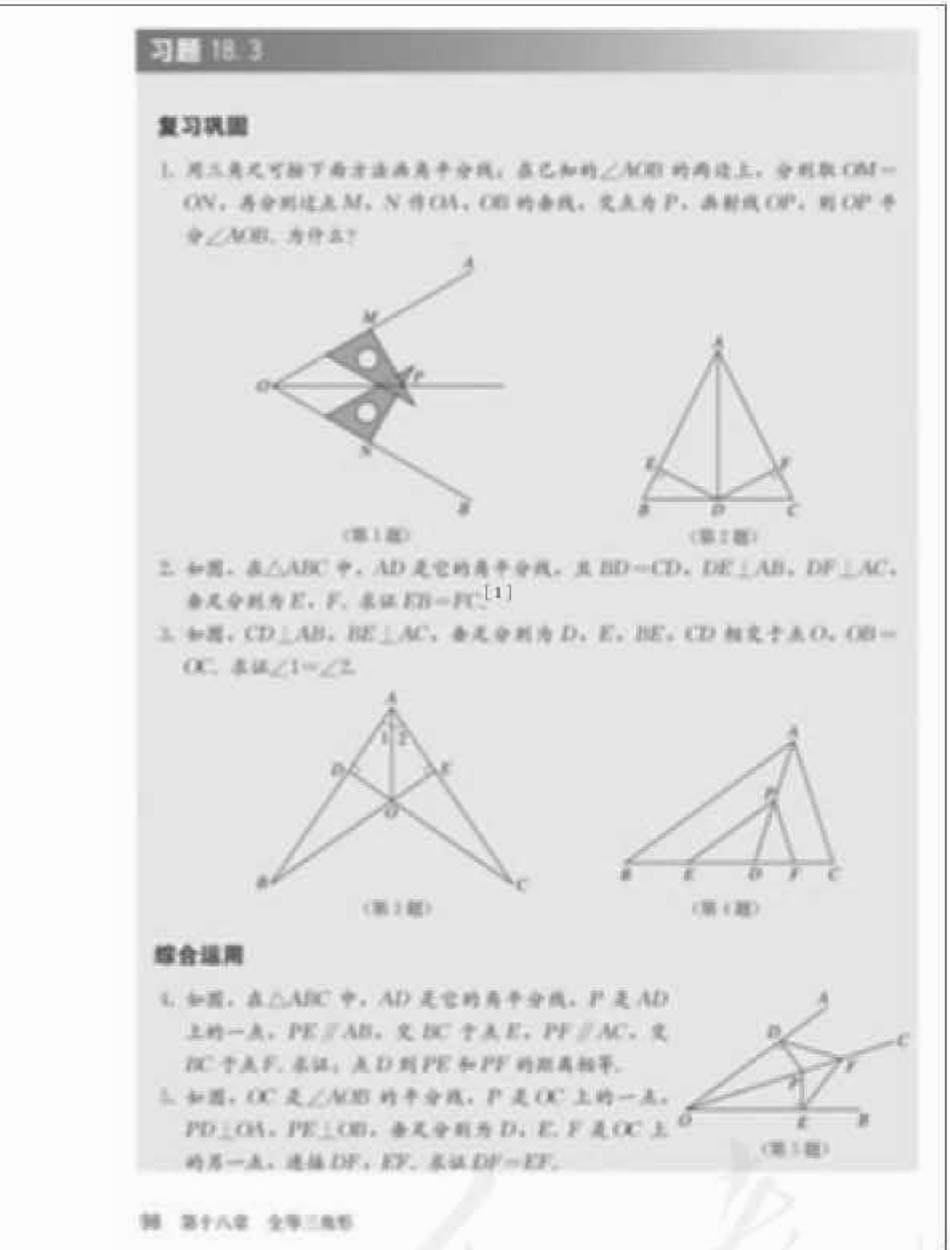


图 2

∴ $\angle AOC=\angle BOC$．

∴ OC 是 $\angle AOB$ 的平分线．

6. 教科书接下来安排的例题是为了给学生应用角的平分线的性质作出示范．当问题中涉及


习题 18.3

复习巩固

1. 用三角尺可按下面方法画角平分线：在已知的∠AOB的两边上，分别取OM=ON，再分别过点M，N作OA，OB的垂线，交点为P，画射线OP，则OP平分∠AOB. 为什么?

(第1题)　(第2题)

2. 如图，在△ABC中，AD是它的角平分线，且BD=CD，DE⊥AB，DF⊥AC，垂足分别为E，F. 求证EB=FC.[1]

3. 如图，CD⊥AB，BE⊥AC，垂足分别为D，E，BE，CD相交于点O，OB=OC. 求证∠1=∠2.

(第3题)　(第4题)

综合运用

4. 如图，在△ABC中，AD是它的角平分线，P是AD上的一点，PE∥AB，交BC于点E，PF∥AC，交BC于点F. 求证：点D到PE和PF的距离相等.

5. 如图，OC是∠AOB的平分线，P是OC上的一点，PD⊥OA，PE⊥OB，垂足分别为D，E. F是OC上的另一点，连接DF，EF. 求证DF=EF.

(第5题)

98　第十八章　全等三角形

[1] 学生可能会先证明$\triangle AED \cong \triangle AFD$，得$DE=DF$. 可提醒学生，这实际上是证明了一次角的平分线的性质，而这个性质现在可以直接应用了.

角的平分线时，就相当于已知一对线段（角的平分线上的点到角的两边的垂线段）相等，这也说明角的平分线的性质为证明线段相等提供了一种途径.

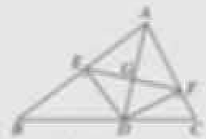
本道例题也证明了三角形的三条角平分线交于一点. 上一章学生学习三角形的角平分线时，让他们通过画图猜想过三条角平分线的特点，他们应该得到了三线交于一点的结论. 这里利用角的平分线的性质定理及其逆定理证明了猜想. 九年级上册中还将进一步说明这个交点的意义：它是三角形内切圆的圆心，叫做三角形的内心.

习题 18.3

1. 本节习题共安排了 7 道题目. 其中“复习巩固”的第 1 题和第 3 题都是要证明一个角被平分，只不过第 1 题要用三角形全等证明，而第 3 题先由三角形全等得到垂线段相等，再由角的平分线的性质定理的逆定理证明. 第 2 题要用三角形全等来证明线段相等，而全等的条件需要由角

拓广探索

6. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别是 E，F，连接 EF，EF 与 AD 相交于点 G. AD 与 EF 垂直吗？证明你的结论.



（第 6 题）

（第 7 题）

7. 如图，$\angle B=\angle C=90^\circ$，$E$ 是 BC 的中点，DE 平分 $\angle ADC$，求证：AE 是 $\angle DAB$ 的平分线.（提示：过点 E 作 $EF \perp AD$，垂足为 F.）

的平分线的性质补足.

2. “综合运用”的两道题综合了平行线和全等三角形的知识. 第 4 题利用平行线移动了两个角，从而把一个角被平分的状态移到一个新的位置. 第 5 题说明在角的平分线的性质的几何模型（教科书图 18.3-3）中，在角的平分线上另外任取一点，则这点与之前所作垂足（点 D，E）的连线相等.

3. “拓广探索”的第 6 题说明在角的平分线的性质的几何模型（教科书图 18.3-3）中，连接两垂足（点 D，E），所得线段与角的平分线垂直. 第 7 题中所作的辅助线既是过点 E 向 $\angle ADC$ 的一边所作的垂线段，又是过点 E 向 $\angle DAB$ 的一边所作的垂线段，因此可以利用 $\angle ADC$ 两边上的垂线段相等，推出 $\angle DAB$ 两边上的垂线段也相等.

教学活动

活动1

图1是两个根据全等形设计的图案. 仔细观察一下，每个图案中有哪些全等形？有哪些全等三角形？

注意一下你的身边，哪些是全等形？哪些是全等三角形？各找几个例子与同学交流.

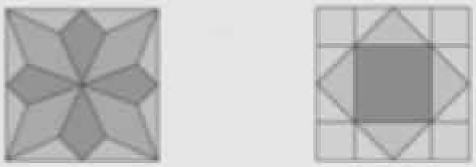


图1

活动2　用全等三角形研究“筝形”

如图2，四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$AB=CB$. 我们把这种两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”. 请你自己画一个筝形，用测量、折纸等方法猜想筝形的角、对角线有什么性质. 然后用全等三角形的知识证明你的猜想.

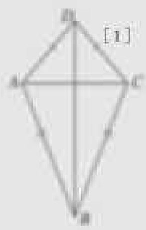


图2

100 第十八章 全等三角形

[1] 筝形是一种特殊的四边形，它具有轴对称性，有一组对角相等，对角线互相垂直，一条对角线平分另一条对角线等性质.

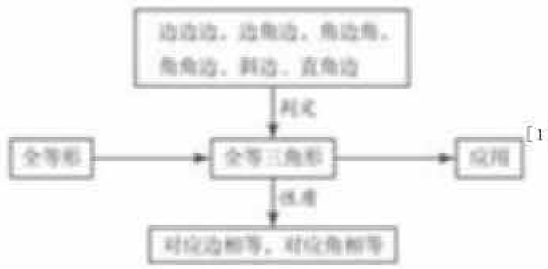
1. “活动1”的目的是让学生观察一些含有全等形的图案，并收集一些全等形的例子，以复习巩固全等形的概念. 教学中也可以让学生自己用全等形设计一些图案，与同学交流.

2. 到目前为止，学生已经有了研究相交线、平行线、三角形等平面图形的经验，又能利用三角形全等推出线段相等或角相等的结论，因此教科书设置了“活动2”，让学生独立研究一种图形（筝形）的性质. 教学中要让学生充分利用已有的研究图形的经验，例如，通过画图、测量、折纸等方法猜想图形可能的性质，通过推理论证证明图形的性质等.

[1] 这里的“应用”主要指全等三角形在推理论证中的应用. 本章也涉及了全等三角形在测量中的应用，但应告诉学生，利用全等三角形进行测量的方法在实际生活中并不常见，我们今后会学习在实际中应用更广泛的测量物体长度或高度的方法.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们学习了全等三角形的性质和判定方法. 如果两个三角形全等，那么它们的对应元素（对应的边、角等）都相等，这就是全等三角形的性质；判定三角形全等的条件是“边边边”“边角边”“角边角”或“角角边”，而对于直角三角形的全等，还可以用“斜边、直角边”来判定.

用全等三角形的定义判定三角形全等，需要六个条件. 通过画图找规律、推理论证等方法，我们减少条件，找到了更简便的判定方法. 由此看出，实验操作和推理论证都能帮助我们获得新的结论.

利用全等三角形知识，通过推理论证，我们得到了角的平分线的性质. 今后遇到证明线段相等或角相等的问题，可以尝试先判定两个三角形全等，再利用其对应边相等或对应角相等解决问题.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 你能举一些实际生活中全等形的例子吗?

2. 全等三角形有什么性质?

3. 从三角形的三条边分别相等、三个角分别相等中任选三个作为条件来判定两个三角形是否全等时，哪些是能够判定的? 两个直角三角形全等的条件是什么?

4. 学习本章后，你对角的平分线有了哪些新的认识? 你能用全等三角形证明角的平分线的性质吗?

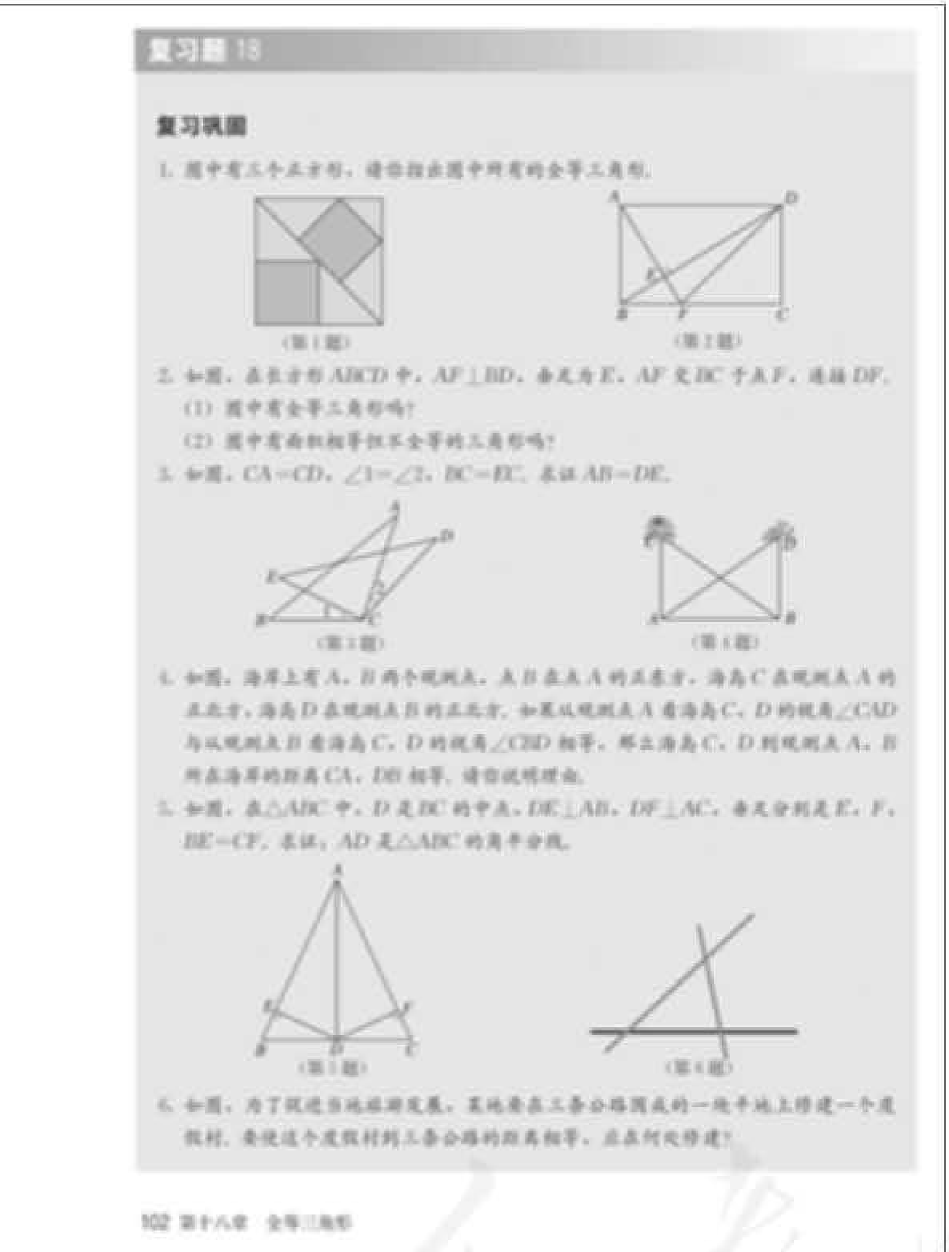
5. 你能举例说明证明一个几何命题的一般过程吗?

第十八章　全等三角形　101

1. “本章知识结构图”说明本章研究的核心内容是全等三角形，它是一种特殊的全等形，在证明线段相等或角相等中有一定的应用. 另一方面，全等三角形具有“对应边相等，对应角相等”的性质，可以用“边边边”“边角边”“角边角”和“角角边”判定两个三角形全等，两个直角三角形全等还可以用“斜边、直角边”进行判定.

2. “回顾与思考”首先回顾了本章的主要内容——全等三角形的性质和判定方法，接着回顾了本章探索三角形全等条件的思路以及由此获得的启示，最后回顾了本章利用全等三角形证明的结论，以及全等三角形对于证明线段相等或角相等的作用.

“回顾与思考”中接下来提出的问题则是帮助学生全面复习本章的具体内容的，教学中只要让学生一一解答就可以了.


复习题 18

复习巩固

1. 图中有三个正方形，请你指出图中所有的全等三角形.

（第1题）　（第2题）

2. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AF \perp BD$，垂足为 E，AF 交 BC 于点 F，连接 DF.
   (1) 图中有全等三角形吗?
   (2) 图中有面积相等但不全等的三角形吗?
3. 如图，$CA=CD$，$\angle 1=\angle 2$，$BC=EC$. 求证 $AB=DE$.

（第3题）　（第4题）

4. 如图，海岸上有 A，B 两个观测点，点 B 在点 A 的正东方，海岛 C 在观测点 A 的正北方，海岛 D 在观测点 B 的正北方. 如果从观测点 A 看海岛 C，D 的视角 $\angle CAD$ 与从观测点 B 看海岛 C，D 的视角 $\angle CBD$ 相等，那么海岛 C，D 到观测点 A，B 所在海岸的距离 CA，DB 相等. 请你说明理由.
5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别是 E，F，$BE=CF$. 求证：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

（第5题）　（第6题）

6. 如图，为了促进当地旅游发展，某地要在三条公路围成的一块平地上修建一个度假村. 要使这个度假村到三条公路的距离相等，应在何处修建?

102 第十八章　全等三角形

复习题 18

1. 本章的复习题安排了 13 道题目. “复习巩固”的前两题考查学生对全等三角形的定义的理解. 第 3～6 题由已知和所求可以明显看出需用三角形全等或角的平分线的性质定理或逆定理解决问题.

2. “综合运用”的 5 道题在全等三角形的应用中，综合了速度、时间和路程的关系，平行线的性质和判定，同角的余角的关系，折纸对线段长度和角的大小的保持，三角形的中线等知识. 教学中可以帮助学生复习一下哪些知识是与线段相等或角相等有关的.

3. “拓广探索”的第 12 题需要学生先画出角平分线上的点到角的两边的垂线段，还要把这两条垂线段看成是三角形的高. 第 13 题让学生证明一个命题，教学中可以让学生按照教科书第 96 页证明几何命题的一般步骤完成证明.

综合运用

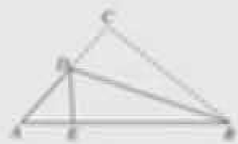
7. 如图，两车从路段 AB 的两端同时出发，沿平行路线以相同的速度行驶，相同时间后分别到达 C，D 两地. C，D 两地到路段 AB 的距离相等吗？为什么？

（第 7 题）

（第 8 题）

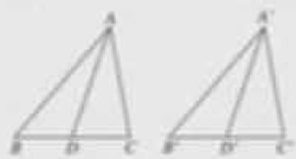
8. 如图，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证：$AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$.
9. 如图，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，$AD \perp CE$，$BE \perp CE$，垂足分别为 D，E，$AD=2.5$ cm，$DE=1.7$ cm. 求 BE 的长.

（第 9 题）

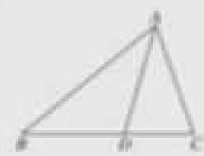


（第 10 题）

10. 如图的三角形纸片中，$AB=8$ cm，$BC=6$ cm，$AC=5$ cm. 沿过点 B 的直线折叠这个三角形，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，折痕为 BD. 求 $\triangle AED$ 的周长.
11. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 的对应边上的中线. AD 与 $A'D'$ 有什么关系？证明你的结论.



（第 11 题）



（第 12 题）

拓广探索

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是它的角平分线. 求证：$S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = AB : AC$.
13. 证明：如果两个三角形有两条边和其中一边上的中线分别相等，那么这两个三角形全等.

第十八章　全等三角形　103

Ⅲ 习题解答

习题 18.1

1. 其他对应边：AC 和 CA. 对应角：$\angle BAC$ 和 $\angle DCA$，$\angle B$ 和 $\angle D$，$\angle ACB$ 和 $\angle CAD$.

2. 其他对应边：AN 和 AM，BN 和 CM. 其他对应角：$\angle ANB$ 和 $\angle AMC$，$\angle BAN$ 和 $\angle CAM$.

3. $66°$. 由两个三角形全等，可知 $\angle 1$ 对边的边长为 a. 因为在左边的三角形中，边长为 a 的边对应的角为 $180°-54°-60°=66°$，所以 $\angle 1=66°$.

4. (1) 其他对应边：EG 和 NH，EF 和 NM. 其他对应角：$\angle E$ 和 $\angle N$，$\angle EGF$ 和 $\angle NHM$.

   (2) 由 $\triangle EFG \cong \triangle NMH$，得 $NM=EF=2.1$ cm，$EG=NH=3.3$ cm. 所以 $HG=EG-EH=2.2$ cm.

5. 相等. 因为 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$，所以 $\angle ACB=\angle DCE$. 由 $\angle ACB-\angle ACE=\angle DCE-\angle ACE$，可得 $\angle BCE=\angle ACD$.

6. (1) 对应边：AE 和 AD，AC 和 AB，EC 和 DB. 对应角：$\angle A$ 和 $\angle A$，$\angle AEC$ 和 $\angle ADB$，$\angle ACE$ 和 $\angle ABD$；

   (2) $26°$. 因为 $\triangle AEC \cong \triangle ADB$，所以 $\angle ACE=\angle ABD$. 又 $\angle 1=\angle 2$，所以 $2\angle 1+2\angle ABD+\angle A=180°$，故 $\angle 1=26°$.

习题 18.2

1. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD, \\ CB=CD, \\ AC=AC, \end{cases}$$

   $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS).

2. 提示：证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$.

3. 只要测量 $A'B'$. 提示：证明 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$.

4. 提示：证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

5. 提示：证明 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

6. 相等. 提示：证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$.

7. 提示：证明 $\mathrm{Rt}\triangle ABD \cong \mathrm{Rt}\triangle ACD$.

8. 提示：先证 $\mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle DCB$，可得 $\angle ABC=\angle DCB$，再证 $\angle ABD=\angle ACD$.

9. 提示：先证 $BC=EF$，再证 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

10. 提示：先证 $\triangle AOB \cong \triangle COD$，可得 $\angle A=\angle C$ 或 $\angle B=\angle D$.

11. 提示：先证 $\angle B=\angle E$，$\angle ACB=\angle DFE$，$BC=EF$，再证 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

12. 相等. 提示：先证 $\angle A=\angle FCE$，再证 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$.

13. 全等三角形：$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，$\triangle ABE \cong \triangle ACE$，$\triangle BED \cong \triangle CED$. 提示：由$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，可得$\angle BAD = \angle CAD$. 由$\triangle ABE \cong \triangle ACE$，可得 $BE = CE$.

习题 18.3

1. 提示：证明 $\mathrm{Rt}\triangle OMP \cong \mathrm{Rt}\triangle ONP$.
2. 提示：先证 $ED = FD$，再证 $\mathrm{Rt}\triangle BDE \cong \mathrm{Rt}\triangle CDF$.
3. 提示：先证$\triangle DBO \cong \triangle ECO$，可得 $OD = OE$.
4. 提示：证明$\angle EPD = \angle FPD$.
5. 提示：先证$\angle DPF = \angle EPF$，再证$\triangle PDF \cong \triangle PEF$.
6. 垂直. 提示：先证 $DE = DF$，$\angle EDG = \angle FDG$，再证$\triangle DEG \cong \triangle DFG$.
7. 提示：按照提示作辅助线，证明 $EF = EB$.

复习题 18

1. 提示：图中有三类全等三角形，每类各有两个.
2. (1) 有，$\triangle ABD \cong \triangle CDB$； (2) 有，$\triangle ABD$ 和$\triangle AFD$，$\triangle ABF$ 和$\triangle BFD$，$\triangle CDB$ 和$\triangle AFD$，$\triangle ABE$ 和$\triangle EFD$.
3. 提示：证明$\triangle ABC \cong \triangle DEC$.
4. 提示：证明$\triangle ABC \cong \triangle BAD$.
5. 提示：证明 $\mathrm{Rt}\triangle BDE \cong \mathrm{Rt}\triangle CDF$，得 $DE = DF$.
6. 在平地内作三条公路交成的三角形中两个角的平分线，在其交点处修建度假村.
7. 相等. 提示：先证$\angle C = \angle D$，再证$\triangle ACE \cong \triangle BDF$.
8. 提示：先证 $BC = EF$，再证$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
9. 0.8 cm. 提示：先证$\angle ACD = \angle CBE$，再证$\triangle ACD \cong \triangle CBE$.
10. 7 cm. 提示：由折叠可知$\triangle DEB \cong \triangle DCB$，于是 $DE = DC$，$EB = CB$.
11. $AD = A'D'$. 提示：证明$\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$.
12. 提示：用三角形面积公式.
13. 提示：证明两个三角形中相等的两条边所夹的角相等.

Ⅳ 教学设计案例

18.2 三角形全等的判定（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

构建三角形全等条件的探索思路，“边边边”判定方法.

2. **内容解析**

三角形全等的判定是指三角形中的边、角满足什么条件可以推断两个三角形全等. 全等三角形的性质和判定是研究全等三角形的两个重要方面.

根据全等三角形的定义，三条边分别相等、三个角分别相等的两个三角形全等. 本节主要探索能否在上述六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等. 为此构建了三角形全等条件的探索思路，即从“一个条件”开始，逐渐增加条件的数量，从“一个条件”“两个条件”“三个条件”分别进行探究，最后通过作图实验，概括出一种判定方法——“边边边”.“边边边”判定方法的探索过程也为其他判定方法的探索提供了策略和思路.

基于以上分析，确定本节课的教学重点：构建三角形全等条件的探索思路，“边边边”判定方法.

二、目标和目标解析

1. **目标**

(1) 构建三角形全等条件的探索思路，体会研究几何问题的方法.

(2) 探索并理解“边边边”判定方法，会用“边边边”判定方法证明三角形全等.

(3) 会用尺规作一个角等于已知角，了解作图的道理.

2. **目标解析**

达成目标 (1) 的标志是：学生知道判定三角形全等的含义. 为了寻求比六个条件更简捷的判定方法，从“一个条件”开始，逐渐增加条件的数量，依次探究“一个条件”“两个条件”“三个条件”能否保证两个三角形全等. 在探索判定方法的过程中，体会作图、观察、分析、猜想等研究几何问题的方法.

达成目标 (2) 的标志是：学生能在教师的引导下作两个三边分别相等的三角形，通过观察、比较、分析，概括出全等三角形的“边边边”判定方法. 学生能理解“边边边”判定方法的含义，会用“边边边”判定方法进行一些简单的证明.

达成目标 (3) 的标志是：学生能正确使用直尺和圆规作一个角等于已知角，并能用“边边边”判定方法解释作法的合理性.

三、教学问题诊断分析

探索三角形全等的条件是一个开放性的问题，如何从六个条件中选择部分条件简捷地判定两个三角形全等、怎样通过逐渐增加条件的数量构建出三角形全等条件的探索思路，这些对于思维水平正在逐渐提高的七年级学生来说会有一定的难度. 探索三角形全等的条件和运用“边边边”判定方法作一个角等于已知角的过程，涉及到尺规作图，而学生仅学习过用尺规作最简单的图形，作图技能还不高. 教学时，教师要从三角形全等的判定的含义出发，以在六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等为目标，引导学生逐步探索三角形全等的条件. 对于作一个角等于已知角的尺规作图，则分别以作一条线段等于已知线段的尺规作图和三角形全等的“边边边”判定方法来引导学生思考作图的思路.

本节课的教学难点是：构建三角形全等条件的探索思路、用尺规作一个角等于已知角.

四、教学过程设计

引言

我们知道，如果两个三角形全等，那么它们的对应边相等，对应角相等. 反过来，根据全等三角形的定义，如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足三条边分别相等、三个角分别相等这六个条件，即$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，就能判定$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（图 1）.

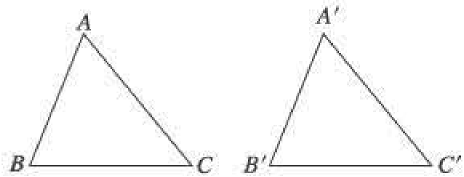


图 1

1. 提出“全等判定”问题，构建探索思路

问题 1　是否一定要满足三条边分别相等、三个角分别相等这六个条件，才能保证两个三角形全等呢？

师生活动：教师提出问题，学生独立思考.

追问 1：上述六个条件中，有些条件是相关的，能否在这六个条件中选出部分条件，简捷地判定两个三角形全等呢？你想从哪儿入手开始研究？

师生活动：学生独立思考，然后小组交流，并派代表发言，教师适时点拨，最后达成共识：按满足“一个条件”“两个条件”“三个条件”……的顺序探索三角形全等的条件.

追问 2：当满足一个条件时，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？

师生活动：学生发现需要再分两种情况进行说明，即一条边分别相等、一个角分别相等. 在探究过程中，可以通过画图加以说明，也可以利用三角尺等进行说明.

追问 3：当满足两个条件时，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？

师生活动：学生独立思考，教师适时点拨，最后达成共识：满足“两个条件”分两边、一边一角或两角分别相等三种情况. 学生分三组分别进行探究，通过画图、展示交流，最后得出结论：只满足“两个条件”的两个三角形不一定全等.

追问 4：当满足三个条件时，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？满足三个条件时，又分为几种情况呢？

师生活动：学生回答问题，并相互补充，发现需要分四种情况进行研究，即三边、三角、两边一角、两角一边分别相等.

设计意图：先提出“全等判定”问题，构建出三角形全等条件的探索路径，然后以问题串的方式呈现探究过程，引导学生层层深入地思考问题.

2. 尺规作图，探究“边边边”判定方法

问题 2　我们先研究两个三角形三边分别相等的情况（其他几种情况以后研究）：先任意画出

一个$\triangle ABC$，再画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$B'C'=BC$，$C'A'=CA$. 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下来，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

师生活动：师生共同用尺规作图（图2），学生剪图、比较图. 具体过程如下：(1) 师生共同回顾如何用尺规作一条线段等于已知线段，然后学生在已画出$\triangle ABC$的相同的纸上分别用尺规作出线段$B'C'$，使$B'C'=BC$，进而确定了点B'，C'的位置；(2) 师生共同探索如何确定点A'的位置（由于此时应同时满足$A'B'=AB$，$C'A'=CA$，所以，可借鉴确定点C'的位置的方法，即分别以B'，C'为圆心，线段AB，AC长为半径画弧，两弧相交于点A'），并用尺规作图确定点A'的位置；(3) 画出$\triangle A'B'C'$，并将其剪下来，放到$\triangle ABC$上.

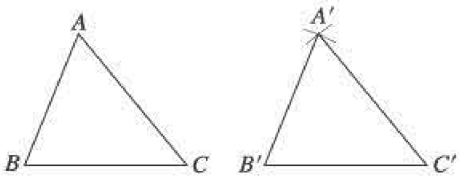


图2

追问：作图的结果反映了什么规律？你能用文字语言和符号语言概括吗？

师生活动：学生回答问题，并相互补充. 教师板书：三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成"边边边"或"SSS"）.

设计意图：通过作图、剪图、比较图的过程，感悟基本事实的正确性，获得三角形全等的"边边边"判定方法. 在概括基本事实的过程中，引导学生透过现象看本质，锻炼学生用数学语言概括结论的能力.

3. **运用"边边边"判定方法，解决简单问题**

问题3 我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了. 你能解释其中的道理吗？

师生活动：学生用"边边边"判定方法进行解释.

设计意图：用所学知识解释生活现象，进一步体会判定方法的作用，感悟数学的应用价值.

例 如图3，有一个三角形钢架，$AB=AC$，AD是连接点A与BC中点D的支架. 求证：$\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

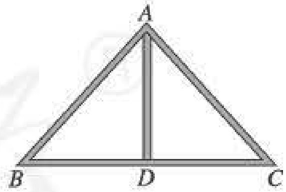


图3

师生活动：师生共同分析解题思路，即要证明$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，只需看这两个三角形的三条边是否分别相等，题中有一个隐含条件——AD是两个三角形的公共边. 学生口述证明过程，教师板书.

设计意图：运用"边边边"判定方法证明简单的几何问题，感悟判定方法的简捷性，体会证明过程的规范性.

问题4 你能用直尺和圆规作一个角等于已知角吗？

师生活动：师生分别画出一个任意角$\angle AOB$，教师板书已知和求作的内容，学生尝试独立作图. 如果学生没有思路，教师作如下提示：能否将作一个角等于$\angle AOB$，转化为作一个三角形与$\angle AOB$所在的三角形全等. 学生可能有两种解答：其一，在OA，OB上分别取点C，D，连接CD，得到$\triangle COD$，然后按照前面的方法作$\triangle C'O'D'$，使$\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$，延长$O'C'$，$O'D'$得

到射线$O'A'$，$O'B'$，进而得到所求作的角$\angle A'O'B'$（图 4）；其二，采用教科书第 84 页的作法（图 5）. 教师引导学生比较两种作法，选出简捷的作法，并分别解释两种作法的原理.

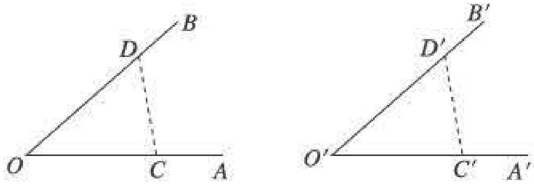


图 4

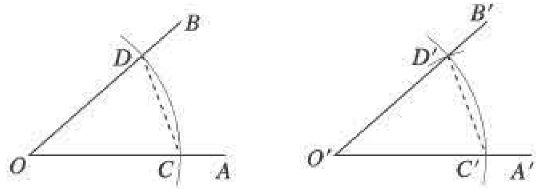


图 5

设计意图：让学生运用“SSS”条件进行尺规作图，同时体会作图的合理性，增强作图技能.

4. **小结**

教师与学生一起回顾本节课所学的主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 本节课学习了哪些主要内容？

(2) 探索三角形全等的条件，其基本思路是什么？

(3)“边边边”判定方法有何作用？

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，掌握本节课的核心——构建三角形全等条件的探索思路，以及判定三角形全等的“边边边”方法.

5. **布置作业**

必做题：教科书习题 18.2 第 1，9 题.

选做题：如图 6，$\triangle ABC$ 和$\triangle EFD$ 中，$AB=EF$，$AC=ED$，点 B，D，C，F 在一条直线上.

(1) 添加一个条件，使得可以由“边边边”判定方法判定$\triangle ABC\cong\triangle EFD$；

(2) 在 (1) 的基础上，求证 $AB\parallel EF$.

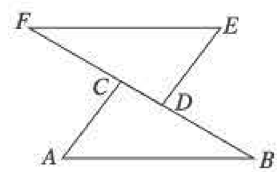
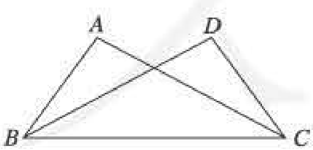


图 6

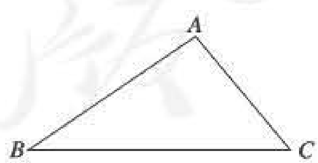
五、目标检测设计

1. 如图，$AB=DC$，$AC=DB$. 求证$\angle ABC=\angle DCB$.

设计意图：考查学生运用“边边边”判定方法进行简单推理的能力.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知$\triangle ABC$，用尺规分别作$\angle A'B'C'$和$\angle A'C'B'$，使$\angle A'B'C'=\angle ABC$，$\angle A'C'B'=\angle ACB$.

设计意图：考查学生对“作一个角等于已知角”的尺规作图的掌握情况.

18.3 角的平分线的性质（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

角的平分线的性质.

2. 内容解析

角的平分线的性质反映了角的平分线的基本特征，也是证明两条线段相等的常用方法. 角的平分线的性质的研究过程为以后学习线段垂直平分线的性质提供了思路和方法.

本节内容是全等三角形知识的运用和延续. 用尺规作一个角的平分线，其作法原理是三角形全等的“边边边”判定方法和全等三角形的性质；角的平分线的性质证明，运用了三角形全等的“角角边”判定方法和全等三角形的性质. 角的平分线的性质证明提供了使用角的平分线的一种重要模式——利用角的平分线构造两个全等的直角三角形，进而证明相关元素对应相等.

基于以上分析，确定本节课的教学重点：探索并证明角的平分线的性质.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）会用尺规作一个角的平分线，知道作法的合理性；

（2）探索并证明角的平分线的性质；

（3）能用角的平分线的性质解决简单问题.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：学生明确尺规作图的基本要求，知道用尺规作角的平分线的方法与原理，能在教师的引导下用尺规作出一个已知角的平分线.

达成目标（2）的标志是：学生能在教师的引导下通过观察、测量等方法，发现角的平分线的性质，能准确表述性质的内容，能正确地写出已知、求证，能运用三角形全等的“AAS”判定方法和全等三角形的性质证明角的平分线的性质.

达成目标（3）的标志是：学生能利用角的平分线的性质构造全等三角形，证明与线段相等有关的简单问题.

三、教学问题诊断分析

本节课的学习中，学生在分清角的平分线的性质的条件和结论，并进行严格的逻辑证明的过程中常常感到困难. 例如，在用符号语言表述性质的条件和结论时，不知“距离”应为“条件”还是“结论”. 其主要原因是角的平分线的性质是以文字命题的形式给出的，其条件和结论具有一定的隐蔽性. 教学时，教师要引导学生分析性质中的条件和结论（必要时可让学生将性质改写成“如果……那么……”的形式），找出结论中的隐含条件（垂直），正确写出已知和求证，并归纳出证明几何命题的一般步骤.

本节课的教学难点是：证明以文字命题形式给出的角的平分线的性质.

四、教学过程设计

1. 感悟实践经验，用尺规作角的平分线

问题 1 在练习本上画一个角，怎样得到这个角的平分线？

师生活动：学生可能用量角器，也可能用折纸的方法动手操作，然后回答问题.

追问 1：你能评价这些方法吗？在生产生活中，这些方法是否可行呢？

师生活动：学生分析并回答——利用量角器比较方便，但是有误差；利用折叠的方法比较简捷，但是只限于可以折叠的材质，若在木板、钢板等材料上操作，此方法就不可行了.

追问 2：用平分角的仪器可以平分一个角（大屏幕显示下面内容），你能说明它的道理吗？

图 1 是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$，$BC=DC$，将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是$\angle DAB$ 的平分线. 你能说明它的道理吗？

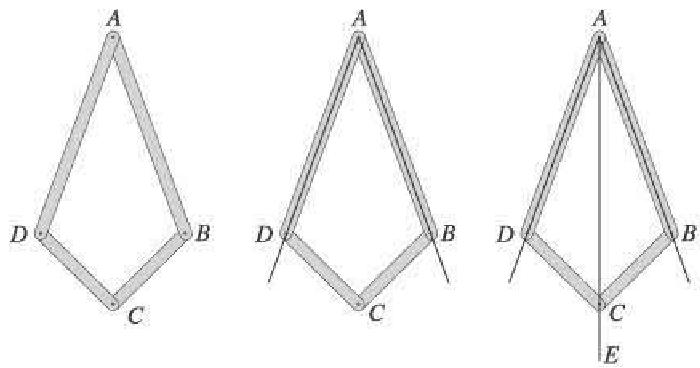


图 1

师生活动：教师启发学生将实际问题抽象为数学模型，并运用全等三角形的知识解释平分角的仪器的工作原理.

追问 3：从利用平分角的仪器画角的平分线中，你受到哪些启发？如何利用直尺和圆规作一个角的平分线？

师生活动：师生分别在黑板和练习本上画出$\angle AOB$，学生尝试利用直尺和圆规作$\angle AOB$ 的平分线. 教师与学生共同归纳，得出利用尺规作角的平分线的具体方法（图 2）.

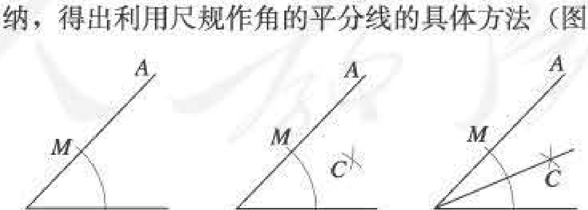


图 2

如果学生没有思路，教师可作如下提示：

（1）在用平分角的仪器画角的平分线时，把仪器放在角的两边，仪器的顶点与角的顶点重合，且仪器的两边相等（$AB=AD$），怎样在作图中体现这个过程呢？

（2）在平分角的仪器中，$BC=DC$，怎样在作图中体现这个过程呢？

追问 4：你能说明为什么射线 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线吗？

师生活动：学生用三角形全等进行证明，明确作图的理论依据.

设计意图：让学生运用全等三角形的知识解释平分角的仪器的工作原理，体会数学的应用价值，同时从中获得启发，用尺规作角的平分线，增强作图技能. 最后让学生在简单推理的过程中，体会作法的合理性.

2. 经历实验过程，发现并证明角的平分线的性质

问题 2 利用尺规我们可以作一个角的平分线，那么角的平分线有什么性质呢？首先思考下面的问题：

如图 3，任意作一个角 $\angle AOB$，作出 $\angle AOB$ 的平分线 OC，在 OC 上任取一点 P，过点 P 画出 OA，OB 的垂线，分别记垂足为 D，E，测量 PD，PE 并作比较，你得到什么结论？在 OC 上再取几个点试一试. 通过以上测量，你发现了角的平分线的什么性质？

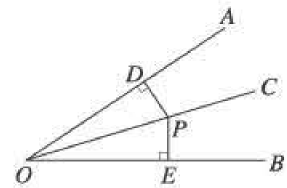


图 3

师生活动：学生动手操作，独立思考，然后汇报自己的发现. 学生互相补充，教师指导，一起概括出角的平分线的性质.

追问 1：通过动手实验、观察比较，我们发现"角的平分线上的点到角的两边的距离相等"，你能通过严格的逻辑推理证明这个结论吗？

师生活动：教师首先引导学生分析命题的条件和结论. 如果学生感到困难，可以让学生将命题改写成"如果……那么……"的形式，然后引导学生逐字分析结论，进而发现并找出结论中的隐含条件（垂直）. 最后让学生画出图形（图 4），用符号语言写出已知和求证，并独立完成证明过程.

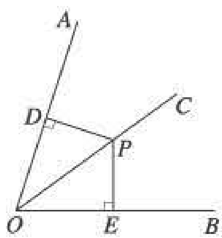


图 4

已知：$\angle AOC=\angle BOC$，点 P 在 OC 上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为 D，E.

求证：$PD=PE$.

追问 2：由角的平分线的性质的证明过程，你能概括出证明几何命题的一般步骤吗？

师生活动：师生共同概括证明几何命题的一般步骤：

（1）明确命题中的已知和求证；

（2）根据题意，画出图形，并用符号表示已知和求证；

（3）经过分析，找出由已知推出求证的途径，写出证明过程.

追问 3：角的平分线的性质的作用是什么？

师生活动：学生回答，角的平分线的性质的作用主要是用于判断和证明两条线段相等，与以前的方法相比，运用此性质不需要先证两个三角形全等.

设计意图：让学生通过实验发现、分析概括、推理证明角的平分线的性质，体会研究几何问题的基本思路. 以角的平分线的性质的证明为例，让学生概括证明几何命题的一般步骤，发展他们的归纳概括能力. 而反思性质，可以让学生进一步体会到证明两条线段相等时利用角的平分线的性质

比先证两个三角形全等更简捷.

3. 解决简单问题，巩固角的平分线的性质

练习

(1) 填空：下列结论一定成立的是__________.

①如图 5，OC 平分$\angle AOB$，点 P 在OC 上，D，E 分别为OA，OB 上的点，则 $PD=PE$.

②如图 6，点 P 在OC 上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为D，E，则 $PD=PE$.

③如图 7，OC 平分$\angle AOB$，点 P 在OC 上，$PD\perp OA$，垂足为D. 若 $PD=3$，则点 P 到OB 的距离为 3.

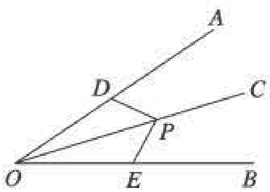


图 5

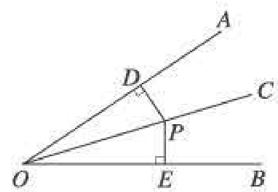


图 6

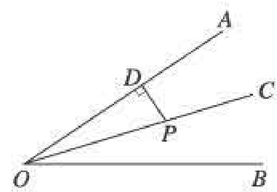


图 7

(2) 如图 8，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为E，F. 求证 $EB=FC$. 在此题的已知条件下，你还能得到哪些结论？

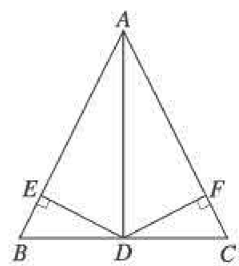


图 8

师生活动：学生独立完成，一名学生板演问题（2）的证明. 教师巡视、指导，师生共同评价.

例 如图 9，$\triangle ABC$ 的角平分线BM，CN 相交于点 P. 求证：点 P 到三边AB，BC，CA 的距离相等.

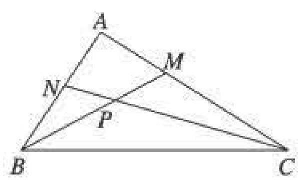


图 9

师生活动：学生先独立思考，然后小组交流，派代表回答，教师适时点拨，并板演证明过程. 此时教师主要关注学生是否能够想到如何构造辅助线，并准确地描述辅助线的作法.

设计意图：通过有梯度的训练，提高学生运用角的平分线的性质解决问题的能力. 练习（2）是开放性的问题，有利于提高学生综合运用条件推理的能力.

4. 小结

教师与学生一起回顾本节课所学的主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 本节课学习了哪些主要内容？

(2) 本节课是通过什么方式探究角的平分线的性质的？

(3) 角的平分线的性质为我们提供了证明什么的方法？在应用这一性质时要注意哪些问题？

设计意图：引导学生从知识内容和学习过程两个方面总结自己的收获，并建立知识之间的联系.

5. 布置作业

教科书习题 18.3 第 4，5 题.

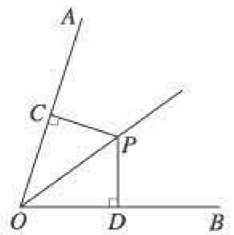
五、目标检测设计

1. 如图，P 是$\angle AOB$ 的平分线上的一点，$PC\perp OA$，$PD\perp OB$，垂足分别为 C，D. 下列结论不一定成立的是（　　）.

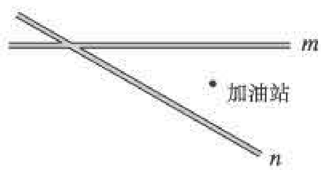
(A) $\angle AOP=\angle BOP$　　　　(B) $PC=PD$

(C) $\angle OPC=\angle OPD$　　　　(D) $OP=PC+PD$

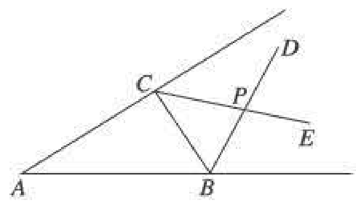
设计意图：本题主要考查学生对角的平分线的性质的理解情况.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 如图，一个加油站恰好位于两条公路 m，n 所夹角的平分线上，若加油站到公路 m 的距离是 50 m，则它到公路 n 的距离是________m.

设计意图：本题主要考查学生运用角的平分线的性质解决简单实际问题的能力.

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的外角平分线 BD 与$\angle C$ 的外角平分线 CE 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 所在直线的距离相等.

设计意图：本题主要考查学生运用角平分线的性质解决几何问题的能力，以及对添加的辅助线的掌握情况.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 三角形全等的相关史料

(1) 全等符号

德国数学家莱布尼茨（G.W. Leibniz，1646—1716）于 1679 年用“$a\sim b$”表示 a 与 b 相似，用“∽”表示全等. 哈塞勒（I.L.Haseler）于 1777 年用“≌”表示全等. 德国天文学家、数学家莫尔韦德（K.B.Mollweide，1774—1825）于 1824 年用“$\cong$”表示全等. 现在后两种全等符号都在使用.

我国国家技术监督局 1993 年 12 月 27 日批准，1994 年 7 月 1 日实施的《中华人民共和国国家标准　物理科学和技术中使用的数学符号》（GB3102.11—1993）中规定我国使用符号“≌”表示全等.

(2) 欧几里得《原本》中的三角形全等命题

欧几里得《原本》中，关于三角形全等的命题安排在第Ⅰ卷，分别是命题 4，8，26.

命题 4：如果两个三角形中一个的两边分别等于另一个的两边，而且这些相等的边所夹的角相等，那么，它们的底边等于底边，三角形全等于三角形，而且其余的角分别等于其余的角.

命题 8：如果两个三角形的一个有两边分别等于另一个的两边，并且一个的底边等于另一个的底边，那么，夹在等边中间的角也相等.

命题 26：如果在两个三角形中，一个的两个角分别等于另一个的两个角，并且一个的一边等于另一个的一边，即或者这边是等角的夹边，或者是等角的对边，那么，它们的其他的边也分别等于其他的边，而且其他的角也分别等于其他的角.

下面是欧几里得给出的命题 4 的证明，用现代的符号表述如下：

如图 18-1，在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$AB=DE$，$AC=DF$，$\angle BAC=\angle EDF$，则可证 $BC=EF$，$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\angle ABC=\angle DEF$，$\angle ACB=\angle DFE$.

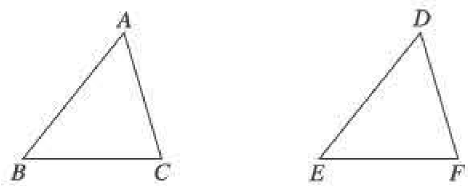


图 18-1

证明：如果移动$\triangle ABC$到$\triangle DEF$上，若点 A 落在点 D 上且线段 AB 落在 DE 上，因为 $AB=DE$，那么点 B 也就与点 E 重合. 又因为$\angle BAC=\angle EDF$，所以线段 AC 落在射线 DF 上. 因为 $AC=DF$，故点 C 也与点 F 重合. 而点 B 与点 E 重合，故 BC 与 EF 重合.

这样，整个$\triangle ABC$与整个$\triangle DEF$重合，于是它们全等. 因此有$\angle ABC=\angle DEF$，$\angle ACB=\angle DFE$.

(3) 数学家克莱因提出的几何悖论：任何三角形都是等腰三角形

欧几里得《原本》是人类第一部公理化系统的典范，为人类认识世界做出了巨大贡献. 但是，受时代和科学实践的限制，欧几里得《原本》存在一些缺陷，其不足之一是缺少关于运动、顺序、连续性的公理，这使得欧几里得常常借助于直观进行论证. 德国数学家克莱因（F.Klein，1849—1925）在他的名著《高观点下的初等数学》中提出了一个著名的悖论，说明了欧几里得《原本》的缺陷的影响.

几何悖论：任何三角形都是等腰三角形.

图 18-2　图 18-3　图 18-4

证明：设$\triangle ABC$是任意三角形. 作$\angle A$的平分线 l 以及边 BC 的中垂线 m.

如果 l 与 m 重合或平行，则不难证明$\triangle ABC$为等腰三角形.

如图 18-2，3，4，如果 l 与 m 相交，设交点为 O，过点 O 作三边的垂线，垂足分别是 D，

E，F.

连接 OB，OC. 易证 Rt$\triangle OAF \cong$ Rt$\triangle OAE$，所以 $AF=AE$.

又 $OF=OE$，$OB=OC$，所以 Rt$\triangle OBF \cong$ Rt$\triangle OCE$，所以 $FB=EC$.

故 $AB=AF+FB=AE+EC=AC$（图 18-2，3），或者 $AB=AF-FB=AE-EC=AC$（图 18-4）. 无论哪种情形，都有$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

这个悖论产生的原因是 E，F 的位置不正确，由此可见，没有关于位置的公理，只凭直观是不够的.

（4）希尔伯特《几何基础》中的三角形全等命题

到 19 世纪，欧几里得《原本》的缺陷越来越引起人们的关注，完善欧氏几何成为这个时期数学家的一项重要研究工作. 1899 年德国数学家希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943）出版了他的名著《几何基础》，一方面为几何学建立了空前严密的公理化基础，另一方面，使公理化方法渗透到整个纯数学领域，促进了数学的发展.

希尔伯特比任何前人都更透彻地揭示出公理系统的内在联系. 公理分五组，共 20 条，分别称为关联公理（包含 8 条公理）、顺序公理（包含 4 条公理）、合同公理（包含 5 条公理）、平行公理（包含 1 条公理）、连续公理（包含 2 条公理）. 其中，第三组合同公理（在希尔伯特公理系统里“合同”与“相等”是同义的，符号记作“$\equiv$”）中的第 5 条公理如下：

若两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 有下列合同式

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

则也恒有合同式$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

希尔伯特《几何基础》的这种表述表明上述命题是不能用其他公理证明的，即数学上是无法证明的. 三角形全等的判定方法——两边及夹角分别相等，两角及夹边分别相等，三边分别相等，作为合同公理的推论排列在后面.

2. 等价关系与图形的全等

（1）等价关系

设在集合 M 的元素间，存在一个关系 R，使得对于 M 中的任意两个元素 a，b，要么 a 与 b 具有关系 R（记作 aRb），要么 a 与 b 不具有关系 R，且满足下列三个条件：

①自反律：aRa；②对称律：若 aRb，则 bRa；③传递律：若 aRb，bRc，则 aRc. 则称关系 R 为集合 M 的一个等价关系.

等价关系通常用符号“～”表示.

等价关系是数学特别是近代数学的重要概念. 它的一个重要价值是，在一个集合里，对于每个元素作出等价类，不同元素的等价类构成该集合的一个分类. 例如，在整数集中对于模 m 的同余关系（即两个整数对于模 m 余数相同，通俗地说，就是除以 m 余数相同）是等价关系. 当 $m=2$ 时，整数集分成两类：奇数和偶数.

（2）图形的全等

在空间中，对于给定的两个几何图形，如果经过合同变换可以使一个图形与另一个图形重合，则称这两个图形全等或合同.

两个图形 M，N 全等或合同，记作 $M\cong N$，或 $M\equiv N$.

平移、旋转、反射（轴对称）是数学上常见的合同变换.

经过平移、旋转（统称为刚体运动）重合的全等形称为同向全等形（如图 18-5 中的两个全等形）；经过奇数次轴对称（也可以同时含有平移或旋转）重合的全等形称为反向全等形（如图 18-6 中的两个全等形）.

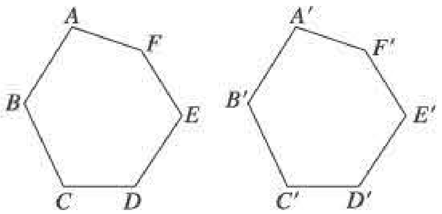


图 18-5

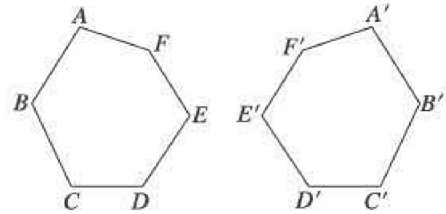


图 18-6

图形的全等关系是等价关系. 这是因为在空间中，对于任意给定的两个几何图形，要么全等，要么不全等，是确定的，且满足下列三个条件（其中 M，N，P 是任意图形）：

①自反律：$M\cong M$；

②对称律：若 $M\cong N$，则 $N\cong M$；

③传递律：若 $M\cong N$，$N\cong P$，则 $M\cong P$.

3. 两边一对角分别相等的三角形全等的判定

三角形全等的条件就是确定三角形的形状和大小的条件. 根据这一思路，两边一对角分别相等的两个三角形是否全等的问题，可以转化为两边一对角是否能确定三角形的形状和大小的问题. 从这个角度出发，可分类讨论如下：

已知：在三角形中，两边为 a，b，边 a 的对角为 α .

如图 18-7，当 α 为钝角时，则由 a，b，α 可确定三角形的形状和大小.

如图 18-8，当 α 为直角时，则由 a，b，α 可确定三角形的形状和大小.

当 α 为锐角时，则

(1) 若 $a>b$ 或 $a=b$（图 18-9），由 a，b，α 可确定三角形的形状和大小；

(2) 若 $a<b$ 且 $a=b\sin\alpha$（图 18-10），由 a，b，α 可确定三角形的形状和大小.

(3) 若 $a<b$ 且 $a>b\sin\alpha$（图 18-11），由 a，b，α 可得到两个三角形，且只有此时不能确定三角形的形状和大小.

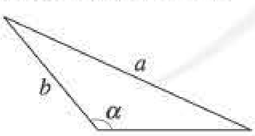


图 18-7

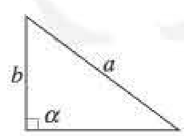


图 18-8

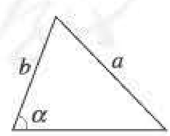


图 18-9

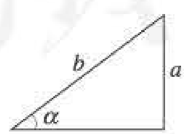


图 18-10

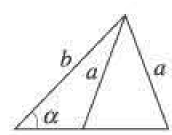


图 18-11

将上述情况（图 18-7，8，9）加以综合，可发现下面结论：

两边分别相等且两边中大边的对角也分别相等的两个三角形全等（简记为“SSA（1）”）.

教科书中判定两个直角三角形全等的一个方法：**斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等**，属于上述全等判定方法“SSA（1）”的特殊情形.

显然，两边与其中短边的对角分别相等的两个三角形不一定全等（图 18-11）. 但是，如果两边

中的长边（图 18-11 中的 b）的对角都是锐角或都是钝角，则两个三角形全等．即有：

在两边分别相等且两边中短边的对角也分别相等的两个三角形中，如果两边中长边的对角都是锐角或都是钝角，则两个三角形全等（简记为“SSA（2）”）．

由此看来，两边一对角分别相等的两个三角形在多数情形是全等的，只有一种情形不全等，即两边分别相等且两边中短边的对角也分别相等的两个三角形，如果两边中长边的对角一个是锐角，另一个是钝角，则两个三角形不全等．

4．与全等三角形有关的故事

众所周知，每个三角形有六个元素．而两个三角形全等的判定仅仅涉及每个三角形的三个元素．有一次一位中学数学教师向数学家赵访熊（1908—1996）教授请教一个数学问题：如果一个三角形有五个元素与另一个三角形的五个元素两两相等，这两个三角形是否全等？赵访熊教授想了想回答：“不一定”．然后，举出下面的反例：

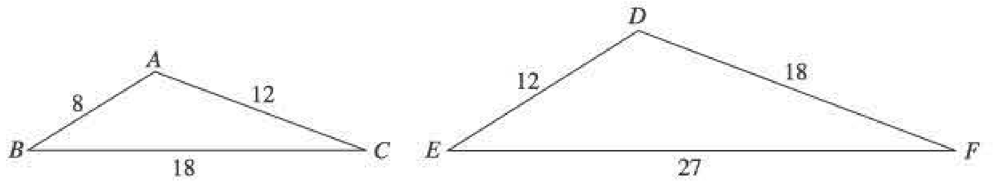


图 18-12

如图 18-12，在$\triangle ABC$与$\triangle DEF$中，$AC=DE$，$BC=DF$，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$．两个三角形有 5 个元素两两相等，但这两个三角形显然不全等．

一般地，取正数 a，r，且 $r>1$，由此得到由小到大的四个数：a，ar，ar^2，ar^3．前三个数和后三个数作边长能够组成三角形的充分必要条件是正数 a，r 还要满足 $a+ar>ar^2$，解得 $r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\ 033\ 988\ 7\cdots\approx 1.618$．

于是，以 a，ar，ar^2 为边长可以做一个三角形，以 ar，ar^2，ar^3 为边长可以做另一个三角形．显然这两个三角形相似，因而两个三角形的三个角分别相等，又有两条边分别相等，即有五个元素两两相等，但这两个三角形并不全等．

例如，$r=1.5$，$a=8$，则这四个数是 8，12，18，27，前三个数、后三个数分别做两个三角形的三边长，就得到赵访熊教授举出的反例．

由此看来，如果三角形的角或边不是对应相等的关系，即使两两相等的元素再多，也不一定有全等关系．

参考资料

[1] 欧几里得著，兰纪正等译．几何原本．西安：陕西科学技术出版社，1990．

[2] 希尔伯特著，江泽涵等译．几何基础．北京：科学出版社，1987．

[3] 梁宗巨．世界数学通史（上）．沈阳：辽宁教育出版社，1995．

[4] 肖文强．数学证明．南京：江苏教育出版社，1989．

[5] 贺贤孝．证明的艺术．长沙：湖南教育出版社，2000．

[6] 吴文俊主编．世界著名数学家传记（下集）．北京：科学出版社，1995．

[7] 数学辞海编辑部. 数学辞海（第1卷）. 太原：山西教育出版社，2002.

二、拓展性问题

1. 如图18-13，一个大正方形中有2个小正方形，如果它们的面积分别是S_1，S_2.

（1）不通过计算，你能否推断$S_1=S_2$，$S_1<S_2$，$S_1>S_2$中哪一个正确？

（2）若大正方形的边长为18 cm，你能否算出S_1，S_2的大小？

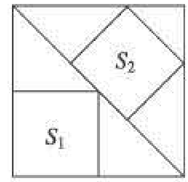


图18-13

答案：（1）如图18-14，用对角线将两个小正方形进行分割. S_1所在的大三角形被分成4个全等的小三角形，不难看出S_1是“半个大正方形”的$\frac{1}{2}$，即大正方形面积的$\frac{1}{4}$；而S_2所在的大三角形被分成4个全等的小三角形和一个更小的三角形，S_2占有4个全等的小三角形中的两个，显然不是“半个大正方形”的$\frac{1}{2}$，即不到大正方形面积的$\frac{1}{4}$. 所以，$S_1>S_2$.

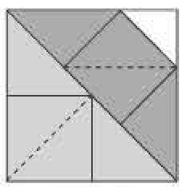


图18-14

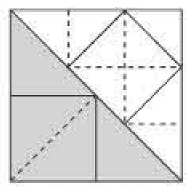


图18-15

（2）由（1）知$S_1=\frac{1}{4}\times18^2=81$. 如图18-15，将$S_2$所在的大三角形继续进行分割，分成了9个全等的小三角形. S_2是它所在的大三角形的$\frac{4}{9}$，即大正方形面积的$\frac{2}{9}$，于是，$S_2=\frac{2}{9}\times18^2=72$.

2. 如图18-16，三条笔直的公路将地面分成7块区域，是否存在到三条公路等距离的点？若存在，找出所有这样的点. 若不存在，请说明理由.

答案：有四个点A，B，C，D，如图18-17. 作每两条直线交角的平分线（图中细线所示），这些平分线的交点，即为所求.

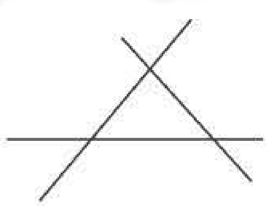


图18-16

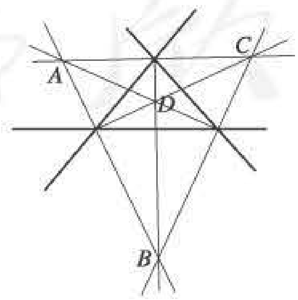


图18-17

3. **棋盘划分**

将$n\times n$的棋盘沿格线划分成两个全等图形，约定某种划分法经过旋转、轴对称得到的划分法

与原划分法相同.

将 4×4 的棋盘沿格线划分成两个全等图形的方法有 6 种，图 18-18 中画出了其中两种：

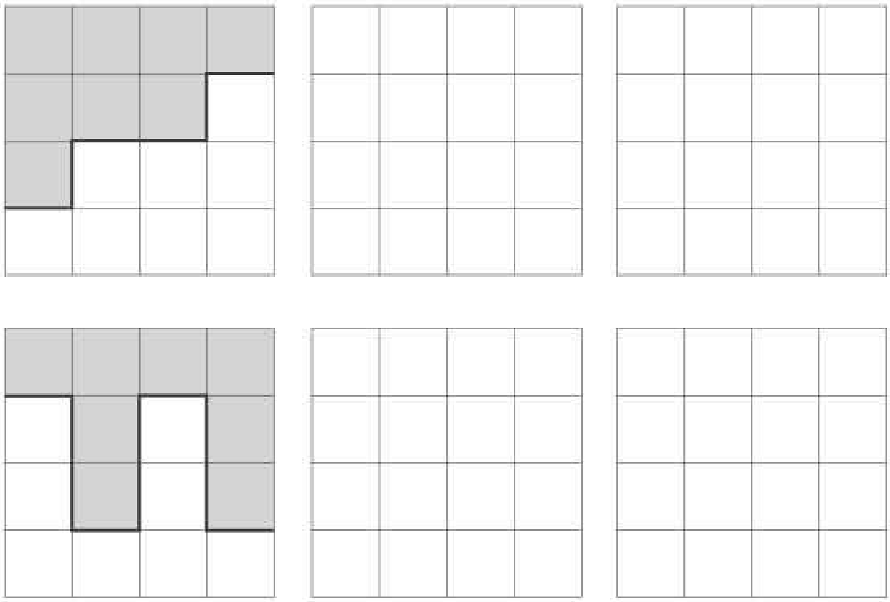


图 18-18

你能在其他 4 张方格图中画出其他的划分吗？

答案：如图 18-19 所示.

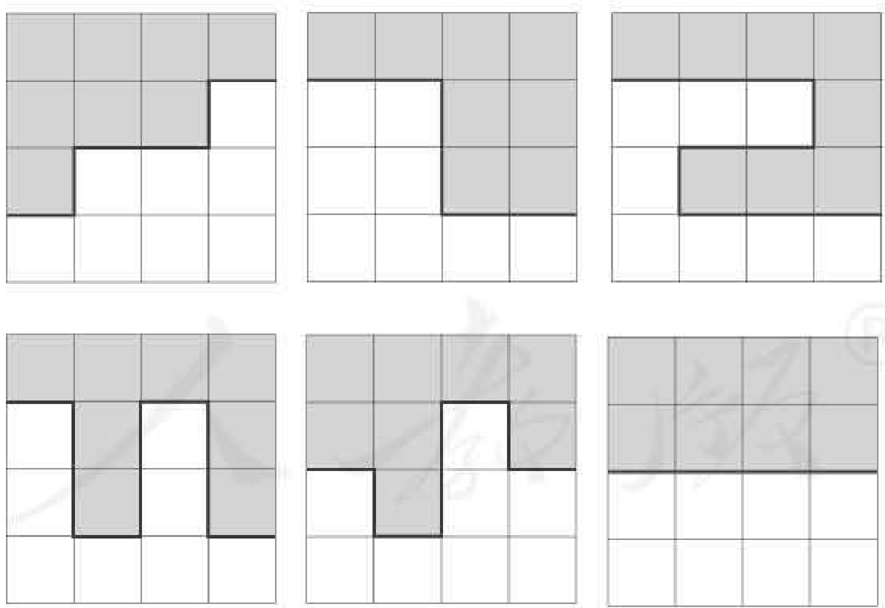


图 18-19

4. 八等分正方形

（1）有一个正方形的花坛，现要将它分成八块全等图形，分别种上不同颜色的花，请你画出几种设计方案. 为了画出更多的设计方案，你能从中找出一般规律吗？

（2）如果要求八块中的每四块是全等的，应如何设计？尽可能精确地画出你的创意.

答案：（1）图 18-20 提供了部分设计方案：

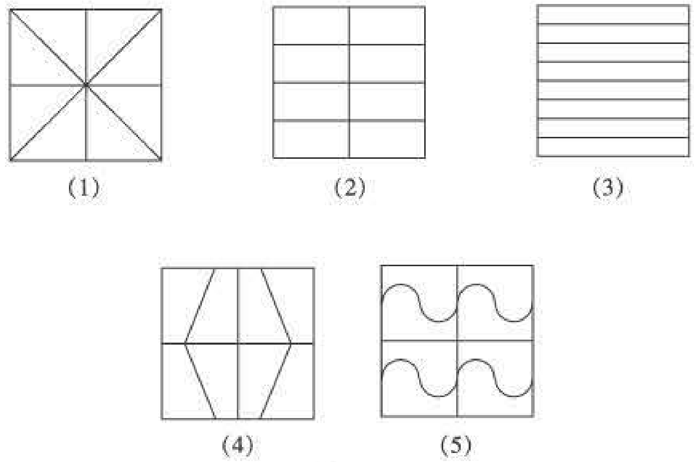


图 18-20

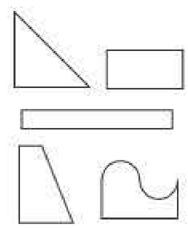


图 18-21

不难发现：图 18-20 中的 5 个图都是由图 18-21 中的 5 种基本图形拼成的，如果考虑用 8 个相同的基本图形拼成一个正方形的各种不同拼法，那么就能画出更多的设计方案．图 18-21 并没有画出所有可能的基本图形，因此寻找更多的基本图形也就成为一个富有创意的问题．而沿着这条解题思路走下去，我们将会得到各种各样的问题，发现一个五彩缤纷的世界．

（2）一种比较自然的思路是：用图 18-21 中的基本图形，选其中两个（每个用 4 遍）拼成一个正方形．图 18-22 给出了部分设计方案．其中除了（6）（7）（10）三个图形外，都能用尺规作图的方法精确地作出图形．而对于（6）（7）（10）这三个图形，只能用代数式计算后，再利用刻度尺作出近似的图形．

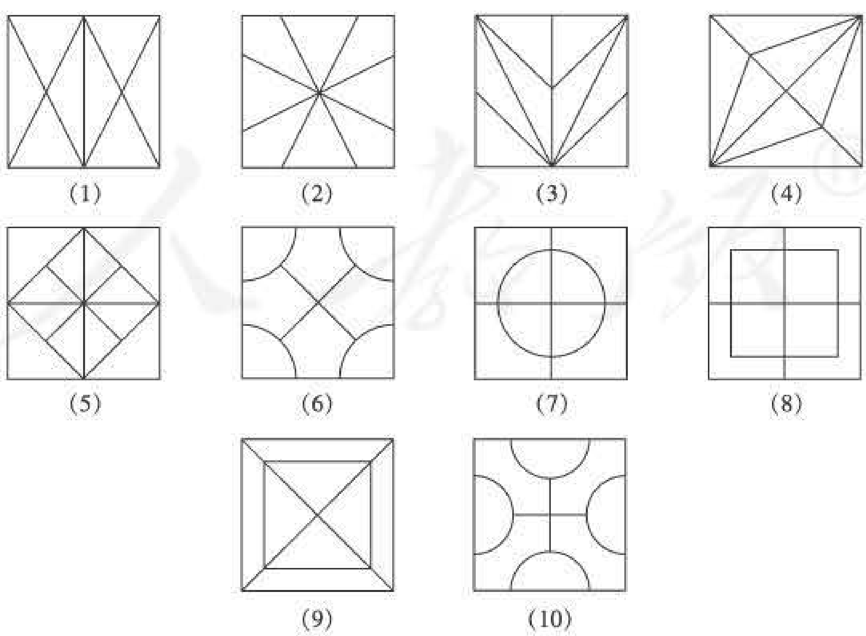


图 18-22

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容是全等三角形的概念、性质和判定方法，角的平分线的性质，以及作一个角等于已知角、已知三边、两边及其夹角、两角及其夹边作三角形和作已知角的平分线的尺规作图. 对于全等三角形的概念，应考查学生是否理解全等三角形的概念，能否识别全等三角形中的对应边、对应角. 对于全等三角形的性质，应考查学生能否由两个三角形全等，得到对应线段相等和对应角相等. 对于三角形全等的判定方法，应考查学生是否掌握判定三角形全等的基本事实（“边边边”“边角边”“角边角”）和定理（“角角边”），能否结合具体内容选择适当的判定方法证明两个三角形全等，并由三角形全等证明一些结论. 对于角的平分线的性质，应考查学生能否用三角形全等证明角的平分线的性质，能否运用角的平分线的性质解决简单的几何问题. 对于尺规作图，应考查学生是否会用尺规作一个角等于已知角、作已知角的平分线，会依照条件（已知三边、两边及其夹角、两角及其夹边）用尺规作一个三角形，是否了解作图的依据.

2. 考查全等三角形的概念、性质、判定方法以及角的平分线的性质，应注意以下问题：

（1）对于全等三角形的概念、性质和判定方法，应着重考查运用概念、性质和判定方法进行几何推理的能力，要注意题目的难度，尽量避免过多地添加辅助线的题目.

（2）对于角的平分线的性质，应考查运用角的平分线的性质证明与线段相等有关问题的能力.

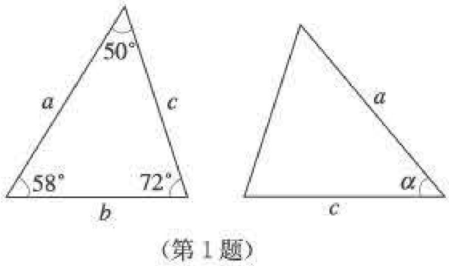
3. 在对三角形全等的判定方法的评价中，要关注学生是否经历了画图、实验、分析、猜想等获得三角形的全等条件的过程，是否充分认识到作为三角形全等条件的基本事实的正确性. 在对与全等三角形有关的推理论证的评价中，要关注学生能否分析出由已知推出要证的结论的思路，能否由已知条件、基本事实、定理等出发，正确地进行推理.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

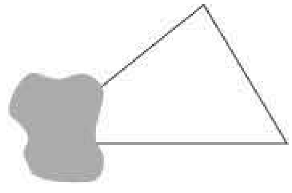
（一）选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 图中的两个三角形全等，则 α 等于（　　）.

(A) 72°　　(B) 60°　　(C) 58°　　(D) 50°



（第 1 题）


（第 2 题）

2. 如图，亮亮书上的三角形被墨迹污染了一部分，他根据所学的知识很快就画了一个与书上完全一样的三角形，那么亮亮画图的依据是（　　）.

(A) SSS　　　　(B) SAS

(C) ASA　　　　(D) AAS

3. 下列说法正确的是（　　）.

(A) 全等三角形是指形状相同的两个三角形

(B) 全等三角形的周长和面积分别相等

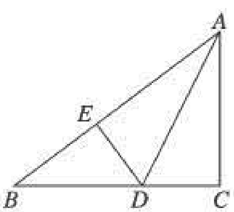
(C) 全等三角形是指面积相等的两个三角形

(D) 所有的等边三角形都是全等三角形

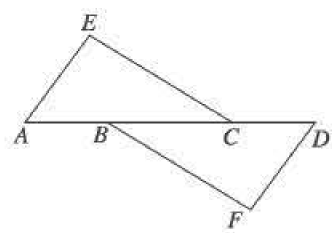
4. 如图，Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE \perp AB$，垂足为 E. 若 $AB=10$ cm，$AC=6$ cm，则 BE 的长度为（　　）.

(A) 10 cm　　　　(B) 6 cm

(C) 4 cm　　　　(D) 2 cm



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，$AE \parallel FD$，$AE=FD$. 要使 $\triangle EAC \cong \triangle FDB$，需要添加下列选项中的（　　）.

(A) $AB=CD$　　　　(B) $EC=BF$

(C) $\angle A=\angle D$　　　　(D) $AB=BC$

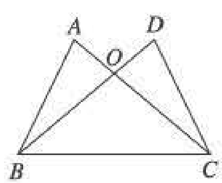
6. 点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上，点 P 到 OA 边的距离等于 5，点 Q 是 OB 边上的任意一点，则下列选项正确的是（　　）.

(A) $PQ>5$　　　　(B) $PQ \geqslant 5$

(C) $PQ<5$　　　　(D) $PQ \leqslant 5$

（二）填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DCB$，$\angle DBC=40°$，则 $\angle AOB=$______°.

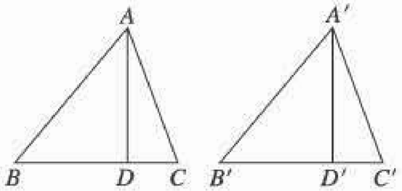


（第 7 题）

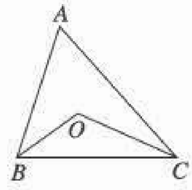
8. 如图，锐角三角形 ABC 和锐角三角形 $A'B'C'$ 中，AD，$A'D'$ 分别是边 BC，$B'C'$ 上的高，且 $AB=A'B'$，$AD=A'D'$. 要使 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，则应补充条件________（填写一个即可）.

9. 如图，点 O 在 $\triangle ABC$ 内，且到三边的距离相等. 若 $\angle A=60°$，则 $\angle BOC=$______°.

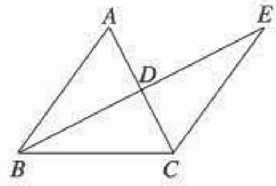
10. 如图，$BE \perp AC$，垂足为 D，且 $AD=CD$，$BD=ED$. 若 $\angle ABC=54°$，则 $\angle E=$________°.



(第 8 题)



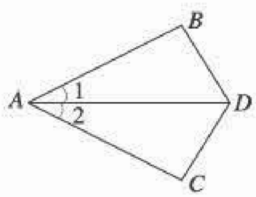
(第 9 题)



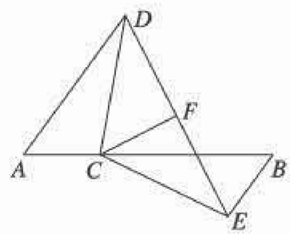
(第 10 题)

(三) 解答题（第 11 题 14 分，第 12，13 题每题 18 分，共 50 分）

11. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$AB=AC$．求证 $BD=CD$．



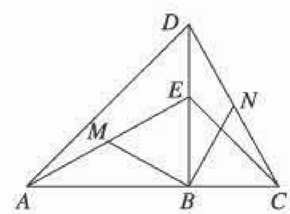
(第 11 题)



(第 12 题)

12. 如图，点 C 在线段 AB 上，$AD\parallel EB$，$AC=BE$，$AD=BC$，CF 平分$\angle DCE$. 试探索 CF 与 DE 的位置关系，并说明理由.

13. 如图，点 B 在线段 AC 上，点 E 在线段 BD 上，$\angle ABD=\angle DBC$，$AB=DB$，$EB=CB$，M，N 分别是 AE，CD 的中点. 试探索 BM 和 BN 的关系，并证明你的结论.



(第 13 题)

参考答案

1. D. 本题考查学生对全等三角形的性质的掌握.
2. C. 本题考查学生应用三角形全等的判定方法解决实际问题的能力.
3. B. 本题考查学生对全等三角形的概念、性质及判定的掌握.
4. C. 本题考查学生利用全等三角形的判定及性质解决线段长度问题的能力.
5. A. 本题考查学生对三角形全等条件的掌握.
6. B. 本题考查学生对角平分线的性质以及“连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短”的掌握.
7. 80. 本题考查学生对全等三角形的性质以及三角形内外角关系的掌握.
8. $BC=B'C'$（答案不唯一）. 本题是一道开放性问题，考查学生对直角三角形全等的判定、性质的掌握，以及对三角形全等条件的理解.
9. 120. 本题考查学生对“角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”以及角平分线概念、三角形内角和定理的掌握.
10. 27. 本题考查学生对三角形全等的判定及性质的掌握.
11. 提示：证明$\triangle ABD\cong\triangle ACD$. 本题考查学生对三角形全等的判定及性质的掌握.

12. $CF \perp DE$. 提示：证明$\triangle ACD \cong \triangle BEC$，得 $DC = CE$，再证明$\triangle CFD \cong \triangle CFE$. 本题考查学生综合运用平行线的性质、三角形全等的判定与性质、角平分线和平角的概念进行几何证明的能力.

13. 垂直且相等. 提示：先证明$\triangle ABE \cong \triangle DBC$，再证明$\triangle ABM \cong \triangle DBN$. 本题考查学生在复杂背景中综合运用三角形全等的判定、性质进行几何证明的能力.

第十九章　数据的分析

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 理解平均数、中位数和众数的统计意义.

2. 会计算中位数、众数、加权平均数，能选择适当的统计量表示数据的集中趋势.

3. 理解方差的统计意义，会计算简单数据的方差.

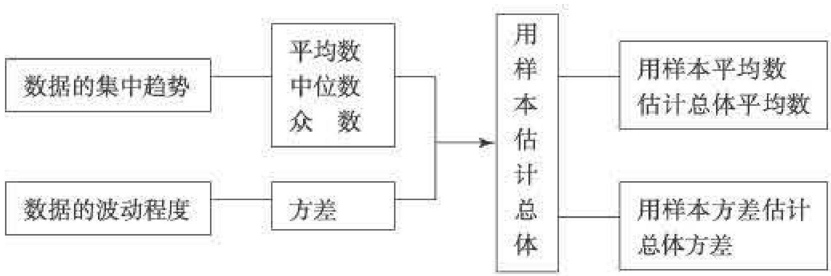
4. 能用计算器的统计功能进行统计计算，进一步体会计算器的优越性.

5. 会用样本平均数、方差估计总体平均数、方差，进一步感受抽样的必要性，体会用样本估计总体的思想.

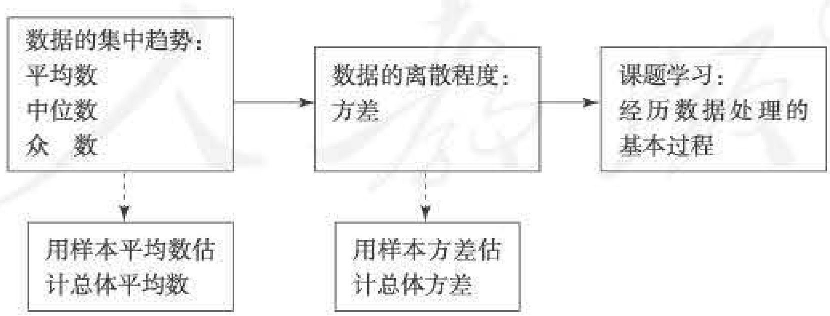
6. 从事收集、整理、描述和分析数据得出结论的统计活动，经历数据处理的基本过程，体验统计与生活的联系，感受统计在生活和生产中的作用，养成用数据说话的习惯和实事求是的科学态度.

二、本章知识结构框图

本章知识结构框图如下：



本章知识的展开顺序如下：



三、内容安排

从《课程标准》看，本章属于“统计与概率”领域. 对于“统计与概率”领域的内容，本套教科书独立于“数与代数”和“图形与几何”领域编写，共有三章. 这三章内容采用统计和概率分开编排的方式，前两章是统计，最后一章是概率. 统计部分的两章内容按照数据处理的基本过程来安

排. 六年级下册第十章介绍了数据的收集、整理与描述. 本章主要研究平均数（加权平均数）、中位数、众数以及方差等统计量的统计意义，学习如何利用这些统计量分析数据的集中趋势和离散程度，并通过研究如何用样本的平均数和方差估计总体的平均数和方差，进一步体会用样本估计总体的思想.

对于一组数据，利用统计图表整理和描述以后，数据分布的一些面貌和特征就可以通过这些图表反映出来. 为了进一步了解数据分布的特征和规律，还需要计算出一些特征量来表示这组数据的集中趋势或典型水平. 这些特征量代表这组数据频数分布中大量数据向一点集中的情况，从而反映出数据资料的典型水平. 例如，要想比较某校同年级两个班某学科的测验分数，不能将两个班每个学生的测验成绩一一列举出来进行比较. 因为每个学生的分数由于多种因素的影响，大多是不相同的，用个别学生的成绩进行比较是得不出什么结果的. 如果能够对每个班的学生成绩进行整理、加工之后，计算出一个或几个统计量来代表全班的测验水平，再比较就非常简单明了. 很显然，这个能够代表全班成绩水平的统计量应该具有以下特点之一：

（1）能够表明全班测验成绩中心点的统计量；

（2）能够表明全班测验成绩排序最中间的统计量；

（3）能够表明全班测验成绩出现最多的统计量；

（4）能够表明全班测验成绩分布范围的统计量.

这些统计量之所以能够代表全班成绩去进行比较，是因为它们从不同的角度度量了全班测验成绩集中于哪一点或哪一个范围，因此把它们统称为集中趋势的度量. 常用度量集中趋势的特征量有平均数、中位数、众数和分位数等，本章研究前三个统计量.

统计中常用的平均数有算术平均数（简单算术平均数和加权算术平均数）、调和平均数、几何平均数等. 根据《课程标准》的要求，本章着重研究了加权平均数. 教科书第 19.1.1 小节研究加权平均数，包括权的意义、作用和不同的形式. 首先，教科书设计了以招聘英文翻译为背景的实际问题，根据不同的招聘要求，各项成绩的“重要程度”不同，从而平均成绩不同，由此引入加权平均数的概念. 权的重要性在于它能够反映数据的相对“重要程度”. 为了更好地说明这一点，教科书设置“思考”栏目和例 1，从不同方面体现权的作用，使学生更好地理解加权平均数，体会权的意义和作用. 求加权平均数的问题形式多样，教科书在问题 1 和例 1 之后，又介绍了两种：一是在求 n 个数的算术平均数时，有时会遇到重复数据较多的情况，这时可以将求算术平均数的公式进行简化，比如可以写成 $\bar{x}=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$，此时 f_1，f_2，…，f_k 可以看成是 x_1，x_2，…，x_k 的权，只是这里权的意义并不是很突出；二是通过一个“探究”栏目，研究了对于区间分组的数据如何求加权平均数的问题，这类问题是统计中常见的. 通过不同形式的问题，教科书希望学生能对加权平均数有一个全面的认识. 最后，教科书结合例 3，介绍了如何利用样本平均数估计总体平均数的问题，使学生对抽样的必要性、样本的代表性和用样本估计总体的思想有了更深的体会.

第 19.1.2 小节，教科书研究了中位数和众数. 中位数是一个反映数据集中趋势的位置代表值，能够表明一组数据排序最中间的统计量，可以提供这组数据中约有一半的数据大于（或小于）中位数. 众数是表明一组数据出现次数最多的统计量，当一组数据有较多的重复数据时，众数往往是人们所关心的一个统计量，它提供了哪个（或哪些）数据出现的次数最多. 对于中位数和众数的作用，教科书安排了层层递进的几个问题来研究. 问题 2 是一个典型的员工收入问题，其情境蕴含了引入中位数和众数的必要性，并由此引入中位数和众数. 例 4 和例 5 分别利用体育比赛问题和销售

量问题说明了中位数和众数的作用．例 6 是一个综合利用平均数、中位数和众数解决问题的例子．这个例子涉及到根据具体问题的需要选择适当的统计量来刻画数据的集中趋势的问题，在解决问题的过程中，也让学生经历对数据适当分组，用表格整理数据，用统计图描述数据，分析统计图表和计算平均数、中位数、众数来分析数据的数据处理的基本过程．在本节最后，教科书利用一个“归纳”栏目，对平均数、中位数和众数这三种刻画数据集中趋势的统计量进行了概括总结，突出了它们各自的统计意义和各自的特征．

第 19.2 节，教科书研究了刻画数据波动程度的统计量．统计中刻画数据波动程度的统计量常有极差、方差、标准差、平均差、四分位差等，根据《课程标准》的要求，本章只研究方差，它是统计中常用的一种刻画数据波动程度的统计量．教科书根据农科院选择甜玉米种子的背景提出问题，从统计上看，这个问题是要计算两组数据的平均数和比较它们的波动情况．通过计算可知两组数据的平均数是相同的，这一点有利于学生理解数据的波动情况．为了直观看出数据的波动情况，教科书画出了两个散点图，通过观察散点图，可以比较两组数据的波动情况．这两个散点图使学生对数据偏离平均数的情况有一个直观的认识．在此基础上，教科书引进了利用方差刻画数据离散程度的方法，介绍了方差的公式，并从方差公式的结构上分析了方差是如何刻画数据的波动的，即方差越大，数据的波动越大；方差越小，数据的波动越小．将利用方差刻画数据的波动和利用散点图显示数据的波动结合起来，更有利于学生理解方差的意义．

第 19.3 节，教科书安排了一个具有一定综合性和活动性的“课题学习”．这个“课题学习”选用了与学生生活联系密切的体质健康问题．由于本章是统计部分的最后一章，因此这个“课题学习”的综合性比前一章统计中的课题学习更强．为了便于教学操作，教科书根据《体质健康标准登记表》提供了一个样例，样例中涉及到选择样本收集数据、用统计表图整理和描述数据，通过计算平均数、中位数、众数和方差等分析数据得出结论的统计过程．完成这个课题学习，要求学生综合运用本章以及以前所学有关数据处理的知识和方法，通过小组合作活动的方式，经历数据处理得出结论以及对所得结论进行解释和思辨的统计过程．在这个过程中，让学生进一步感受用样本估计总体的统计思想，进一步体验统计是进行决策的有力手段．

在本章中，利用计算器的统计功能可以方便地求出一组数据的平均数和方差，但由于不同品牌的计算器的操作步骤不同，因此教科书没有针对某一款计算器介绍统计功能的使用，而是概要地介绍了一下过程．

四、课时安排

本章教学时间约需 13 课时，具体分配如下（仅供参考）：

19.1　数据的代表	6 课时
19.2　数据的波动	3 课时
19.3　课题学习　体质健康测试中的数据分析	2 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 以统计思想为主线，强调统计量的意义

统计中常常从总体中抽出样本，通过分析样本数据来估计和推测总体的情况，用样本估计总体

是统计的基本思想. 这一基本思想贯穿了本章始末，即教科书在每一节都注意体现用样本估计总体的思想，研究如何用样本的集中趋势和波动程度估计总体的相应情况，使学生对抽样的必要性、样本的代表性、用样本估计总体的可行性，以及不同的抽样可能得到不同的结果等有更多体会. 例如，在第 19.1 节通过实例学习了如何用样本的平均数、中位数和众数估计总体的相应情况，在第 19.2 节通过实例研究了如何用样本的方差估计总体的方差的问题，在第 19.3 节的“课题学习”中让学生通过抽样进行统计调查活动，通过对样本数据的分析得出对总体的估计等.

对用于分析数据的统计量，如平均数、中位数、众数和方差等，教科书强调其统计意义的理解，如反映了数据哪方面的特征，各自的特点是什么，如何利用它们获得更多的信息等. 因此，教科书在引入时，关注其必要性，例如选用典型的员工收入问题，让学生思考平均数代表数据的优势和局限性，从而引入中位数和众数；应用时，注意采用解释、比较和选择等多种方式让学生理解统计量的意义，如教科书的例题和习题创设了分析、选择恰当统计量解决问题的情境，并在此基础上进行比较、总结，归纳出统计量各自的特点.

2. 通过活动，突出数据处理的基本过程，建立统计观念

统计观念反映的是由一组数据所引发的想法、能推测到的可能结果以及自觉地想到用统计的方法解决问题等，是在亲身经历统计活动的过程中培养出来的一种感觉. 培养统计观念的一种最有效的方法是让学生从事统计活动，经历统计活动的基本过程，在收集、整理、描述和分析数据的统计活动中，逐步学会用数据说话. 本套教科书特别注意让学生经历统计活动的基本过程，在活动中学习有关统计的知识和方法，建立统计观念. 例如，对于“统计与概率”领域中统计的内容，全套教科书以数据处理的基本过程为线索，按照数据的收集与整理、数据的描述、数据的分析来安排统计内容. 在每一章中，对于统计的知识和方法又都是放在数据处理的基本过程中来学习的，本章也是如此. 例如，本章在研究选择适当的统计量刻画数据的集中趋势的问题时，教科书从一个实际问题（例 6）出发，要求学生通过活动，经历数据处理的基本过程，在这个过程中，学习根据实际问题的需要，依照各统计量的特征来选择它们描述数据的集中趋势. 再如，本章第 19.3 节的“课题学习”，强调让学生综合利用所学的统计知识和方法，通过调查活动获得一些信息. 动手处理数据并展示自己的成果是一个活动性很强，并且充满乐趣的过程，在这个活动中，学生将经历收集、整理、描述和分析数据得出结论，并对结论进行解释或思辨的过程. 这样的一种处理方式，将统计的概念、方法与原理统一到数据处理的活动过程中，使学生更好地体会统计的思想，帮助学生建立统计观念.

3. 选取丰富的素材，体现统计与生活的密切联系

统计与现实生活的联系是非常紧密的，这一领域的内容对学生来说应该是充满趣味性和吸引力的. 本套教科书编写时特别注意将统计的学习与实际问题紧密结合，选择典型的、学生感兴趣的和富有时代气息的现实问题作为例子，在解决这些实际问题的过程中，学习数据处理的方法，理解统计的概念和原理，本章亦是如此. 例如，在第 19.1 节中，教科书利用“公司招聘职员”“演讲比赛成绩”“公共汽车载客量”“灯泡的使用寿命”等实际问题来学习加权平均数，利用“体育比赛成绩”“鞋店销售量”等学习中位数和众数，在解决实际问题的过程中体现加权平均数、中位数和众数的统计意义. 又如，在第 19.2 节中，借助于“年龄”“身高”“选择甜玉米种子”等实际问题，研究方差，结合这些实际问题情境，使学生更好地理解方差的统计意义. 再如，在第 19.3 节中，教科书选择了一个与学生生活密切联系的“体质健康测试中的数据分析”作为“课题学习”，要求学生综合运用本章知识和方法进行统计活动. 这样的一种与实际问题紧密结合的编写方式，可以使

学生在解决实际问题的过程中，学习有关的统计知识和方法，体会统计的思想，同时也使学生感受到统计与实际生活的密切联系，以及统计在解决现实问题中的作用.

六、对本章教学的建议

1. 注意与前两个学段相关内容的衔接

本章是第三学段“统计与概率”领域中统计的最后一章，主要学习分析数据集中趋势和离散程度的知识与方法，这也是数据处理的最后一个环节. 对于数据的分析，《课程标准》在第二学段和本学段都有要求，第二学段要求“体会平均数的作用，能计算平均数，能用自己的语言解释其实际意义”. 这样看来，对于分析数据集中趋势的平均数，学生在第二学段已经有所接触，已经会求平均数.《课程标准》在本学段要求“理解平均数的意义，能计算中位数、众数、加权平均数，了解它们是数据集中趋势的描述；体会刻画数据离散程度的意义，会计算简单数据的方差”. 因此，本学段在第二学段的基础上，需要学习利用加权平均数、中位数和众数刻画数据的集中趋势以及用方差刻画数据的离散程度等. 据此，本章在编写时，注意与前两个学段的衔接，将三个学段的相关内容，在分析数据的这个大背景下统一起来，在对学生已有的相关知识进行复习的基础上学习新的知识. 例如，对于平均数，本章就是在研究数据集中趋势的大背景下，在复习学生已学的平均数的基础上，学习加权平均数、中位数和众数，研究如何根据统计量的特征选择适当的统计量描述数据的集中趋势等. 这样的一种编写方式，将三个学段的学习连成一个相互联系、螺旋上升的整体. 因此，教学中要注意对已有知识的复习，在复习的基础上学习新内容，使学生对于分析数据的知识和方法形成整体认识.

2. 准确把握教学要求

对于统计中一些重要的思想方法，本套教科书采用螺旋上升的编排方式. 例如，关于用样本估计总体的思想，《课程标准》在本学段要求“体会样本与总体的关系，知道可以通过样本平均数、样本方差推断总体平均数和总体方差”等. 对于这个要求，教科书在第十章“数据的收集、整理与描述”和本章都有安排，但在要求上层次不同. 第十章从收集数据的角度研究抽样调查，要求初步感受抽样调查的必要性，初步体会用样本估计总体的思想. 本章要求通过较多实例，从不同的方面进一步感受抽样的必要性，并初步感受样本的代表性，体会不同的抽样可能得到不同的结果，能够用样本的平均数、方差估计总体的平均数、方差等. 因此，在本章教学时，要注意把握教学要求.

3. 合理使用计算机（器）

信息技术的发展给统计学的研究带来很大变化，为统计工作的高效、准确提供了便捷的工具. 对于计算机（器）等现代信息技术对统计的作用，本套教科书给予充分重视. 本章中，编写了使用计算器求一组数据的平均数和方差的内容作为必学内容，还编写了利用计算机求平均数、中位数、众数和方差等统计量的内容作为选学内容等. 教学中要注意发挥计算机（器）在处理数据中的作用，也要注意合理地使用计算机（器）. 比如，在初学加权平均数和方差的概念时，应该让学生使用笔算或使用计算器的一般计算功能进行计算，使学生对求加权平均数方法和方差的结构有更多的理解，在此基础上，再学习使用计算器的统计功能求平均数或方差的方法，将学习重点放在理解统计思想和从事统计活动上来.

Ⅱ 教材分析

[1] 章前图是一张玉米地的照片，这张照片是本章章前引言的背景图. 在背景图上有一个表格，这个表格提供了甲、乙两种甜玉米在试验田中的产量. 表格下方是这两种甜玉米在试验田中产量的平均数和方差，这些结果的计算过程在第19.2节.

第十九章 数据的分析

用样本估计总体是统计的基本思想. 当所要考察的总体中个体很多或者对考察对象带有破坏性时，我们常常通过用样本估计总体的方法来了解总体. 看下面的问题：

农科院为了选出适合某地种植的甜玉米种子，对甲、乙两个品种各用10块自然条件相同的试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量（见下表）. 根据这些数据，应为农科院选择甜玉米种子提出怎样的建议呢？

甜玉米的产量和产量的稳定性是农科院选择种子时所关心的问题. 如何考察一种甜玉米的产量和产量的稳定性呢？这要用到本章将要学习的如何用样本的平均数和方差估计总体的平均数和方差等知识.

通过本章的学习，你将对数据的作用有更多的认识，对用样本估计总体的思想有更深的体会.

[1]

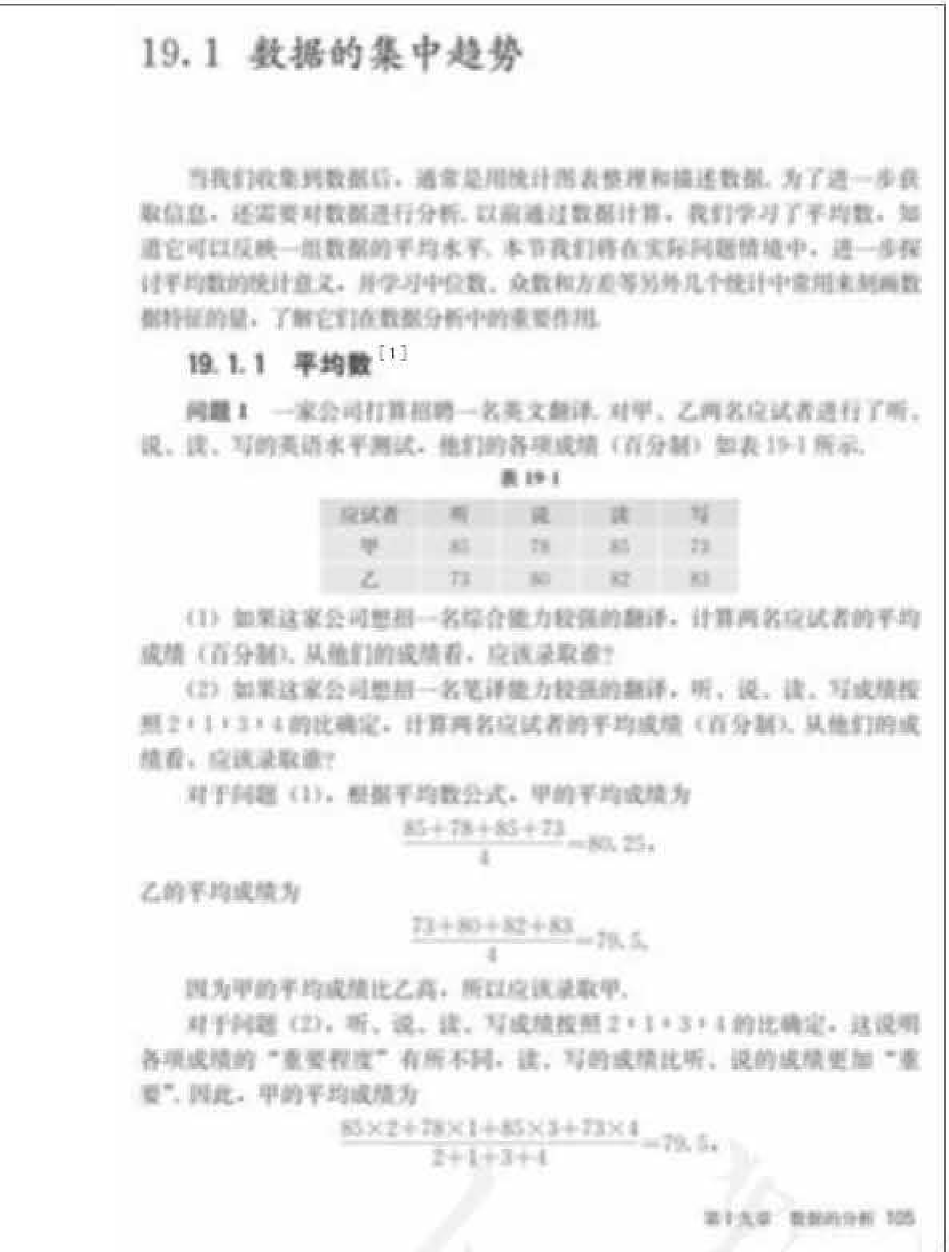
品种	各试验田每公顷产量/t				
甲	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
乙	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

1. 收集、整理、描述和分析数据是数据处理的一个基本过程. 在本套教科书第十章，已学习了数据的收集、整理与描述，本章在此基础上，学习利用数据的数字特征刻画数据的分布特征.

2. 一般地，通过数字特征刻画数据的分布特征，可以从三个方面来分析：一是分析数据分布的集中趋势，反映数据向其中心值（平均数）靠拢或聚集的程度；二是分析数据分布的离散程度，反映数据远离其中心值（平均数）的趋势；三是分析数据分布的偏态和峰度，反映数据分布的形状. 本章就前两个方面研究数据的分布特征.

3. 本章分为三节：第一节是利用加权平均数、中位数和众数刻画数据的集中趋势；第二节是利用方差刻画数据的波动情况；第三节是综合利用本章以及以前所学有关统计的知识和方法完成一个课题学习.



19.1 数据的集中趋势

当我们收集到数据后，通常是用统计图表整理和描述数据. 为了进一步获取信息，还需要对数据进行分析. 以前通过数据计算，我们学习了平均数，知道它可以反映一组数据的平均水平. 本节我们将在实际问题情境中，进一步探讨平均数的统计意义，并学习中位数、众数和方差等另外几个统计中常用来刻画数据特征的量，了解它们在数据分析中的重要作用.

19.1.1 平均数[1]

问题1 一家公司打算招聘一名英文翻译. 对甲、乙两名应试者进行了听、说、读、写的英语水平测试，他们的各项成绩（百分制）如表19-1所示.

表19-1

应试者	听	说	读	写
甲	85	78	85	73
乙	73	80	82	83

（1）如果这家公司想招一名综合能力较强的翻译，计算两名应试者的平均成绩（百分制）. 从他们的成绩看，应该录取谁？

（2）如果这家公司想招一名笔译能力较强的翻译，听、说、读、写成绩按照 2∶1∶3∶4 的比确定，计算两名应试者的平均成绩（百分制）. 从他们的成绩看，应该录取谁？

对于问题（1），根据平均数公式，甲的平均成绩为

$$\frac{85+78+85+73}{4}=80.25,$$

乙的平均成绩为

$$\frac{73+80+82+83}{4}=79.5.$$

因为甲的平均成绩比乙高，所以应该录取甲.

对于问题（2），听、说、读、写成绩按照 2∶1∶3∶4 的比确定，这说明各项成绩的“重要程度”有所不同，读、写的成绩比听、说的成绩更加“重要”. 因此，甲的平均成绩为

$$\frac{85\times2+78\times1+85\times3+73\times4}{2+1+3+4}=79.5,$$

第十九章 数据的分析 105

［1］根据《课程标准》的要求，在第二学段已经学习了有关平均数的知识. 本节在复习相关内容基础上，继续学习加权平均数、中位数和众数，并用样本的（加权）平均数、中位数、众数估计总体相应的数字特征等内容.

1. 本节的主要内容是加权平均数、中位数和众数. 通过本节的学习，应使学生会计算并理解加权平均数、中位数和众数等统计量的统计意义，并能选择适当的统计量表示数据的集中趋势.

2. 节名“数据的集中趋势”是指利用平均数、中位数、众数等刻画一组数据的集中趋势. 所谓集中趋势是指一组数据向某一中心值靠拢的倾向，度量集中趋势就是寻找数据一般水平的代表值或中心值.

3. 在刻画一组数据的集中趋势的统计量中，以平均数最为重要，其应用最为广泛. 这是因为，平均数是一组数据的“重心”，是度量一组数据的波动大小的基准. 例如，定义一组数据的方差时，就是从其中各个数据与它们的平均数的差入手的. 从这个意义上讲，学习平均数是学习方差的基础.

4. 统计中常用的平均数有算术平均数、调和

乙的平均成绩为

$$\frac{73\times2+80\times1+82\times3+83\times4}{2+1+3+4}=80.4.$$

因为乙的平均成绩比甲高，所以应该录取乙.[1]

上述问题（1）是利用平均数的公式计算平均成绩，其中的每个数据被认为同等重要. 而问题（2）是根据实际需要对不同类型的数据赋予与其重要程度相应的比重，其中的 2，1，3，4 分别称为听、说、读、写四项成绩的**权**（weight），相应的平均数 79.5，80.4 分别称为甲和乙的听、说、读、写四项成绩的**加权平均数**[2]（weighted average）.

一般地，若 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的权分别是 w_1，w_2，…，w_n，则

$$\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

叫做这 n 个数的加权平均数.

权的英文是 weight，有表示数据重要程度的意思.

思考

如果这家公司想招一名口语能力较强的翻译，听、说、读、写成绩按照 3∶3∶2∶2 的比确定，那么甲、乙两人谁将被录取？与上述问题中的（1）（2）相比较，你能体会到权的作用吗？[3]

例 1 一次演讲比赛中，评委将从演讲内容、演讲能力、演讲效果三个方面为选手打分，各项成绩均按百分制计，然后再按演讲内容占 50%、演讲能力占 40%、演讲效果占 10%，计算选手的综合成绩（百分制）. 进入决赛的前两名选手的单项成绩如表 19-2 所示，请确定两人的名次.

表 19-2

选手	演讲内容	演讲能力	演讲效果
A	85	95	95
B	95	85	95

分析：这个问题可以看成是求两名选手三项成绩的加权平均数，50%，40%，10% 说明演讲内容、演讲能力、演讲效果三项成绩在总成绩中的重要程度，是三项成绩的权.[4]

106 第十九章 数据的分析

[1] 对于甲、乙两名应试者，由于在（1）（2）两种情况下听、说、读、写的“重要程度”不同，使得最后结果截然不同. 教学中注意让学生体会这一点，并由此学习加权平均数.

[2] 加权平均数也是一种算术平均数.

[3] 通过比较三个结论，可以让学生体会不同的权对最后结果的影响，加深学生对权意义的认识.

[4] 教学时，可以让学生先计算不加权的平均数，并将所得结论与例 1 的结论作比较，让学生进一步体会权的作用.

平均数、几何平均数等. 在数学上，算术平均数有简单的和加权的两种形式. 在统计上，简单算术平均数主要用于处理未分组的原始数据，而加权算术平均数只能用于适当类型的分组数据. 简单算术平均数的大小只与数据的大小有关，而加权平均数的大小不仅受各组变量值大小的影响，而且受各组变量值出现的频数大小的影响. 如果某一组的权数较大，说明该组的数据较多，那么该组数据对平均数的影响就越大，反之就越小. 实际上，如果将计算加权平均数的公式变形为下面的形式，能更清楚地看出这一点.

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\\&=x_1\frac{w_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}w_i}+x_2\frac{w_2}{\sum\limits_{i=1}^{n}w_i}+\cdots+x_n\frac{w_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}w_i}.\end{aligned}$$

从上式可以看出，加权平均数受 x_i 和权 ω_i 的影响.

5. 问题 1 和例 1 是比较典型的求加权平均

解：选手A的最后得分是

$$\frac{85\times 50\%+95\times 40\%+95\times 10\%}{50\%+40\%+10\%}=90,$$

选手B的最后得分是

$$\frac{95\times 50\%+85\times 40\%+95\times 10\%}{50\%+40\%+10\%}=91.$$

由上可知选手B获得第一名，选手A获得第二名.

例1中两名选手的单项成绩都是两个95分与一个85分，为什么他们的最后得分不同呢？从中你能体会到权的作用吗？

练习

1. 某公司欲招聘一名公关人员，对甲、乙两位应试者进行了面试和笔试，他们的成绩（百分制）如下表所示.

应试者	面试	笔试
甲	86	90
乙	92	83

(1) 如果公司认为面试和笔试成绩同等重要，从他们的成绩看，谁将被录取？

(2) 如果公司认为，作为公关人员面试成绩应该比笔试成绩更重要，并分别赋予它们6和4的权，计算甲、乙两人各自的平均成绩，谁将被录取？

2. 晨光中学规定学生的学期体育成绩满分为100，其中早锻炼及体育课外活动占20%，期中考试成绩占30%，期末考试成绩占50%. 小桐的三项成绩（百分制）依次是95，90，85. 小桐这学期的体育成绩是多少？

在求 n 个数的平均数时，如果 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次……x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），那么这 n 个数的平均数

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$$

也叫做 x_1，x_2，…，x_k 这 k 个数的加权平均数，其中 f_1，f_2，…，f_k 分别叫做 x_1，x_2，…，x_k 的权.

例2 某跳水队为了解运动员的年龄情况，作了一次年龄调查，结果如下：13岁8人，14岁16人，15岁24人，16岁2人. 求这个跳水队运动员的平均年龄（结果取整数）.

第十九章 数据的分析 107

练习答案

1. (1) 甲将被录取；
   (2) 乙将被录取.
2. 小桐这学期的体育成绩是88.5分.

数的问题，能很好地反映权的作用. 问题1中，权是以一个比例的形式给出的；例1中，权是以百分比的形式给出的. 教学中要注意让学生认真体会.

6. 在求 n 个数据的简单算术平均数时，如果有 k 个数据多次重复出现，求这 n 个数据的简单算术平均数可以看作是求 k 个数据的加权平均数. 这样一方面可以简化计算，另一方面也能体现某个数据 x_i 在求平均数时所占的分量. 教科书给出了相应的公式，并安排了例2说明公式的应用.

7. “探究”栏目中的问题是根据频数分布表求平均数的问题. 这也是一种比较典型的求加权平均数的问题. 由于数据已经分组，并知道每一组的频数，因此可以利用组中值和频数近似地计算一组数据的平均数. 这里应该提醒学生，由于不知道原始数据，因此求出的加权平均数是一个近似的估计值，其中也体现了统计学的思维方式

[1] 这个“探究”研究的是在不知原始数据的情况下，如何根据分组数据求加权平均数的问题.

[2] 一般的计算器都有统计功能. 由于不同品牌的计算器的操作步骤有所不同，因此，教科书只是简要地介绍了一般的情况. 教学中，可以结合学生的实际，根据计算器的使用说明，学习使用计算器的统计功能求平均数的方法，使学生体会利用计算器求平均数的快捷和方便.

解：这个跳水队运动员的平均年龄为

$$\bar{x}=\frac{13\times8+14\times16+15\times24+16\times2}{8+16+24+2}\approx14(\text{岁}).$$

探究[1]

为了解5路公共汽车的运营情况，公交部门统计了某天5路公共汽车每个运行班次的载客量，得到表19-3. 这天5路公共汽车平均每班的载客量是多少（结果取整数）？

表 19-3

载客量/人	组中值	频数（班次）
$1\leqslant x<21$	11	3
$21\leqslant x<41$	31	5
$41\leqslant x<61$	51	20
$61\leqslant x<81$	71	22
$81\leqslant x<101$	91	18
$101\leqslant x<121$	111	15

数据分组后，一个小组的组中值是指这个小组的两个端点的数的平均数. 例如，小组 $1\leqslant x<21$ 的组中值为 $\frac{1+21}{2}=11$.

根据上面的频数分布表求加权平均数时，统计中常用各组的组中值代表各组的实际数据，把各组的频数看作相应组中值的权. 例如在 $1\leqslant x<21$ 之间的载客量近似地看作组中值11，组中值11的权是它的频数3. 因此这天5路公共汽车平均每班的载客量是

$$\bar{x}=\frac{11\times3+31\times5+51\times20+71\times22+91\times18+111\times15}{3+5+20+22+18+15}$$

$$\approx73(\text{人}).$$

一般的计算器都有统计功能，利用统计功能可以求平均数. 使用计算器的统计功能求平均数时，不同品牌的计算器的操作步骤有所不同，操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常需要先按动有关键，使计算器进入统计状态；然后依次输入数据 x_1，x_2，…，x_k 以及它们的权 f_1，f_2，…，f_k；最后按动求平均数的功能键（例如 $\boxed{\bar{x}}$ 键），计算器便会求出平均数 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$ 的值.[2]

与数学思维方式的不同.

8. 关于组中值的概念，教学中，可以结合“探究”栏目边空中的提示，让学生简单了解，以便学习“探究”中求加权平均数的问题.

9. 学习平均数（主要是加权平均数）的目的是要让学生理解平均数的统计意义，认识到平均数是刻画数据集中趋势的常用的一个统计量，对于平均数（主要是加权平均数）的计算不是本节的重点. 教学中提倡使用计算器的统计功能求平均数，当然利用笔算求平均数的训练也是必要的，这样可以使学生熟悉加权平均数的计算公式，也有利于理解平均数的统计意义.

10. 例3之前，教科书并没有涉及用样本估计总体的情况. 例3是一个典型的用样本估计总体的例子，因为要考察一批灯泡的使用寿命，考察本身带有破坏性，因此不能用全面调查的方法，只能通过抽样，利用部分灯泡的平均使用寿命估计这批灯泡的平均使用寿命，即用样本的平

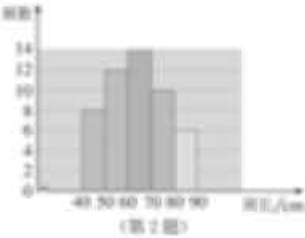
练习

1. 下表是校女子排球队队员的年龄分布.

年龄/岁	13	14	15	16
频数	1	4	5	2

求校女子排球队队员的平均年龄（可以使用计算器）.

2. 为了绿化环境，柳荫街引进一批法国梧桐. 三年后这些树的树干的周长情况如右图所示. 计算这批法国梧桐树树干的平均周长（结果取整数，可以使用计算器）.



（第2题）

我们知道，当所要考察的对象很多，或者对考察对象带有破坏性时，统计中常常通过用样本估计总体的方法来获得对总体的认识. 例如，实际生活中经常用样本的平均数来估计总体的平均数.

例3 某灯泡厂为测量一批灯泡的使用寿命，从中随机抽查了50只灯泡. 它们的使用寿命如表19-4所示. 这批灯泡的平均使用寿命是多少?[1]

表19-4

使用寿命 x/h	$600\leq x<1\,000$	$1\,000\leq x<1\,400$	$1\,400\leq x<1\,800$	$1\,800\leq x<2\,200$	$2\,200\leq x<2\,600$
灯泡只数	5	10	12	17	6

分析： 抽出的50只灯泡的使用寿命组成一个样本. 可以利用样本的平均使用寿命来估计这批灯泡的平均使用寿命.

解： 根据表19-4，可以得出各小组的组中值，于是

$$\bar{x}=\frac{800\times5+1\,200\times10+1\,600\times12+2\,000\times17+2\,400\times6}{50}$$

$=1\,672$.

即样本平均数为1 672.

因此，可以估计这批灯泡的平均使用寿命大约是1 672 h.

用全面调查的方法考察这批灯泡的平均使用寿命合适吗?

第十九章 数据的分析 109

练习答案

1. 校女子排球队队员的平均年龄约为15岁.
2. 这批法国梧桐树树干的平均周长为64 cm.

[1] 在本套书的第十章“数据的收集、整理与描述”中学习了有关抽样调查的初步知识，以及用样本估计总体的内容. 本节从例3开始，在前一章基础上，继续学习用样本的平均数、中位数和众数估计总体相应的数字特征的问题.

均数估计总体的平均数.

11. 在统计中，之所以要用样本的情况去估计总体的情况，主要基于以下两点：一是在很多情况下总体包含的个体数往往很多，不可能一一加以考察；二是有些从总体中抽取个体的试验带有破坏性，因而抽取的个体不允许太多.

12. 对于用样本估计总体的思想，本套教科书给予了充分的关注，在统计部分的两章中，充分渗透了这个思想. 如本章中，涉及用样本的平均数、中位数、众数和方差估计总体的平均数、中位数、众数和方差. 教学时，应让学生充分经历用样本估计总体的学习过程.

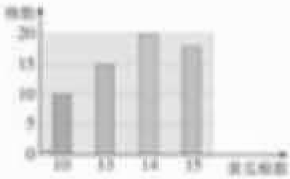
练习答案

这个新品种黄瓜平均每株结约 13 根.

[1] 通过分析实际案例，有助于学生发现和理解平均数和中位数的特征. 教学中，可以再选取一些统计中的典型问题帮助学生理解数字特征.

练习

种菜能手李大叔种植了一批新品种黄瓜. 为了考察这种黄瓜的生长情况，他随机抽查了部分黄瓜藤上长出的黄瓜根数，得到右面的条形图. 请估计这个新品种黄瓜平均每株结多少根黄瓜.（结果取整数）



19.1.2 中位数和众数

问题 2 表 19-5 是某公司员工月收入的资料.

表 19-5

月收入/元	45 000	18 000	10 000	5 500	5 000	3 400	3 000	1 000
人数	1	1	1	3	6	1	11	2

（1）计算这个公司员工月收入的平均数；

（2）若用（1）算得的平均数反映公司全体员工月收入水平，你认为合适吗?

这个公司员工月收入的平均数为 6 276. 但在 25 名员工中，仅有 3 名员工的收入在 6 276 元以上，而另外 22 名员工的收入都在 6 276 元以下. 因此，用月收入的平均数反映所有员工的月收入水平，不太合适. 利用中位数可以更好地反映这组数据的集中趋势.

将一组数据按照由小到大（或由大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则称处于中间位置的数为这组数据的**中位数**（median）；如果数据的个数是偶数，则称中间两个数据的平均数为这组数据的中位数.

利用中位数分析数据可以获得一些信息. 例如，上述问题中将公司 25 名员工月收入数据由小到大排列，得到的中位数为 3 400，这说明除去月收入为 3 400 元的员工，一半员工收入高于 3 400 元，另一半员工收入低于 3 400 元.

思考[1]

上述问题中公司员工月收入的平均数为什么会比中位数高得多呢?

13. 中位数和众数是第三学段统计部分新学习的内容，它们都是刻画数据集中趋势的统计量. 中位数是一个反映数据集中趋势的位置代表值，能够表明一组数据排序最中间的统计量，可以提供这组数据中，约有一半的数据大于（或小于）中位数. 众数是表明一组数据出现次数最多的统计量，当一组数据有较多的重复数据时，众数往往是人们所关心的一个统计量，它提供了哪个（或哪些）数据出现的次数最多.

14. 虽然平均数在现实生活中较为常用，但是由于它易受极端值影响，因此，在某些情境下，用它刻画数据的集中趋势就不太合适. 如教科书的问题 2，说明了在不同情境下，需要选择恰当的统计量刻画数据的集中趋势，从而引入中位数和众数. 教学中，应注意让学生体会引入中位数和众数的必要性，并通过比较，理解它们的统计意义.

15. 例 4 和例 5 是两个实际案例，研究了如

例4 在一次男子马拉松长跑比赛中，抽得12名选手所用的时间（单位：min）如下：

136	140	129	180	124	154
146	145	158	175	165	148

（1）样本数据（12名选手的成绩）的中位数是多少？

（2）一名选手的成绩是142 min，他的成绩如何？[1]

解：（1）先将样本数据按照由小到大的顺序排列：

124	129	136	140	145	146
148	154	158	165	175	180

这组数据的中位数为处于中间的两个数146，148的平均数，即

$$\frac{146+148}{2}=147.$$

因此样本数据的中位数是147.

（2）根据（1）中得到的样本数据的中位数，可以估计，在这次马拉松比赛中，大约有一半选手的成绩快于147 min，有一半选手的成绩慢于147 min. 这名选手的成绩是142 min，快于中位数147 min，可以推测他的成绩比一半以上选手的成绩好.

练习

下面的条形图描述了某车间工人日加工零件数的情况。

请找出这些工人日加工零件数的中位数，并说明这个中位数的意义。

第十九章 数据的分析 111

［1］可以先计算这个样本的平均成绩，再将这名选手的成绩与这个平均成绩进行比较.

练习答案

将这些工人的日加工零件数由小到大排列后，位于中间位置的数是6，因此这组数据的中位数是6.

何利用样本的中位数和众数估计总体中位数和众数的问题，加深学生对这两个统计量的理解.

16. 例4的第（1）问是为第（2）问作铺垫的. 在第（2）问中，要根据样本（12名选手的成绩）的中位数，估计成绩为142 min的选手的水平. 由于这名选手的成绩不在样本数据当中，因此用样本的中位数进行估计是一个较好的方法. 当然，也可以用其他的方法评价这名选手的成绩，比如可以先计算样本的平均数，即平均成绩，用样本的平均成绩估计这次比赛的平均成绩，再将这名选手的成绩与这个平均成绩进行比较等. 关于这个问题，教科书在边空提出了问题，教学中可以引导学生利用不同的方法解决问题.

17. 例5是一个实际问题，要求根据某段时间内鞋的销售量的情况提出进货建议. 这是一个典型的利用样本的众数估计总体的众数的问题. 在这个问题情境中，学生比较容易理解利用众数

一组数据中出现次数最多的数据称为这组数据的**众数**（mode）。

当一组数据有较多的重复数据时，众数往往能更好地反映其集中趋势．例如，问题 2 中公司员工月收入的众数为 3 000，这说明公司中月收入 3 000 元的员工人数最多．如果应聘公司的普通员工一职，这个众数能提供更为有用的信息．

例 5 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋 30 双，各种尺码鞋的销售量如表 19-6 所示．你能根据表中的数据为这家鞋店提供进货建议吗？

表 19-6

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	11	7	3	1

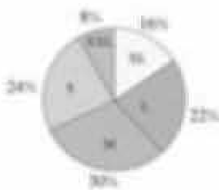
分析：一般来讲，鞋店比较关心哪种尺码的鞋销售量最大，也就是关心卖出的鞋的尺码组成的一组数据的众数．一段时间内卖出的 30 双女鞋的尺码组成一个样本数据，通过分析样本数据可以找出样本数据的众数，进而可以估计这家鞋店销售哪种尺码的鞋最多．

解：由表 19-6 可以看出，在鞋的尺码组成的数据中，23.5 是这组数据的众数，即 23.5 cm 的鞋销售量最大．因此可以建议鞋店多进 23.5 cm 的鞋．

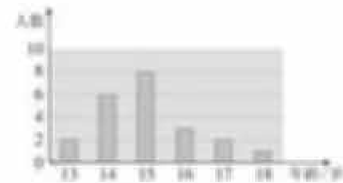
分析表中的数据，你还能为鞋店进货提出哪些建议？

练习

1. 下面的扇形图描述了某种运动服的 S 号、M 号、L 号、XL 号、XXL 号在一家商场的销售情况．请你为这家商场提出进货建议．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 某校男子足球队的年龄分布如上面的条形图所示．请找出这些队员年龄的平均数、众数、中位数，并解释它们的意义．

112 第十九章 数据的分析

练习答案

1. 从扇形图中可以看出，M 号的运动服销量最大，占到 30%，因此可以建议商家多进 M 号的运动服．
2. 这个学校男子足球队队员的年龄的平均数是 15，众数是 15，中位数是 15．

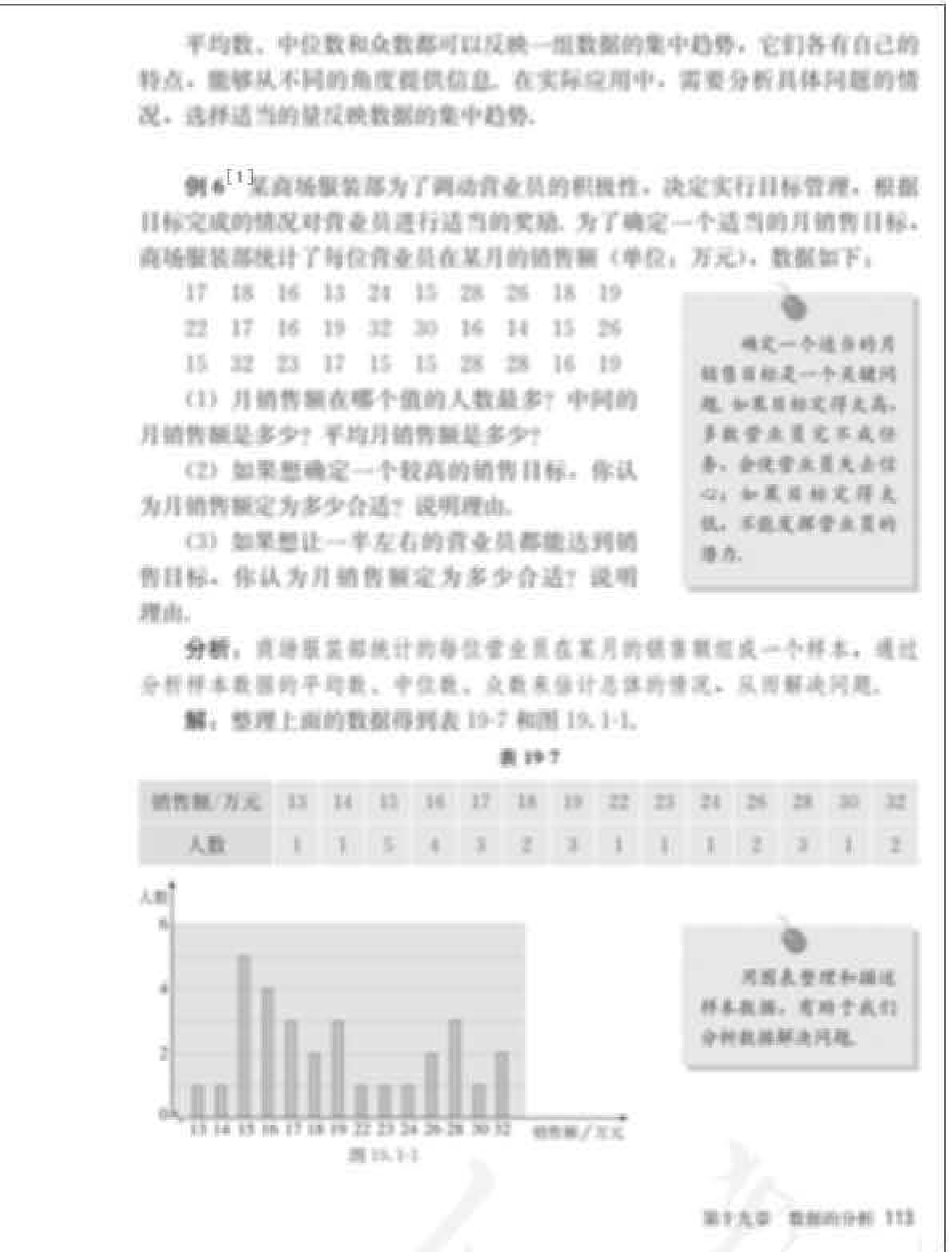
解决问题的合理性，能较好地体现众数的意义和作用，教学中要注意让学生体会众数的作用．

另外，在例 5 中，利用销售量的数据为鞋店提供进货建议，是一个开放性的问题．可以从不同的角度分析数据，为鞋店提供更具体的建议．教科书在边空处提出的这个问题，教学中要引导学生从不同的角度分析．

18. 平均数、中位数和众数是度量集中趋势的三个主要特征数，它们具有不同的特点和应用场合，掌握它们之间的关系和各自的不同特点，有助于我们在实际应用中选择合理的统计量来描述数据的集中趋势．

平均数是通过计算获得的，利用了全部数据信息，它具有优良的数学性质，是实际中应用最广泛的集中趋势度量值，但平均数的主要缺点是易受数据极端值的影响．

中位数是一组数据中间位置上的代表值，与中位数类似的还有四分位数、十分位数和百分位



平均数、中位数和众数都可以反映一组数据的集中趋势，它们各有自己的特点，能够从不同的角度提供信息. 在实际应用中，需要分析具体问题的情况，选择适当的量反映数据的集中趋势.

例 6[1] 某商场服装部为了调动营业员的积极性，决定实行目标管理，根据目标完成的情况对营业员进行适当的奖励. 为了确定一个适当的月销售目标，商场服装部统计了每位营业员在某月的销售额（单位：万元），数据如下：

17 18 16 13 24 15 28 26 18 19
22 17 16 19 32 30 16 14 15 26
15 32 23 17 15 15 28 28 16 19

（1）月销售额在哪个值的人数最多？中间的月销售额是多少？平均月销售额是多少？

（2）如果想确定一个较高的销售目标，你认为月销售额定为多少合适？说明理由.

（3）如果想让一半左右的营业员都能达到销售目标，你认为月销售额定为多少合适？说明理由.

确定一个适当的月销售目标是一个关键问题. 如果目标定得太高，多数营业员完不成任务，会使营业员失去信心；如果目标定得太低，不能发挥营业员的潜力.

分析：商场服装部统计的每位营业员在某月的销售额组成一个样本，通过分析样本数据的平均数、中位数、众数来估计总体的情况，从而解决问题.

解：整理上面的数据得到表 19-7 和图 19.1-1.

表 19-7

销售额/万元	13	14	15	16	17	18	19	22	23	24	26	28	30	32
人数	1	1	5	4	3	2	3	1	1	1	2	3	1	2

图 19.1-1

用图表整理和描述样本数据，有助于我们分析数据解决问题.

第十九章 数据的分析 113

[1] 这个例题的综合性较强，学生理解起来有一定的难度. 教学中注意让学生理解实际问题情境，结合实际情境找到解决问题的思路.

数等，它们也都是位置代表值，其特点是不受数据极端值的影响.

众数是一组数据的峰值，它是一种位置代表值，不受极端值的影响，其缺点是不具有唯一性，对于一组数据可能有一个众数，也可能有两个或多个众数，也可能没有众数.

在实际应用中，选择哪一个统计量来描述数据的集中趋势，需要综合考虑问题的具体情况、数据的特征以及统计量的特点等作出选择.

19. 在例 3、例 4 和例 5 的基础上，教科书设计了例 6. 例 6 提供了一个实际问题情境，给出了一组数据，要求根据这组数据，综合利用本节所学知识，从平均数、中位数和众数中选择适当的统计量来解决实际问题.

例 6 的第（1）问，很明显是求这组数据的众数、中位数和平均数，但第（2）（3）问有一定的难度，尤其是从什么角度分析问题得到解决问题的思路，对学生来讲有一定的挑战性. 教学

[1] 从条形图中比较容易找到数据的众数和中位数.

[2] 在体操比赛评分时，去掉一个最高分和一个最低分，目的是减小极端值对平均数的影响，使得选手的得分更加公平.

（1）从表 19-7 或图 19.1-1 可以看出，样本数据的众数是 15，中位数是 18.[1] 利用计算器求得这组数据的平均数约是 20. 可以推测，这个服装部营业员的月销售额为 15 万元的人数最多，中间的月销售额是 18 万元，平均月销售额大约是 20 万元.

（2）如果想确定一个较高的销售目标，这个目标可以定为每月 20 万元（平均数）. 因为从样本数据看，在平均数、中位数和众数中，平均数最大. 可以估计，月销售额定为每月 20 万元是一个较高目标，大约会有 $\frac{1}{3}$ 的营业员获得奖励.

（3）如果想让一半左右的营业员能够达到销售目标，月销售额可以定为每月 18 万元（中位数）. 因为从样本情况看，月销售额在 18 万元以上（含 18 万元）的有 16 人，占总人数的一半左右. 可以估计，如果月销售额定为 18 万元，将有一半左右的营业员获得奖励.

归纳

平均数、中位数、众数都刻画了数据的集中趋势，但它们各有特点.

平均数的计算要用到所有的数据，它能够充分利用数据提供的信息，因此在现实生活中较为常用. 但它受极端值（一组数据中与其余数据差异很大的数据）的影响较大.

当一组数据中某些数据多次重复出现时，众数往往是人们关心的一个量，众数不易受极端值的影响.

中位数只需要很少的计算，它也不易受极端值的影响.

你知道在体操比赛评分时，为什么去掉一个最高分和一个最低分吗？[2]

中要注意结合问题情境和数据特征，分析各种统计量的意义，引导学生找到解决问题的策略.

从上面的分析可以看出，例 6 是一个综合性较强的题目. 在例 6 的教学中，要注意让学生充分体会各种统计量的意义，对选择适当的统计量解决问题、用样本估计总体以及数据处理的基本过程有进一步的认识.

20. 在本小节最后，教科书以一个“归纳”栏目对平均数、中位数和众数的特征进行概括总结，这些结论在本节内容的展开过程中已经得到充分体现. 教学中，可以让学生结合具体例子进行概括总结，切忌死记硬背.

21. 本节正文中涉及的数据基本上都是原始数据. 本节练习中，教科书注意安排了一些通过读统计图表获得数据信息的题目，要求首先从统计图获得数据，然后对这些数据进行分析，即利用这些数据求它们的平均数、中位数和众数.

练习

下面是某校八年级（2）班两组女生的体重（单位：kg）：

第 1 组	35	36	38	40	42	42	75
第 2 组	35	36	38	40	42	42	45

（1）分别求这两组数据的平均数、众数、中位数，并解释它们的实际意义（结果取整数）；

（2）比较这两组数据的平均数、众数、中位数，谈谈你对它们的认识.

习题 19.1

复习巩固

1. 某公司有 15 名员工，他们所在部门及相应每人所创年利润如下表所示：

部门	人数	每人所创年利润/万元
A	1	10
B	3	8
C	7	5
D	4	3

这个公司平均每人所创年利润是多少？

2. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 15 名运动员的成绩如下表所示：

成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
人数	2	3	2	3	4	1

分别计算这些运动员成绩的平均数、中位数、众数（结果保留小数点后两位）.

3. 为了检查一批零件的质量，从中随机抽取 10 件，测得它们的长度（单位：mm）如下：

22.36　22.35　22.33　22.35　22.37

22.34　22.38　22.36　22.32　22.35

根据以上数据，估计这批零件的平均长度（结果保留小数点后两位）.

第十九章　数据的分析　115

练习答案

（1）第 1 组数据的平均数是 44，众数是 42，中位数是 40.

第 2 组数据的平均数约为 40，众数是 42，中位数是 40.

（2）这两组数据中，只有一个数据不同，第 1 组是 75，第 2 组是 45，因此这两组数据的平均数不同，但它们的中位数和众数相同. 由此可以看出，平均数受极端值的影响较大，中位数和众数不受极端值的影响.

习题 19.1

1. “复习巩固”有 4 道题，对本节所学的加权平均数、中位数、众数，以及用样本平均数估计总体平均数等进行了复习.

第 1 题是求加权平均数的问题，其中“人数”1，3，7，4 分别是“每人所创年利润”10，8，5，3 的权.

第 2 题所求的“运动员成绩的平均数”也是求加权平均数，其中“人数”2，3，…，1 分别是“成绩”1.50，1.60，…，1.80 的权.

第 3 题是用样本平均数估计总体平均数的问题. 教学中，应注意让学生体会用样本估计总体的思想.

第 4 题的素材是实际生活中经常遇到的，即确定选手的成绩时，往往要去掉一个最高分和一个最低分，再求剩余成绩的平均数. 这样做的原因是减小极端值的影响，使选手的成绩尽可能公平.

4. 在一次青年歌手演唱比赛中，评分办法采用10位评委现场打分，每位选手的最后得分为去掉最低分、最高分后的平均数。已知10位评委给某位歌手的打分是：

9.5 9.5 9.3 9.8 9.4 8.8 9.6 9.5 9.2 9.6

求这位歌手的最后得分。

综合运用

5. 某商场招聘员工一名，现有甲、乙、丙三人竞聘。通过计算机、语言和商品知识三项测试，他们各自成绩（百分制）如下表所示。

应试者	计算机	语言	商品知识
甲	70	50	80
乙	90	75	45
丙	50	60	85

(1) 若商场需要招聘负责将商品拆装上架的人员，对计算机、语言和商品知识分别赋权2，3，5，计算三名应试者的平均成绩。从成绩看，应该录取谁？

(2) 若商场需要招聘电脑收银员，计算机、语言、商品知识成绩分别占50%，30%，20%，计算三名应试者的平均成绩。从成绩看，应该录取谁？

6. 某地某个月中午12时的气温（单位：℃）如下：

22 31 25 15 18 23 13 28 30 22

20 20 27 17 28 21 14 16 22 12

18 21 29 15 16 14 31 24 26 29

(1) 求这个月中午12时的平均气温；

(2) 请以4为组距对数据分组，作出频数分布表，根据频数分布表计算这个月中午12时的平均气温，与(1)中的结果比较，你有什么发现，谈谈你的看法。

7. 为了提高农民收入，村干部带领村民自愿投资办起了一个养鸡场。办场时买来的1 000只小鸡，经过一段时间精心饲养，可以出售了。下表是这些鸡出售时质量的统计数据。

质量/kg	1.0	1.2	1.5	1.8	2
频数	112	226	323	241	98

(1) 出售时这些鸡的平均质量是多少（结果保留小数点后一位）？

(2) 质量在哪个值的鸡最多？

(3) 中间的质量是多少？

116 第十九章 数据的分析

2. “综合运用”有4道题，要求在一定的情境中运用所学知识解决问题，具有一定的综合性和开放性.

第5题是求加权平均数的问题，第(1)(2)问给出了最常使用的两种权的形式. 教学中，应注意让学生在实际应用中感受权的作用，并注意结合“复习巩固”中相应的加权平均数的题目，体会权的不同形式和应用.

第6题要求用两种不同的方式求平均数，第一种是直接根据原始数据求平均数，另一种是根据频数分布表求平均数. 通过计算比较，学生可以发现，所求出的平均数差别不大，这说明平均只是对数据集中趋势的一种大概估计.

第7题根据频数分布表提供的信息，计算一组数据的加权平均数、中位数和众数. 教学中，要注意体会这些统计量在实际问题中的意义.

第8题有一定的开放性，根据条形统计图提供的数据，通过计算，并以报告的形式呈现结

8. 下图是交警在一个路口统计的某个时段来往车辆的车速情况.[1]

(第8题)

应用你所学的统计知识，写一份简短的报告让交警知道这个时段路口来往车辆的车速情况.

拓广探索

9. 下表是某班学生右眼视力的检查结果.

视力	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
人数	1	2	5	4	3	5	1	1	5	9	6

分析上表中的数据，你能得出哪些结论?

10. 查找资料，了解地球年平均气温的计算方法，收集近些年的年平均气温，用适当的图表整理、描述这些数据，看看你能得到哪些信息.

第十九章 数据的分析 117

[1] 本题答案不唯一. 意在让学生使用本节所学统计量分析现实问题.

果. 教学中，应注意以不同的形式让学生学习统计、体会统计的作用.

3. “拓广探索”中的2道题也有一定的开放性.

第9题通过一个频数分布表给出一组数据，根据这组数据，学生可以从不同的角度进行观察，会得到不同的结论.

第10题要求学生查找资料，并进行实际的统计调查活动. 在这个活动过程中，要注意让学生经历数据处理的基本过程，体会分析数据集中趋势的必要性和有效性.

[1] 教学时注意和章引言相呼应. 这个问题的综合性较强，既要用样本平均数估计总体平均数，也要用样本方差估计总体方差.

[2] 图 19.2-1 和图 19.2-2 是两个散点图，这两个图为比较两组数据距离平均数的分散情况提供一个直观的印象. 对这两个图，教学中不必有其他要求.

19.2 数据的波动程度

在统计学中，除了平均数、中位数、众数这类刻画数据集中趋势的量以外，还有一类刻画数据波动（离散）程度的量，其中最重要的就是方差. 本节我们将在实际问题情境中，了解方差的统计意义并运用方差解决问题.

我们来看引言中的问题.[1]

问题 农科院计划为某地选择合适的甜玉米种子. 选择种子时，甜玉米的产量和产量的稳定性是农科院所关心的问题. 为了解甲、乙两种甜玉米种子的相关情况，农科院各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量（单位：t）如表 19-8 所示.

表 19-8

甲	7.65	7.50	7.62	7.59	7.65	7.64	7.50	7.40	7.41	7.41
乙	7.55	7.56	7.53	7.44	7.49	7.52	7.58	7.46	7.53	7.49

根据这些数据估计，农科院应该选择哪种甜玉米种子呢？

上面两组数据的平均数分别是

$$\bar{x}_{甲}=7.537，\bar{x}_{乙}=7.515，$$

说明在试验田中，甲、乙两种甜玉米的平均产量相差不大. 由此可以估计出这个地区种植这两种甜玉米，它们的平均产量相差不大.

用样本平均数估计总体平均数.

为了直观地看出甲、乙两种甜玉米产量的分布情况，我们把这两组数据画成下面的图 19.2-1 和图 19.2-2.[2]

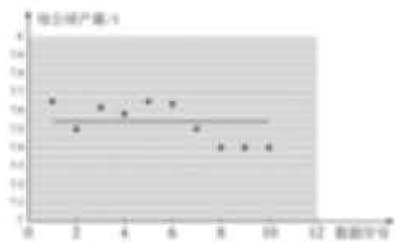


图 19.2-1 甲种甜玉米的产量分布

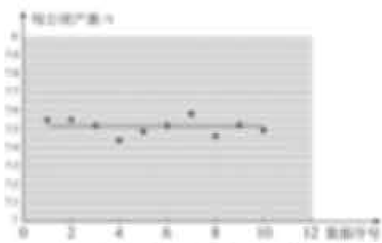


图 19.2-2 乙种甜玉米的产量分布

118 第十九章 数据的分析

1. 本节学习衡量数据的另一类特征数——方差.

数据的集中趋势只是数据分布的一个特征，它所反映的是数据向其中心值聚集的程度. 而各数据之间的差异情况如何呢？这就需要考察数据的离散程度，也称波动程度. 数据的波动程度是数据分布的另一个主要特征，它所反映的是各个数据远离其中心值的程度，因此也称离中趋势.

刻画集中趋势的特征数（平均数、中位数、众数等）是对数据一般水平的一个概括性度量，它对一组数据的代表程度取决于该组数据的离散程度. 数据的离散程度越大，刻画集中趋势的特征数的代表性就越差；数据的离散程度越小，刻画集中趋势的特征数的代表性越好. 而刻画离中趋势的特征数（极差、方差、标准差等）就是对数据离散程度所作的描述.

2. 教科书结合农科院选择甜玉米种子的问题，既指出了引入方差的必要性，又介绍了方差

比较上面的两幅图可以看出，甲种甜玉米在各试验田的产量波动较大，乙种甜玉米在各试验田的产量较集中地分布在平均产量附近. 从图中看出的结果能否用一个量来刻画呢？

为了刻画一组数据波动的大小，可以采用很多方法. 统计中常采用下面的做法：设有 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，各数据与它们的平均数 $\bar{x}$ 的差的平方分别是 $(x_1-\bar{x})^2$，$(x_2-\bar{x})^2$，…，$(x_n-\bar{x})^2$，我们用这些值的平均数，即用

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

来衡量这组数据波动的大小，并把它叫做这组数据的**方差**（variance），记作 s^2.

从上面计算方差的式子可以看出，当数据分布比较分散（即数据在平均数附近波动较大）时，各个数据与平均数的差的平方和较大，方差就较大；当数据分布比较集中时，各个数据与平均数的差的平方和较小，方差就较小. 反过来也成立. 这样就可以用方差刻画数据的波动程度，即：**方差越大，数据的波动越大；方差越小，数据的波动越小.**[1]

下面我们利用方差来分析甲、乙两种甜玉米产量的波动程度.

两组数据的方差分别是[2]

$$s_{甲}^2=\frac{(7.65-7.537)^2+(7.50-7.537)^2+\cdots+(7.41-7.537)^2}{10}\approx0.010,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(7.55-7.515)^2+(7.56-7.515)^2+\cdots+(7.49-7.515)^2}{10}\approx0.002.$$

显然 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$，即甲种甜玉米产量的波动较大，这与我们从图 19.2-1 和图 19.2-2 看到的结果一致.

由此可知，在试验田中，乙种甜玉米的产量比较稳定. 正如用样本的平均数估计总体的平均数一样，也可以用样本的方差来估计总体的方差. 因此可以推测，在这个地区种植乙种甜玉米的产量比甲种的稳定. 综合考虑甲、乙两个品种的平均产量和产量的稳定性，可以推测这个地区比较适合种植乙种甜玉米.

例 1 在一次芭蕾舞比赛中，甲、乙两个芭蕾舞团都表演了舞剧《天鹅湖》，参加表演的女演员的身高（单位：cm）如表 19-9 所示.

表 19-9

甲	163	164	164	165	165	166	166	167
乙	163	165	165	166	166	167	168	168

第十九章 数据的分析 119

[1] 这段文字从方差公式的结构上分析了方差是怎样刻画数据的离散情况的.

[2] 可以使用计算器进行较复杂的计算.

的计算公式，探讨了方差刻画数据离散程度的合理性.

3. 在学习方差的概念时，有的学生会提出疑问：为什么要这样定义方差？在表示各个数据与其平均数的偏离程度时，为了防止正偏差与负偏差的相互抵消，为什么对各个数据与其平均数的差不取其绝对值，而要求它们的平方呢？应该向学生讲明，取各个数据与其平均数的差的绝对值也是一种衡量数据波动情况统计量，但方差的应用更加广泛. 这主要是因为在许多问题中，含有绝对值的式子不便于计算，且在衡量一组数据的波动大小的“功能”上，方差更强些. 例如，有两组数据：

甲　9　1　0　−1　−9

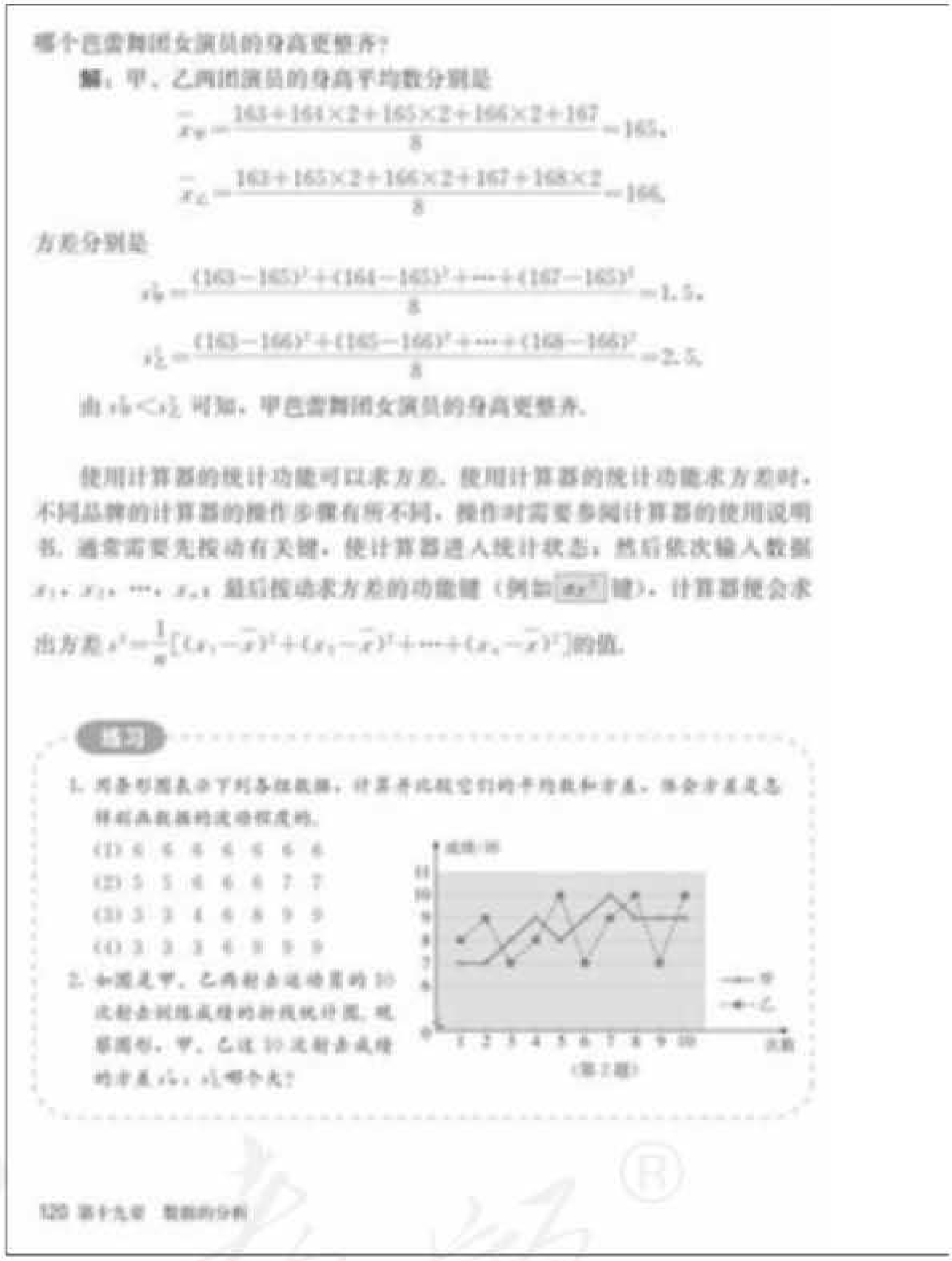
乙　6　4　0　−4　−6

直观上看，甲组数据的波动要比乙组数据的波动大些，但它们的平均差都是 4，利用平均差区分不出它们的波动大小；而甲组数据的方差是 32.8,

练习答案

1. 条形图略. 这四组数据的平均数都是 6，方差分别是 0，$\frac{4}{7}$，$\frac{44}{7}$，$\frac{54}{7}$. 方差越大，数据的波动越大；方差越小，数据的波动越小.

2. $s^2_乙$ 大.



哪个芭蕾舞团女演员的身高更整齐？

解： 甲、乙两团演员的身高平均数分别是

$$\bar{x}_甲=\frac{163+164\times2+165\times2+166\times2+167}{8}=165，$$

$$\bar{x}_乙=\frac{163+165\times2+166\times2+167+168\times2}{8}=166.$$

方差分别是

$$s^2_甲=\frac{(163-165)^2+(164-165)^2+\cdots+(167-165)^2}{8}=1.5，$$

$$s^2_乙=\frac{(163-166)^2+(165-166)^2+\cdots+(168-166)^2}{8}=2.5.$$

由 $s^2_甲<s^2_乙$ 可知，甲芭蕾舞团女演员的身高更整齐.

使用计算器的统计功能可以求方差. 使用计算器的统计功能求方差时，不同品牌的计算器的操作步骤有所不同，操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常需要先按动有关键，使计算器进入统计状态；然后依次输入数据 x_1，x_2，…，x_n，最后按动求方差的功能键（例如 $\boxed{\sigma x^2}$ 键），计算器便会求出方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$ 的值.

练习

1. 用条形图表示下列各组数据，计算并比较它们的平均数和方差，体会方差是怎样刻画数据的波动程度的.

(1) 6　6　6　6　6　6　6

(2) 5　5　6　6　6　7　7

(3) 3　3　4　6　8　9　9

(4) 3　3　3　6　9　9　9

2. 如图是甲、乙两射击运动员的 10 次射击训练成绩的折线统计图. 观察图形，甲、乙这 10 次射击成绩的方差 $s^2_甲$，$s^2_乙$ 哪个大？

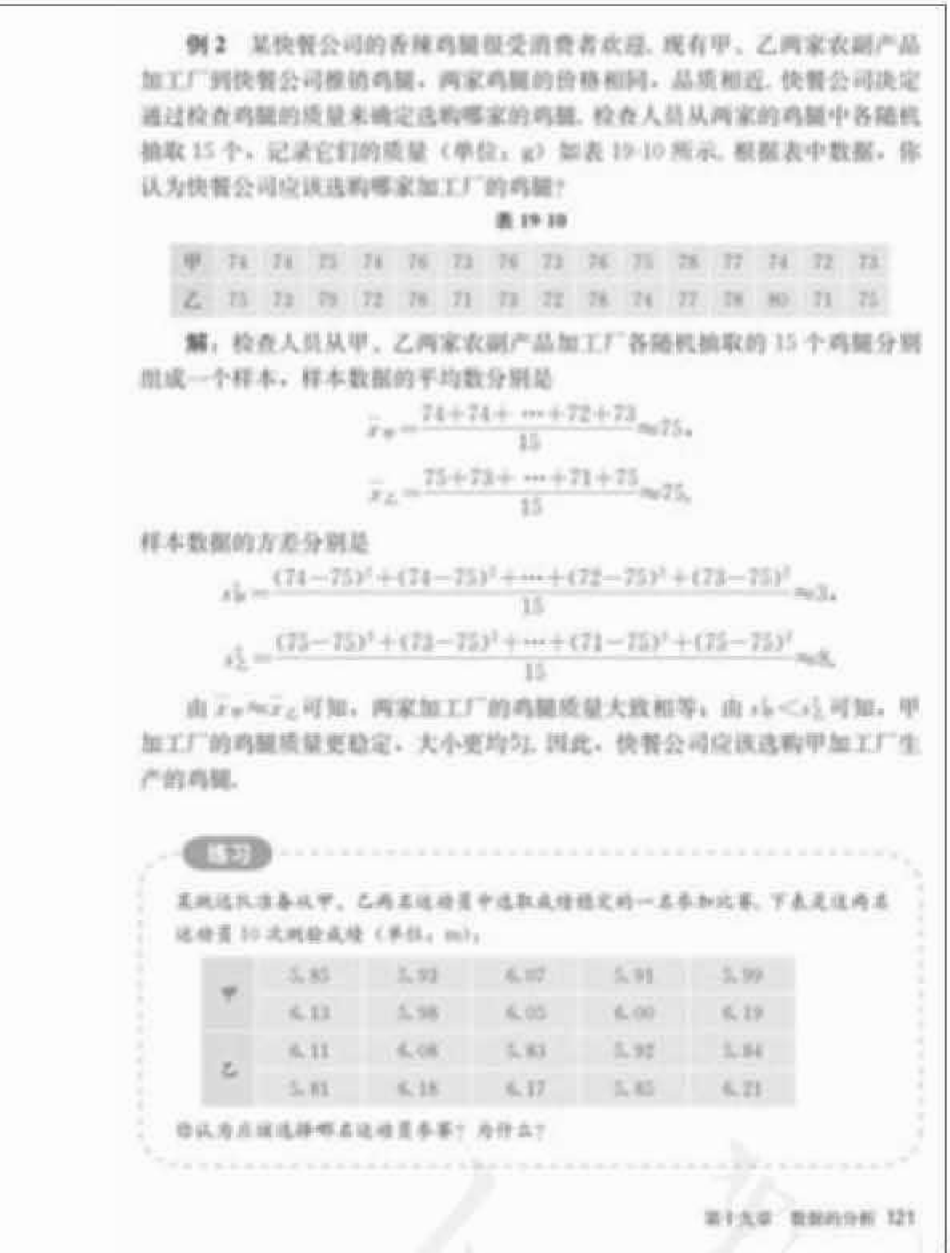
（第2题）

乙组数据的方差是 20.8，因此用方差可以将它们的波动情况区分出来.（一组数据的平均差，是指各个数据 x_i 与平均数 $\bar{x}$ 的差的绝对值的平均数，即 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}$.）

4. 方差的概念是一个教学难点，为了加深学生对方差概念的理解，教科书从方差公式的结构上进行了分析，帮助学生理解“方差越大，数据的波动越大；方差越小，数据的波动越小”.

5. 通常，根据定义计算一组数据的方差，计算量比较大，教科书介绍了利用计算器的统计功能求方差的思路. 教学中可以根据学生使用的计算器的类型学习利用计算器求方差的方法. 但教学中也要注意让学生利用方差的定义求方差的训练，加深学生对方差意义的理解.

6. 本节，教科书安排了两个例题，例 1 是运用方差公式进行计算，例 2 是用样本方差估计



例 2 某快餐公司的香辣鸡腿很受消费者欢迎. 现有甲、乙两家农副产品加工厂到快餐公司推销鸡腿，两家鸡腿的价格相同，品质相近. 快餐公司决定通过检查鸡腿的质量来确定选购哪家的鸡腿. 检查人员从两家的鸡腿中各随机抽取 15 个，记录它们的质量（单位：g）如表 19-10 所示. 根据表中数据，你认为快餐公司应该选购哪家加工厂的鸡腿？

表 19-10

甲	74	74	75	74	76	73	76	73	76	75	78	77	74	72	73
乙	75	73	79	72	76	71	73	72	78	74	77	78	80	71	75

解：检查人员从甲、乙两家农副产品加工厂各随机抽取的 15 个鸡腿分别组成一个样本，样本数据的平均数分别是

$$\bar{x}_{甲}=\frac{74+74+\cdots+72+73}{15}\approx 75,$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{75+73+\cdots+71+75}{15}\approx 75.$$

样本数据的方差分别是

$$s_{甲}^2=\frac{(74-75)^2+(74-75)^2+\cdots+(72-75)^2+(73-75)^2}{15}\approx 3,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(75-75)^2+(73-75)^2+\cdots+(71-75)^2+(75-75)^2}{15}\approx 8.$$

由 $\bar{x}_{甲}\approx\bar{x}_{乙}$ 可知，两家加工厂的鸡腿质量大致相等；由 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$ 可知，甲加工厂的鸡腿质量更稳定，大小更均匀. 因此，快餐公司应该选购甲加工厂生产的鸡腿.

练习

某跳远队准备从甲、乙两名运动员中选取成绩稳定的一名参加比赛. 下表是这两名运动员 10 次测验成绩（单位：m）.

甲	5.85	5.93	6.07	5.91	5.99
	6.13	5.98	6.05	6.00	6.19
乙	6.11	6.08	5.83	5.92	5.84
	5.81	6.18	6.17	5.85	6.21

你认为应该选择哪名运动员参赛？为什么？

第十九章 数据的分析 121

练习答案

选择运动员甲参赛，他的成绩更稳定.

总体方差，解决实际问题.

7. 本章是用方差来比较两组数据的波动大小，值得注意的是，只有当两组数据的平均数相等或相近时，才能采用这种方法，否则就要利用变异系数来进行比较. 介绍变异系数需要用到标准差的概念，标准差是方差的算术平方根，它也是用来衡量一组数据的波动大小的重要的量. 一组数据的标准差变异系数是指 $\frac{s}{\bar{x}}$，其中 $\bar{x}$，s 分别是这组数据的平均数和标准差. 这是一个衡量相对波动大小的无量纲的统计量. 由于教科书中没有介绍变异系数，在教学中添加有关比较两组数据的方差的实例时，要注意两组数据的平均数应该比较接近.

习题 19.2

复习巩固

1. 甲、乙两台机床同时生产一种零件. 在 10 天中，两台机床每天出次品的数量如下表：

甲	0	1	0	2	2	0	3	1	2	4
乙	2	3	1	1	0	2	1	1	0	1

(1) 分别计算两组数据的平均数和方差；

(2) 从计算的结果看，在 10 天中，哪台机床出次品的平均数较小？哪台机床出次品的波动较小？

2. 甲、乙两台包装机同时包装糖果. 从中各抽出 10 袋，测得它们的实际质量（单位：g）如下表：

甲	501	506	508	508	497	508	506	508	507	499
乙	505	507	505	498	505	506	505	505	506	506

(1) 分别计算两组数据的平均数和方差；

(2) 哪台包装机包装的 10 袋糖果的质量比较稳定？

综合运用

3. 为了考察甲、乙两种小麦的长势，分别从中随机抽取 10 株麦苗，测得苗高（单位：cm）如下表：

甲	12	13	14	15	10	16	13	11	15	11
乙	11	16	17	14	13	19	6	8	10	16

(1) 分别计算两种小麦的平均苗高；

(2) 哪种小麦的长势比较整齐？

4. 在体操比赛中，往往在所有裁判给出的分数中，去掉一个最高分和一个最低分，然后计算余下分数的平均分. 6 个 B 组裁判员对某一运动员的打分数据（动作完成分）为：9.4，8.9，8.8，8.9，8.6，8.7.

(1) 如果不去掉最高分和最低分，这组数据的平均数和方差分别是多少（结果保留小数点后两位）？

(2) 如果去掉一个最高分和一个最低分，平均数和方差又分别是多少（结果保留小数点后两位）？

(3) 你认为哪种统计平均分的方法更合理？

122 第十九章 数据的分析

习题 19.2

1. “复习巩固”中的 2 道题是对本节所学有关方差概念的复习. 第 1 题给出甲、乙两台机床在 10 天中出次品的数量，要求根据这两组数据判断甲、乙两台机床在 10 天中出次品数量的波动情况，这里不涉及用样本估计总体的情况. 第 2 题也是同样的情况. 这 2 道题目比较简单，目的是让学生熟悉方差的定义以及方差的统计意义.

2. 在“综合运用”中，第 3 题是一道典型的用样本平均数和方差估计总体平均数和方差的题目. 教学中，要注意让学生与“复习巩固”中的 2 道题目进行比较，体会用样本估计总体的思想.

第 4 题给出了两种统计平均分的方法，然后从数据的集中趋势和离散程度的角度进行比较，说明哪种方法更合理.

拓广探索

5. 全班同学分成几个小组完成下面的活动.[1]

(1) 收集全班同学每个家庭在某个月的用水量；

(2) 将本组同学每个家庭在这个月的用水量作为样本数据，计算样本数据的平均数和方差，并根据样本数据的结论估计全班同学家庭用水量的情况；

(3) 与其他小组进行交流，谈谈你对平均数、方差以及用样本估计总体的认识.

阅读与思考

数据波动程度的几种度量[2]

我们知道，方差是度量数据波动程度的量. 此外，统计中还常用极差、平均差、标准差等来度量数据的波动程度.

一组数据中最大值与最小值的差称为这组数据的极差. 在反映数据波动程度的各种量中，极差是最简单、最便于计算的一个量. 但是它仅仅反映了数据的波动范围，没有提供数据波动的其他信息，且受极端值的影响较大.

为了更好地刻画数据的波动程度，可以考虑每一个数据与其平均数的“距离”. 一个自然的想法就是计算每一个数据与其平均数的差的平均数，即

$$\frac{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})}{n}.$$

想一想，这种做法可行吗？存在什么问题？

上面的做法不可行. 因为不论这组数据是什么具体数值，总有

$$上式=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-n\bar{x}}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\bar{x}=\bar{x}-\bar{x}=0.$$

所以它不能反映数据的波动程度.

修正上面缺点的一种做法是考虑每个数据与其平均数的差的绝对值的平均数，即

$$\frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|}{n}.$$

这个式子可以用来度量数据的波动程度，我们把它叫做这组数据的平均差.

另一种做法是用方差

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

第十九章　数据的分析　123

［1］本题需要学生进行实际的统计调查活动，教学中要有教学计划，给学生留出一定的时间，让学生真正从事统计调查，经历数据处理的基本过程.

［2］这里将正文中学习的方差，与极差、标准差、平均差放在一起研究，有利于比较各种统计量的优势和不足，使学生对这些统计量有一个整体的认识.

3. “拓广探索”中只安排了1道题. 这道题目需要学生从事实际的统计调查活动，首先要求学生确定样本，收集样本数据，然后对样本数据进行处理，处理数据时要用到本节的所学的求平均数、方差等知识和方法，最后根据对样本数据的分析，获得对总体的认识.

阅读与思考

1. 本节正文中对方差进行了较为详细的研究，在这个“阅读与思考”中，教科书又介绍了极差、平均差和标准差，分析了它们各自的特征，并将极差、方差、平均差、标准差进行了比较，加深学生对这几种描述数据离散程度的统计量的认识.

平均差以平均数为重心，反映了每个数据与平均数的平均离差程度，它能比较全面准确地反映一组数据的离散状况. 平均差越大，说明数据的离散程度越大；平均差越小，说明数据的离散程度越小. 但是为了避免离差之和等于0而无法反映一组数据的离散程度这一问题，平均差在计

来度量数据的波动程度。

此外，人们还引入了标准差的概念。标准差是方差的算术平方根，即

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}.$$

标准差的单位与原始数据的单位相同，实际中也常用它度量数据的波动程度。

请同学们利用上面的几种度量数据波动程度的量解决下面的问题。

一个家具厂有甲、乙两个木料货源，下面是家具厂向两个货源订货后等待交货天数的样本数据。

等待天数		6	7	8	9	10	11	12	13	14
次数	甲	0	0	2	8	7	3	0	0	0
	乙	4	2	0	6	2	2	2	0	2

分别计算样本数据的平均数、极差、平均差、方差和标准差，根据这些计算结果，看看家具厂从哪个货源进货比较好？为什么？

算时取了绝对值，以离差的绝对值来表示总离差，这给计算带来不便. 另外平均差在数学上的性质也不是非常好，因而实际中应用较少.

2. 对于度量数据波动程度的统计量，除了正文中介绍的方差，以及“阅读与思考”中介绍的极差、平均差和标准差外，还有四分位差、离散系数等.

19.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析[1]

请同学们分组合作完成下面的调查活动.

收集近两年你校七年级部分学生的《体质健康标准登记表》，分析登记表中的数据，对你校七年级学生的体质健康情况进行评定，提出增强学生体质健康的建议.

下面提供一个调查样例供同学们活动时参考.

某学校七年级有4个班，共180人，其中男生85人，女生95人.

表19-11是用来记录学生体质健康测试结果的登记表.

表19-11 体质健康标准登记表

<table>
<tr><td colspan="2">姓名</td><td></td><td>班级</td><td></td><td>年龄</td><td></td><td>性别</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">身高</td><td></td><td>体重</td><td></td><td rowspan="11">选测一项(20)</td><td colspan="2" rowspan="2">50米跑</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">身高标准体重(10)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">肺活量体重指数(20)</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">立定跳远</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">选测一项(20)</td><td colspan="2">台阶实验</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">1000米跑(男)</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">跳绳</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">800米跑(女)</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">篮球运球</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">选测一项(20)</td><td colspan="2">坐位体前屈</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">掷实心球</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">足球运球</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">握力体重指数</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">引体向上(男)</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">排球垫球</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">仰卧起坐(女)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>说明</td><td colspan="8">1. 括号中的数字为单项测试的满分成绩；
2. 各单项成绩之和为最后得分；
3. 最后得分90分及以上为优秀，75~89分为良好，60~74分为及格，59分及以下为不及格.</td></tr>
</table>

第十九章 数据的分析 125

[1] 这里提供的只是一个样板，教学中，需要根据学校的具体情况设计调查活动，使这个课题学习真正得到落实.

1. 本章的“课题学习”综合性强，整个活动中几乎要用到所有已经学过的统计知识和方法，包括利用调查问卷收集数据，用条形图、扇形图、折线图、直方图描述数据，计算数据的平均数（加权平均数）、中位数、众数、方差及用样本估计总体等. 因此，教学中要注意引导学生综合运用所学统计的知识和方法，经历统计调查的基本过程，体会通过统计调查活动解决实际问题的思路、方法和策略，培养学生的实践能力以及合作交流能力，建立统计观念.

2. 本章的“课题学习”选择了与学生学校生活密切联系的体质健康测试方面的素材，具有较强的可操作性，学生比较容易获得有关体质健康方面的数据，使得收集数据的实践活动比较容易实施.

3. 教科书提供了一个“体质健康标准登记表”，这个表是根据国家教育部和体育总局印发的《学生体质健康标准（试行方案）》编写的，

[1] 这里涉及到如何抽取样本的问题. 教学中，教师可以引导学生简要回顾已学的抽样调查，以帮助他们确定抽取样本的方法，但不要在抽样方法上讲得太多.

一、收集数据[1]

1. 确定样本

从全校七年级的各班分别抽取 5 名男生和 5 名女生，组成一个容量为 40 的样本.

2. 确定抽取样本的方法

按照各班的学号，分别在每个班抽取学号排在最前面的 5 名男生和 5 名女生.

二、整理数据

整理体质健康登记表中的各项数据.

例如，计算每个个体的最后得分，按评分标准整理样本数据，得到表 19-12.

表 19-12

成绩	划记	频数	百分比
不及格	T	3	7.5%
及格	正 T	8	20%
良好	正 正 正 T	17	42.5%
优秀	正 正 T	12	30%
合计	40	40	100%

三、描述数据

根据整理的各种表格，画出条形图、扇形图、折线图、直方图等，使得数据分布的信息更清楚地呈现出来.

例如，根据表 19-12，可以画出条形图（图 19.3-1）和扇形图（图 19.3-2）.

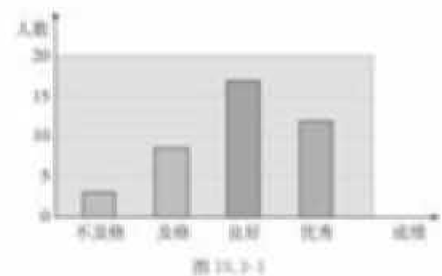


图 19.3-1

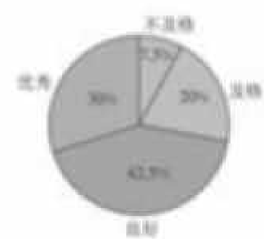


图 19.3-2

126 第十九章 数据的分析

包括衡量体质健康的评价指标和得分. 评价指标有身体形态方面的（如身高标准体重），有身体机能方面的（如台阶试验），还有身体素质方面的（如 50 米跑）. 对于得分情况，测试成绩满分是 100 分，即各单项成绩之和为 100 分，其中身高标准体重满分为 10 分，肺活量为 20 分等.

4. 为了使学生顺利地进行对本课题的统计调查活动，教科书提供了一个参考样例. 这个样例展示了整个调查活动的过程，以及在每一个环节中应该完成的主要任务和所要获得的主要结论. 在这个样例中，突出了统计调查的基本步骤.

首先是收集数据. 学生仿照教科书的方法进行抽样. 教科书以样本的每个个体的最后得分为例，展示了整理数据、描述数据和分析数据的这个数据处理的过程. 教学中，对于整理数据和描述数据的环节，要注意复习以前所学有关统计图表的内容. 在分析数据时，除了让学生分析统计图表获得一些结论外，还要注意让学生利用本章

四、分析数据

根据原始数据或上面的各种统计图表，计算各组数据的平均数、中位数、众数、方差等，通过分析图表和计算结果得出结论.

例如，根据表 19-12，图 19.3-1，图 19.3-2 可知，样本的体质健康成绩达到良好的最多，有 17 人，良好及以上的有 29 人，约占统计人数的 70%左右. 由此可以估计全校七年级学生的体质健康成绩有类似的结果.

五、撰写调查报告[1]

<table>
<tr><td>题　目</td><td colspan="4">全校七年级学生体质健康情况的调查</td></tr>
<tr><td>样　本</td><td colspan="2">七年级各班部分学生</td><td>样本容量</td><td>40</td></tr>
<tr><td>数据来源</td><td colspan="4">学生体质健康登记表</td></tr>
<tr><td rowspan="7">数据处理过程</td><td>主要项目</td><td>整理、描述数据</td><td colspan="2">分析数据得出结论</td></tr>
<tr><td>身　高</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>体　重</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1 000 米跑</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>800 米跑</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>仰卧起坐</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>总　结</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>主要建议</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>参加成员</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>教师意见</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>备　注</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

六、交流

写出活动总结，向全班同学介绍本小组的调查过程，展示调查结果，交流通过数据处理寻找规律，得出结论的感受.

第十九章　数据的分析　127

[1] 在撰写调查报告时，要注意引导学生尽可能地使用数据（包括统计图表）说明结论，体现统计调查研究的特点.

所学知识，计算数据的（加权）平均数、中位数、众数、方差等，分析数据的集中趋势和离散程度，从而获得更多的信息.

5. 对于本“课题学习”的研究成果，教科书要求以课题报告的形式展示，并提供了一个报告表. 在这个报告表中，教科书不仅强调汇报通过“课题学习”所得到的调查结果，而且突出了对统计调查过程的汇报，这个调查过程需要展示数据处理的过程.

6. “课题学习”中最后的交流活动是必不可少的，教学中要引导学生认真交流，重点交流对统计调查活动的体会和感受.

[1] 这里的“平均情况”只是一个形象的说法，是指基本符合各项调查结果的学生.

数学活动

活动1

请同学们合作完成下面的活动：

1. 全班同学一起讨论，提出5个问题对全班同学进行调查. 例如，全班同学的平均身高是多少？全班同学的平均体重是多少？等等.

2. 全班同学分成五个小组，每个小组选择一个问题进行调查，并将调查过程和结果在全班介绍和展示.

3. 将各组的结果汇总到一起，得到全班同学的一个“平均情况”[1]，找出一个最能代表全班“平均情况”的同学.

活动2

请全班同学分成几个小组，合作完成下面的活动：

1. 每个小组分别测量本组同学的每分脉搏次数，得到几组数据.

2. 求出本组数据的平均数、中位数、众数、方差等.

3. 与其他小组进行交流，估计一颗“正常”心脏的每分跳动次数.

4. 查找资料，看看一颗“正常”心脏的每分跳动次数，与你们的调查结果进行对照，谈谈你们对用样本估计总体的感受.

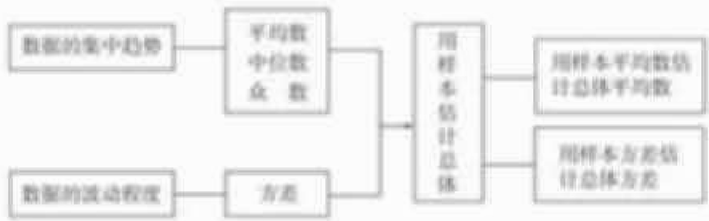
129 第十九章 数据的分析

1. “活动1”首先要求全班同学一起讨论，找出5个适合对全班同学进行调查的问题，并将全班同学分成5个小组，每个小组讨论一个问题，并根据本小组所得的结果估计全班同学的情况，最后综合5个小组的结论，在全班同学中找出一个可以代表全班“平均情况”的同学. 教学中，注意所选择的5个问题应尽可能与本章所学的内容有关，以便找出代表“平均情况”的同学. 这个活动对学生来讲会有一定的趣味性.

2. “活动2”首先将全班同学分成几个小组，分别从事同一种统计调查活动：测量本小组同学的每分脉搏次数，然后各小组对本组所得数据进行处理，并根据本组所得结论进行推测. 完成这个活动要用到本章所学的有关刻画数据集中趋势和离散程度的统计量. 由于这个活动中，涉及到每个小组根据本组所得结论进行推测的情况，因此这个活动可以使学生对用样本估计总体，以及不同的样本可能得到不同的结果有所体会.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在生产和生活中，为了解总体的情况，我们经常从总体中抽取样本，通过对样本数据的处理，获得一些结论，然后再利用这些结论对总体进行估计，这就是用样本估计总体，它是统计的基本思想.

在整理、描述和分析样本数据时，我们可以通过绘制图表，如条形图、折线图、扇形图和直方图等获得一些信息，还可以通过计算反映数据某方面特征的量获得更多的信息，如利用平均数、中位数和众数，刻画数据的集中趋势；利用方差刻画数据的波动程度.

平均数、中位数和众数从不同侧面反映了一组数据的集中趋势. 因此，用它们刻画数据时，要根据统计调查的目的和具体问题的特点进行选择.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.[1]

1. 举例说明平均数、中位数、众数的意义.

2. 算术平均数与加权平均数有什么联系和区别？举例说明加权平均数中"权"的意义.

3. 举例说明怎样用方差刻画数据的波动程度.

4. 举例说明刻画数据特征的量在决策中的作用.

5. 搜集关于"统计学"方面的资料（如学科发展史、思想方法、人物等），从某个角度谈谈你对统计的认识.

［1］要让学生结合实例来说明.

1. "本章知识结构图"通过两条线展示出本章内容的展开顺序：一条线是刻画数据集中趋势的统计量，另一条线是刻画数据离散程度的统计量. 教学时，可以以这个结构图为线索小结本章内容.

2. "回顾与思考"首先对本章内容所涉及到的统计的基本思想和方法进行了概述，然后又以问题的形式对本章主要内容（（加权）平均数、中位数、众数、方差）进行了回顾.

由于本章是本套教科书统计部分的最后一章，因此本章复习时应有一定的综合性，在数据处理的这个大环境下进行复习. 不仅要复习分析数据的策略和方法，而且对收集、整理、描述数据等各个环节所学的方法和策略也应该进行整理和提高，使学生对统计调查有一个整体的认识.

[1] 教学中，要注意让学生结合本题的实际情境解释平均数、中位数和众数的意义，而不是说出它们的定义.

复习题 19

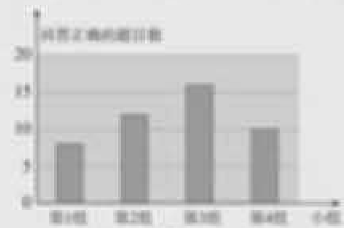
复习巩固

1. 某水库为了解某种鱼的生长情况，从水库中捕捞了 20 条这种鱼，称得它们的质量（单位：kg）如下：

1.15 1.04 1.11 1.07 1.10 1.32 1.25 1.19 1.15 1.21
1.18 1.14 1.09 1.25 1.21 1.29 1.16 1.24 1.12 1.16

计算样本平均数（结果保留小数点后两位），并根据计算结果估计水库中这种鱼的平均质量.

2. 在一次智力抢答比赛中，四个小组回答正确的情况如下图.



（第 2 题）

这四个小组平均正确回答多少道题目（结果取整数）？

3. 为了解某一路口的汽车流量，调查了 10 天中同一时段通过该路口的汽车数量（单位：辆），结果如下：

183 209 195 178 204 215 191 208 167 197

在该时段中，平均约有多少辆汽车通过这个路口？

4. 一家公司 14 名员工的月薪（单位：元）是

8 000 6 000 2 550 1 700 2 550 4 599 4 200
2 550 5 100 2 500 4 400 25 000 12 400 2 500

（1）计算这组数据的平均数、中位数和众数；

（2）解释本题中平均数、中位数和众数的意义.[1]

5. 某年 A，B 两座城市四季的平均气温（单位：℃）如下表：

城市	春	夏	秋	冬
A	−4	19	9	−10
B	16	30	24	11

130 第十九章 数据的分析

复习题 19

1. “复习巩固”共有 5 道题.

第 1 题和第 3 题都是给出一组样本数据，利用样本的平均数估计总体的平均数.

第 2 题是根据一个条形图来求数据的平均数，这首先要求从条形图中获得数据，再求这些数据的平均数.

第 4 题是复习刻画数据集中趋势的统计量：平均数、中位数和众数. 在回答第（2）问时，要注意让学生体会各统计量的统计意义，能够解释它们在解决这个实际问题中的作用.

第 5 题是复习方差的题目. 教学中也要注意让学生结合这个实际问题体会方差的统计意义，解释方差在解决这个问题中的作用.

2. “综合运用”有 2 道题.

第 6 题是以股票为背景的题目，要求比较两种股票在某段时间内的涨、跌情况，也就是要比

（1）分别计算A，B两座城市的年平均气温（结果取整数）；

（2）哪座城市四季的平均气温较为接近？

综合运用

6. 下表是两种股票一周内的交易日收盘价格（单位：元/股）：

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
A股票	11.62	11.51	11.39	11.94	11.17
B股票	13.53	14.07	13.49	13.84	14.80

计算它们的平均数和方差（结果保留小数点后两位），比较这两种股票在这段时间内的涨、跌变化情况.

7. 甲、乙两门大炮在相同条件下向同一目标各发射50发炮弹，炮弹落点情况如下表：

炮弹落点与目标的距离/m	40	30	20	10	0
甲炮发射的炮弹个数	0	1	3	7	39
乙炮发射的炮弹个数	1	3	2	3	41

（1）分别计算两门大炮所发射的炮弹落点与目标的距离的平均数；

（2）哪门大炮射击的准确性好？

拓广探索

8. 为了促进学生参加体育锻炼，学校决定购买一批运动鞋供学生选购. 请设计一个样本容量为30的调查方案进行调查，并计算样本的平均数、众数、中位数，为学校购买运动鞋提出建议.[1]

9. 统计全班同学上学所用时间，对所得数据进行整理、描述和分析，看看你能得出哪些结论.

第十九章　数据的分析　131

[1] 教学中要作好教学计划，给学生留出一定的时间进行统计调查活动. 第9题也是类似的情况.

较两组数据的稳定情况. 这是利用方差来解决实际问题的题目，较好地体现了方差的作用.

第7题是一个与炮弹射程有关的素材，这也是一个比较典型的利用方差进行推测的问题.

3. “拓广探索”有2道题. 这2道题都是要求学生从事统计调查的实践活动，经历收集和处理数据的基本过程，在这个过程中重点是利用本节所学知识和方法分析数据解决问题. 教学中，要注意引导学生积极从事和处理收集数据的活动，体验统计在解决实际问题中的作用.

Ⅲ 习题解答

习题 19.1

1. 5.4 万元.
2. 1.67，1.70，1.75.
3. 22.351 mm.
4. 9.45 分.
5. (1) 丙；
   (2) 乙.
6. (1) 21℃；
   (2) 频数分布表：

气温 x	划记	频数
$12 \leqslant x < 16$	正丅	7
$16 \leqslant x < 20$	𬼀	4
$20 \leqslant x < 24$	正下	8
$24 \leqslant x < 28$	𬼀	4
$28 \leqslant x < 32$	正丅	7
合计		30

   根据频数分布表计算这个月中午 12 时的气温为 22℃. 这个结果与 (1) 中的结果（近似值）相差不大. 平均数反映的是一组数据的平均水平，是一个统计估计值.
7. (1) 1.5 kg；
   (2) 1.5 kg；
   (3) 1.5 kg.
8. 车速的平均数、中位数、众数分别为 52.4，52，52.（答案不唯一，使用统计量描述了实际情境即可.）
9. 本班学生的平均视力是 4.6，视力是 4.9 的学生人数最多，一半以上的学生视力不超过 4.65.
10. 略.

习题 19.2

1. (1) 甲、乙两组数据的平均数分别为 1.5 和 1.2，方差分别为 1.65 和 0.76；
   (2) 乙机床出次品的平均数较小，且出次品的波动较小.
2. (1) 甲、乙两组数据的平均数分别为 504.8 和 504.8，方差分别为 15.76 和 5.56；
   (2) 乙包装机.

3. (1) 甲、乙两种小麦的平均苗高都是 13 cm；

(2) 甲种.

4. (1) 平均数为 8.88，方差为 0.06；

(2) 平均数为 8.83，方差为 0.01；

(3) 去掉一个最高分与一个最低分进行统计平均数的方法更合理，因为方差更小，减少了数据受极端值的影响.

5. 略.

复习题 19

1. 样本平均数约为 1.17 kg，估计水库中这种鱼的平均质量约为 1.17 kg.
2. 这四个小组平均正确回答约 12 道题.
3. 平均约有 195 辆汽车通过这个路口.
4. (1) 这组数据的平均数为 6 003.5，中位数为 4 300，众数为 2 550；

   (2) 14 名员工的月平均工资是 6 003.5 元，约有一半员工的月薪在 4 300 元以下，月薪为 2 550 元的员工最多.
5. (1) A，B 两座城市的年平均气温分别约为 4℃和 20℃；

   (2) 城市 B 四季的平均气温较为接近.
6. A，B 两种股票在某周的交易日收盘价格的平均数分别是 11.53 和 13.95，方差分别是 0.07 和 0.23，在这段时间内 B 种股票的涨、跌幅度更大.
7. (1) 甲、乙两门大炮所发射的炮弹落点与目标距离的平均数分别是 3.2 m 和 4 m；

   (2) 甲炮.
8. 略.
9. 略.

Ⅳ 教学设计案例

19.1 数据的集中趋势（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

加权平均数.

2. 内容解析

数据分析是统计的重要环节，平均数是衡量一组数据集中趋势的重要统计量，它反映了一组数据的平均水平.

当一组数据中各个数据重要程度不同时，加权平均数能更好地反映对某些数据的侧重. 权反映的是数据的相对重要程度，当一组数据中的每个数据的权相同时，加权平均数就是算术平均数.

基于以上分析，本节课的教学重点是：对权及加权平均数统计意义的理解.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 理解加权平均数的统计意义.

(2) 会用加权平均数分析一组数据的集中趋势，发展数据分析能力，逐步形成数据分析的观念.

2. 目标解析

目标 (1) 是让学生能理解权表示数据的相对“重要程度”，体会权的差异对平均数的影响，会计算加权平均数，知道算术平均数和加权平均数的区别与联系.

目标 (2) 是当学生面对一组数据时，能根据具体情境赋予适当的权，会用平均数分析数据的集中趋势，解释其实际意义.

三、教学问题诊断分析

由于生活经验的局限，同时受认知水平的影响，学生对权的意义和作用的理解可能会有困难，在运用加权平均数分析数据时，容易混淆数据和权. 另外学生会受到先前算术平均数学习经验的影响，在需要用加权平均数分析数据时却选用算术平均数. 部分学生往往只会记住公式，而不会解释数据分析结果的实际意义或统计意义，把统计问题的学习仅仅停留在计算层面.

本节课的教学难点是：对权的意义的理解，用加权平均数描述数据的集中趋势.

四、教学过程设计

1. 创设情境，提出问题

引言

当我们收集到数据后，通常是用统计图表整理和描述数据. 为了进一步获取信息，还需要对数据进行分析. 以前我们学习过平均数，知道它可以反映一组数据的平均水平. 本节课我们将在实际问题情境中，进一步探讨平均数的统计意义.

设计意图：通过师生共同阅读节引言，让学生回顾统计调查的一般步骤，了解本节课的学习内容，同时体会数据分析是统计的重要环节，而平均数是数据分析中常用的统计量.

问题1 一家公司打算招聘一名英文翻译，对甲、乙两名候选人进行了听、说、读、写的英语水平测试，他们各项的成绩（百分制）如下：

应试者	听	说	读	写
甲	85	78	85	73
乙	73	80	82	83

如果这家公司想招一名综合能力较强的翻译，该录用谁？录用依据是什么？

师生活动：学生提出评判依据. 若学生提出以总分作为依据，教师要将学生的回答引导到算术

平均数. 通过师生共同计算，理解公式 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 的意义是所有数据的和与数据个数的商，体会公式中分子与分母的意义，为后继学习奠定基础.

设计意图：回顾小学平均数的意义：一组数据的平均数是这组数据的总和与数据个数的商. 说明算术平均数在统计学中能反映一组数据总体的平均水平（集中趋势），为后面引入加权平均数作铺垫.

问题 2 如果这家公司想招一名笔译能力较强的翻译，能否同等看待听、说、读、写的成绩？如果听、说、读、写成绩按照 2∶1∶3∶4 的比确定，应该录取谁？

追问 1：用算术平均数解决问题 2 合理吗？为什么？

追问 2："听、说、读、写成绩按照 2∶1∶3∶4 的比确定"说明在计算平均数中比较侧重哪些成绩？

追问 3：如何在计算平均数时体现听、说、读、写的差别？

师生活动：教师提出问题，学生思考解决问题的方案. 若不能提出合适的方案，教师再通过 3 个追问进行引导. 对于追问 1，学生能感受到不合理，但原因可能说不清楚，教师可举生活中简单的实例让学生先体会，为问题的解决提供"先行组织者". 追问 3 尽量让学生独立解决，给学生充分思考、尝试的时间. 若学生还存在困难，再进行小组合作讨论，让学生经历加权平均数产生的过程，体验权的产生是自然的过程，体会计算的合理性. 问题解决后，教师总结，权的意义是反映数据的重要程度，如 2，1，3，4 分别表示听、说、读、写四项成绩的权，而这样计算的平均数 79.5，80.4 分别称为甲和乙的听、说、读、写四项成绩的加权平均数.

设计意图：追问 1 可引导学生从生活经验入手进行分析. 追问 2 让学生明白各个数据具有不同的"重要程度"，在计算平均成绩时需要体现这个不同点. 追问 3 让学生自主研究问题的解决方法，思考怎样将数据连同其"重要程度"一起纳入平均数的计算，并能说明这种计算方式的合理性，初步体会"重要程度"的作用，最后列出正确算式，给出权的意义. 从追问 1 到追问 3，循序渐进，层层深入，为权的产生提供自然合理的背景，激发学生步步深入地思考，获得解决问题的方案——修订平均数的计算方法.

2. 抽象概括，形成概念

问题 3 在问题 2 中，各个数据的重要程度不同（权不同），这种计算平均数的方法能否推广到一般？

追问：若 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n 的权分别为 w_1，w_2，…，w_n，这 n 个数据的平均数该如何计算？

师生活动：教师引导学生得到加权平均数公式：一般地，若 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的权分别是 w_1，w_2，…，w_n，则这 n 个数的加权平均数是 $\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$.

设计意图：从特殊到一般，给出加权平均数的一般公式.

3. 比较辨别，理解新知

问题 4 如果这家公司想招一名口语能力较强的翻译，应该侧重哪些分项成绩？如果听、说、读、写成绩按照 3∶3∶2∶2 的比确定两人的测试成绩，那么谁将被录取？与问题 2 中的（1）（2）

相比较，你能体会到权的作用吗？

师生活动：学生独立完成计算过程. 难点是对权的作用的讨论，得到结论“同样的一组数据，如果规定的权变化，则加权平均数随之改变”. 学生已有进一步的体会，但较难用语言来表达，教师要进行必要的指导.

设计意图：在实例中根据需要，改变权的数值，得到不同的结果，让学生再次感受加权平均数中权的作用.

问题5 你认为问题1中各数据的权有什么关系？通过上述问题的解决，说说你对权的认识.

师生活动：引导学生概括问题1中的各数可看作是权相同的，指出两种平均数之间的联系.

设计意图：帮助学生理解两种平均数的区别与联系，再一次体验权的作用.

4. **例题教学，应用新知**

例 一次演讲比赛中，评委将从演讲内容、演讲能力、演讲效果三个方面为选手打分，各项成绩均为百分制，然后按演讲内容占50%、演讲能力占40%、演讲效果占10%，计算选手的综合成绩（百分制）. 进入决赛的前两名选手的单项成绩如下表所示，请确定两人的名次.

选手	演讲内容	演讲能力	演讲效果
A	85	95	95
B	95	85	95

师生活动：教师指导学生阅读例题，学生自主进行分析. 适当的时候提示学生：演讲内容、演讲能力、演讲效果三项成绩在总成绩中的重要程度是用什么数据体现的？它们的权分别是什么？要确定两人的总成绩，实质是求它们各项成绩的加权平均数，如何计算？学生根据加权平均数的计算公式先分别计算出两名选手的总成绩，教师引导并板书解答过程，规范解题格式.

设计意图：继续以体会权的意义为目标，选取典型的生活实例为背景，通过教师指导，学生自主阅读、分析、解题，提高学生独立分析问题、解决问题的能力，并规范解题格式.

追问：A，B两名选手的单项成绩都是两个95分、一个85分，为什么他们的最后得分不同呢？

师生活动：教师引导学生进行解题反思，同时引导学生思考：不计算，仅分析数据及其权，可否估计两人的名次？

设计意图：通过追问，让学生深入体会权的作用，培养学生的估算能力.

5. **巩固应用，解决问题**

练习1 某公司欲招聘一名公关人员，对甲、乙两位应试者进行了面试与笔试，他们的成绩（百分制）如下表所示：

应试者	面试	笔试
甲	86	90
乙	92	83

（1）如果公司认为面试和笔试同等重要，从他们的成绩看，谁将被录取？

（2）如果公司认为作为公关人员面试成绩应该比笔试成绩更重要，并分别赋予它们6和4的权，计算甲、乙两人各自的平均成绩，谁将被录取？

师生活动：学生独立解决问题，并说明权的变化怎样影响结果的变化.

设计意图：加权平均数的概念提出后，直接进行巩固应用，加深学生对概念的理解.

6. **深化拓展，灵活运用**

练习2 某广告公司欲招聘职员一名，对A，B，C三名候选人进行了三项素质测试，他们的各项测试成绩如下表所示：

应试者	测试成绩		
	创新能力	计算机能力	公关能力
A	72	50	88
B	85	74	45
C	67	70	67

（1）公司为网络维护员、客户经理、创作总监这三种岗位各招聘一名职员，给三项成绩赋予相同的权合理吗？

（2）请你设计合理的权重，为公司招聘一名职员.

师生活动：教师呈现开放题，学生赋权. 重点让学生在加权平均数的应用过程中，主动赋权，体会权的作用.

设计意图：设置开放性问题，让学生主动运用权影响一组数据的平均水平，帮助学生内化对权意义的理解，发展数据分析的观念.

7. **小结**

结合以下问题，教师与学生一起回顾本节课所学主要内容：

（1）加权平均数在数据分析中的作用是什么？

（2）权的作用是什么？

设计意图：问题（1）引导学生回顾加权平均数的意义，体会它产生的必要性. 问题（2）引导学生回顾权的意义和作用.

8. **布置作业**

教科书第107页练习2，习题19.1第1，4，5题.

五、目标检测设计

1. 某次歌唱比赛中，选手小明的唱功、音乐常识、综合知识成绩分别为88分、81分、85分. 若这三项按4∶3∶2的比计算比赛成绩，则唱功、音乐常识、综合知识成绩的权分别为______、______和______，小明的最后成绩是______.

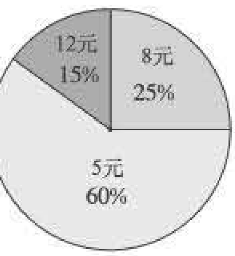
设计意图：考查权的意义和加权平均数的概念.

2. 某班共有50名学生，平均身高168 cm，其中30名男生的平均身高为170 cm，则20名女生的平均身高为______.

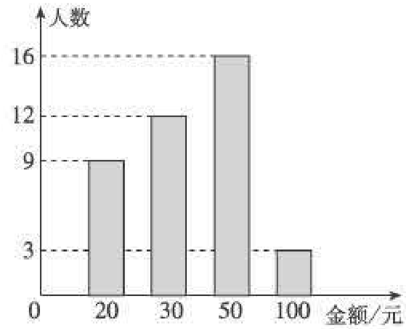
设计意图：考查用加权平均数估计数据的集中趋势.

3. 学校食堂午餐供应5元、8元和12元三种价格的盒饭. 根据食堂某月销售午餐盒饭的统计图，可计算出该月食堂销售午餐盒饭的平均价格是________.

设计意图：结合扇形统计图考查加权平均数.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 小明所在班级为希望工程捐款，他统计了全班同学的捐款情况，并绘制成如图所示的统计图. 根据统计图，可计算出全班同学平均每人捐款________元.

设计意图：考查学生由条形图获取信息并应用加权平均数解决实际问题的能力.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 统计学的发展

英国著名统计学家肯德尔（M. G. Kendall，1904—1983）在探讨统计学的起源时，曾指出："以我看来，任何人读了格朗特或金的著作都必定会认为，统计学正是从这一点开始起步."格朗特（J. Graunt，1620－1674）是英国商人、自然哲学家，他唯一的著作是《根据死亡公告的自然和政治的观察》. 格朗特通过系统分析死亡公告，整理数据，从数据中提取信息，并用数学揭示数字之间的关系，说明一些看法的谬误，并发现新的真相. 这些工作是全新的，是统计学早期历史上最有意义的研究之一.

统计思想的重大进展是高斯（C. F. Gauss，1777—1855）和勒让德（A. －M. Legendre，1752—1833）关于最小二乘法的工作，这使得统计学摆脱了对观测数据的单纯描述向强调推断的阶段过渡. 而皮尔逊（K. Pearson，1857－1936）和费希尔（R. A. Fisher，1890—1962）的工作则促使了数理统计学的诞生. 皮尔逊是英国的生物学家和统计学家，他首先提出相关与回归的理论，提出了总体的概念，明确指出统计学不是研究样本本身而是要根据样本对总体进行推断，并根据这一思想提出了拟合优度检验，还发展了卡方分布等. 关于费希尔，人们通常认为他是数理统计学的奠基人，他的贡献很广泛，提出了许多重要的统计方法，开辟了一些列统计学的分支领域，如试验设计分支及相应的方差分析方法，又如假设检验分支及显著性检验概念等. 可以说，20 世纪 30，40 年代，费希尔和他的学派占据了数理统计学的主导地位. 1946 年，瑞典数学家克拉默（H. Cramer，1893—1985）发表了《统计学的数学方法》，标志着数理统计学的成熟.

二战期间，数理统计学研究中的一些新动向，在很大程度上决定了这门学科以后的发展方向，

其中最有影响的是数学家沃尔德（A. Wald，1902—1950）提出的序贯分析和统计决策理论. 前者使序贯分析成为数理统计中的重要分支之一，后者拓展了统计研究的范畴，用博弈的观点看待统计问题. 二战以后，随着社会和科技的进步，统计学飞速发展，特别是电子计算机的使用，不仅使得过去难于计算的问题得以解决，而且还促使了统计学新理论的问世. 特别是如今网络和信息时代，数据、数据分析和统计方法对人类生活和生产的方方面面发挥着越来越重要的作用.

2. 刻画数据集中趋势的统计量

平均数、众数、中位数都是描述数据集中趋势的特征数，它们各自的特点如下：

（1）用平均数作为一组数据的代表，比较可靠和稳定，它与这组数据中的每一个数都有关系，对这组数据所包含的信息的反映最为充分，因而其应用最为广泛，特别是在进行统计推断时有重要的作用. 但平均数计算时比较烦琐，并且容易受到极端数据的影响. 例如，统计中有个经典故事，讲的是数学家调侃统计学家，说你们统计学家经常讲平均数，假如把一个人的头放在炉子上，脚放在冰箱里，从平均数的角度来看，那么这个人一定会感觉温度正合适.

为了尽量减少极端数据对平均数的影响，产生了其他一些平均数. 去尾平均数在生活中应用较多，它是指将一组数据的一个最大值和一个最小值去掉后其余数值的平均数. 它保留了平均数的集中趋势代表性强的优点，又可排除个别数据变动较大所带来的影响，因而当一组数据的个数较少且可能个别数据变动较大时，常用去尾平均数去描述一组数据的集中趋势. 例如，演讲比赛时给每个参赛选手评分，实际上用的就是去尾平均数，即几个评委同时给同一选手打分，然后去掉其中一个最高分和一个最低分，将其余几个分数的平均数作为该参赛选手的得分.

（2）众数作为一组数据的代表，它不受极端数据的影响，当一组数据中个别数据变动较大时，适宜选择众数来表示这组数据的集中趋势.

（3）中位数作为一组数据的代表，也不受极端数据的影响，并且求法简便，是一个反映数据集中趋势的位置的代表值. 其直观意义是数据中超过或低于此值的个数一样多. 如一次演讲比赛初赛确定一半的选手进行决赛，某选手想知道自己是否进决赛，只要知道他的成绩是否高于中位数. 另外，中位数的特点在于具有更大的“稳健性”，其含义如下：当我们收集大量数据时，难免会发生所谓“过失误差”，例如，小数点打错了地方，而使数据增大或缩小了十倍、百倍等，这将对平均值产生较显著的影响，但对样本中位数则无影响或影响甚微. 有关稳健性的研究，是近年来统计学理论发展的一个方面.

对于同一组考察对象来说，平均数、众数、中位数可能相同，也可能不同. 例如，某中学在一次百米赛跑中，有 5 名计时员为 3 号跑道的运动员计时，假设成绩（单位：s）分别为 12.1，12.2，12.3，12.4，12.4，那么这组数据的平均数是 12.28，众数是 12.4，中位数是 12.3.

3. 刻画数据离散程度的统计量

刻画集中趋势的平均数对一组数据的代表程度取决于数据的离散程度. 数据波动程度越大，代表性越差；数据波动程度越小，代表性越好. 方差是刻画数据离散程度的统计量. 除了方差外，还有许多的统计量能反映一组数据的波动情况，如极差、平均差、标准差等.

极差是一组数据中最大值与最小值的差. 极差能够反映数据的变化范围，生活中我们经常用到极差. 例如，一支篮球队队员中最高队员的身高与最矮队员的身高的差，一个公司成员的最高收入

与最低收入的差. 极差是最简单的一种度量数据离散程度的量，但它受极端值的影响较大.

平均差与标准差也能刻画一组数据的离散程度. 一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的各数据 x_i 与平均数 $\bar{x}$ 的差的绝对值的平均数，用 M 表示，即

$$M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|$$

叫做这组数据的平均差. 方差的算术平方根，即

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$$

叫做这组数据的标准差.

当两组数据的平均数相差较大时，不能用方差来衡量它们的波动大小. 这时，可利用变异系数来进行比较. 为了说明这个问题，下面简单介绍一下比较常用的标准差变异系数. 一组数据的标准差变异系数是指 $\frac{s}{\bar{x}}$ ，其中 $\bar{x}$ ，s 分别是这组数据的平均数与标准差. 这是一个衡量相对波动大小的无量纲的统计量. 变异系数大，波动大；变异系数小，波动小. 假定有两组数据，

甲　1，2，3；乙　10，20，30.

看上去，两组数据的波动大小相近，但由于两组数据的平均数相差较大，它们的标准差也相差较大(乙组数据的标准差是甲组数据标准差的 10 倍)，这时用标准差比较不了两组数据的波动大小. 但是，两组数据的标准差变异系数都是 0.408 2，即它们的标准差变异系数相等，这就较好地反映了两组数据的波动大小一样.

4. 方差问题的两个补充定理

定理 1　如果一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的方差 $s_1^2=a$，那么另一组数据 mx_1，$m\,x_2$，…，mx_n 的方差 $s_2^2=m^2a$.

证明：∵　$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ，$s_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=a$ ，

∴　$\bar{x}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}mx_i=m\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=m\bar{x}$.

∴　$s_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(mx_i-m\bar{x})^2=m^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]=m^2a$.

定理 2　如果数据 ax_1，ax_2，…，ax_n 的方差为 m，那么数据 bx_1，bx_2，…，bx_n 的方差是 $(\frac{b}{a})^2\cdot m$.

证明：因为数据 bx_1，bx_2，…，bx_n 可表示为

$$\frac{b}{a}(ax_1)，\frac{b}{a}(ax_2)，\cdots，\frac{b}{a}(ax_n) ，$$

所以由定理 1，得数据 bx_1，bx_2，…，bx_n 的方差为 $s^2=(\frac{b}{a})^2\cdot m$.

参考资料

[1] 李文林. 数学史概论. 北京：高等教育出版社，2002.

[2] 约翰·塔巴克. 概率论和统计学. 北京：商务印书馆，2007.

二、拓展性问题

1. 小明同学所在班级有 36 个人，这次他考了 80 分，全班同学的平均分是 78 分. 他的成绩在班级是中等偏上吗?

答案与提示：成绩中等偏上，指小明的分数应超过了班级一半以上的同学，也就是说他的分数应超过了中位数. 而小明的分数超过了平均数，未必能保证超过中位数. 比如，班上有 30 人考了 82 分，3 人考了 86 分，1 人考 6 分，1 人考了 4 分，小明考了 80 分，虽然超过了平均数，但在班级是倒数第 3 名. 因此，还不能认为他的成绩在班级是中等偏上的. 同样地，一家只有 15 名员工的公司，年薪总额是 216 万，老板说该公司的平均年薪为 14.4 万元，听上去收入不错. 事实上呢? 也有可能是老板自己拿了 100 万，总经理拿了 50 万，2 位部门经理每人各 20 万，其他 11 位雇员总共拿了 26 万元，那么一般雇员的平均年薪不到 2.4 万元，仅为老板所说的 16.4%. 由此可见，用平均数来反映总体的集中趋势，在某些情况下可能会掩盖真相.

2. 有 14 个数据，由小到大排列，其平均数为 34. 现在有一位同学求得这组数据前 8 个数的平均数为 32，后 8 个数的平均数为 36. 求这组数据的中位数.

答案与提示：由题意，可设这组数据为

x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8，x_9，x_{10}，x_{11}，x_{12}，x_{13}，x_{14}.

则
$$x_1+x_2+\cdots+x_{14}=34\times14=476;\quad ①$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_8=32\times8=256;\quad ②$$
$$x_7+x_8+\cdots+x_{14}=36\times8=288.\quad ③$$

由②+③−①得
$$x_7+x_8=68.$$
即 x_7 与 x_8 的平均数为 34. 故这 14 个数的中位数是 34.

3. 衡量数据波动大小的新方法

(1) 当两组数据的平均数相同时

甲、乙两个小组各 10 名学生的英语口语测验成绩（单位：分）如下：

甲	76	90	84	86	81	87	86	82	85	83
乙	83	84	85	89	79	80	94	89	83	74

哪组学生成绩比较整齐?

答案与提示：首先求各组数据的平均数：
$$\bar{x}_{甲}=84，\bar{x}_{乙}=84.$$
然后计算 $x_i-\bar{x}(i=1，2，\cdots，10)$：

甲	−8	6	0	2	−3	3	2	−2	1	−1
乙	−1	0	1	5	−5	−4	10	5	−1	−10

最后绘制平面直角坐标图（图 19-1）. 由图 19-1 可以清楚地比较出甲组成绩较稳定.

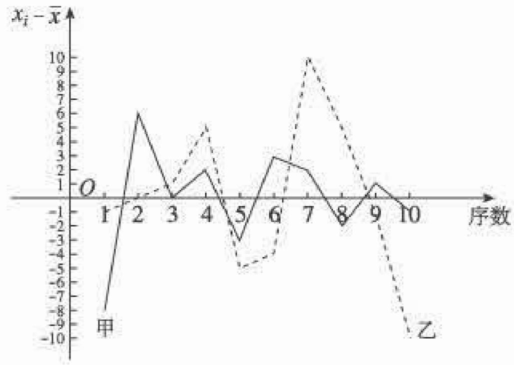


图 19-1

说明：在平面直角坐标系中，用横轴表示数据的平均数，数轴上 1，2，…，10 各点表示每组数据的次序数，纵轴表示每个数据减去平均数后的余数．由序数和余数构成的有序实数对就可以用平面内的点表示，顺次连接各点就可以比较直观地显示出各组数据偏离平均数的大小．

（2）当两组数据的平均数不相同但比较接近时

在 8 个实验点对两个早稻品种进行栽培对比实验，它们在各实验点的产量（单位：kg）如下：

甲	402	492	494	408	460	420	456	500
乙	426	466	465	428	436	455	449	459

在这些实验点中，哪种水稻的产量比较稳定？

答案与提示：首先求两组数据的平均数：

$$\bar{x}_{甲}=454\ ,\ \bar{x}_{乙}=448.$$

依据“一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，则一组新数据 $x_1\pm a$，$x_2\pm a$，…，$x_n\pm a$ 的平均数为 $\bar{x}\pm a$，方差为 s^2”，取 $a=450$，把甲组各个数据都减去 4，乙组各个数据都加上 2，求 $x'_i=x_i-450$．

甲	-52	38	40	-46	6		-34	2	46
乙	-22	18	17	-20	-12	7		1	11

最后绘制平面直角坐标图（图 19-2）．图 19-2 直观地显示出乙种小麦的产量稳定．

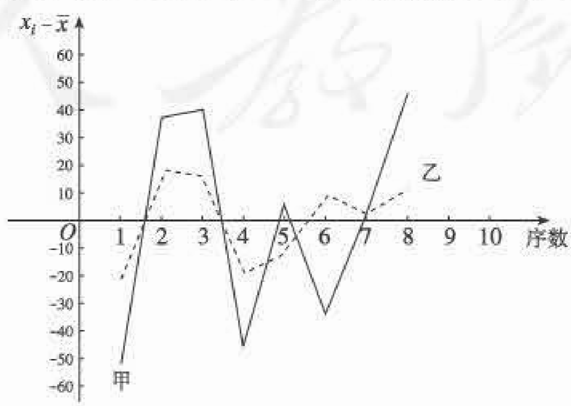


图 19-2

参考资料

李德胜．衡量数据波动大小的新方法．中小学数学（教师版），2002 年第 4 期．

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章主要内容包括：数据的集中趋势（平均数、中位数和众数）和数据的波动程度（方差）．由于统计是现实生活与生产的需要，因此本章主要考查平均数、中位数、众数、方差的统计意义及其应用．

2. 本章知识属于统计中的数据分析环节，要设置典型的现实情境，重点考查学生选择适当的统计量分析数据的集中趋势和波动程度，评价用样本估计总体思想的运用．同时还要关注对数据分析结果的意义解释，而不能把数据分析过程当作统计量的计算过程进行评价．

3. 统计是实践性很强的学科，因此，要关注在实际情境下合理选择统计量分析数据的水平，考查学生从生活实践中发现统计问题、提出调查方案、合理收集数据、适当描述数据、恰当分析数据并作出理性决策的能力．

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 数据 2，3，5，5，4 的众数是（　　）．

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

2. 某市在一次空气污染指数抽查中，收集到 10 天的数据如下：61，75，70，56，81，91，92，91，75，81．该组数据的中位数是（　　）．

（A）78　　（B）81　　（C）91　　（D）77.3

3. 某男装专卖店老板专营某品牌夹克，店主统计了一周中不同尺码的夹克销售量如下表：

尺码	39	40	41	42	43
平均每天销售量/件	10	12	20	12	12

如果每件夹克的利润相同，你认为该店主最关注的销售数据是下列统计量中的（　　）．

（A）平均数　　（B）方差　　（C）众数　　（D）中位数

4. 12 位参加歌唱比赛的同学的成绩各不相同，按成绩取前 6 位进入决赛．如果小颖知道了自己的成绩后，要判断能否进入决赛，小颖需要知道这 12 位同学成绩的（　　）．

（A）平均数　　（B）众数　　（C）中位数　　（D）方差

5. 某学校在开展“节约每一滴水”的活动中，从七年级的 100 名同学中任选出 20 名同学汇报了各自家庭一个月的节水情况，将有关数据（每人上报节水量都是正整数）整理如下表：

节水量 x/t	$0.5\leqslant x<1.5$	$1.5\leqslant x<2.5$	$2.5\leqslant x<3.5$	$3.5\leqslant x<4.5$
人数	6	4	8	2

请你估计这 100 名同学的家庭一个月节约用水的总量大约是（　　）.

(A) 180 t　　(B) 300 t　　(C) 230 t　　(D) 250 t

6. 甲、乙两班举行电脑汉字输入比赛，参赛学生每分输入汉字的个数统计结果如下表：

班级	参加人数	中位数	方差	平均数
甲	55	149	191	135
乙	55	151	110	135

某同学分析上表后得到如下结论：

①甲、乙两班学生平均成绩相同；

②乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数（每分输入汉字个数≥150 为优秀）；

③甲班成绩的波动比乙班大.

上述结论中正确的是（　　）.

(A) ①②③　　(B) ①②

(C) ①③　　(D) ②③

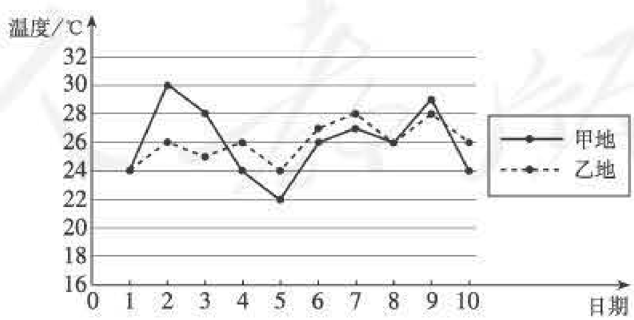
（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋 30 双，各种尺码的销售量如下表：

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	12	6	3	1

如果鞋店要购进 90 双这种女鞋，那么购进 22 cm，24 cm 和 24.5 cm 三种尺码女鞋数量最合适的分别是__________.

8. 甲、乙两地 9 月上旬的日平均气温如图所示，则甲、乙两地这 10 天日平均气温的方差大小关系为 $s^2_{甲}$____$s^2_{乙}$（填>或<）.



（第 8 题）

9. 一组数据 25，29，20，x，14，它的中位数是 23，则这组数据的平均数为________.

10. 阅读下列材料：

为了在甲、乙两名运动员中选拔一人参加全省跳水比赛，对他们的跳水技能进行考核. 在相同

条件下，各跳了 10 次，成绩（单位：分）如下：

甲	76	84	90	86	81	87	86	82	85	83
乙	82	84	85	89	79	80	91	89	74	79

回答下列问题：

（1）甲成绩的平均数是______，乙成绩的平均数是______.

（2）经计算知 $s_{甲}^2=13.2$，$s_{乙}^2=26.36$，这表明________________（用简明的文字语言表述）.

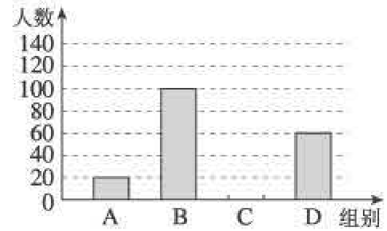
（3）你认为选谁去参加比赛更合适？____________，理由是____________________________.

（三）**解答题**（每小题 10 分，共 40 分）

11. 国家规定“中小学生每天在校体育活动时间不低于 1h”. 为此，某市就“每天在校体育活动时间”的问题随机调查了辖区内 320 名初中学生. 根据调查结果绘制成的统计图（部分）如图所示，其中分组情况是：

A 组：$t<0.5$ h　　B 组：0.5 h$\leqslant t<1$ h

C 组：1 h$\leqslant t<1.5$ h　　D 组：$t\geqslant 1.5$ h



（第 11 题）

请根据上述信息解答下列问题：

（1）C 组的人数是______；

（2）本次调查数据的中位数落在______组内；

（3）若该市辖区内约有 32 000 名初中学生，请你估计其中达到国家规定体育活动时间的人约有多少.

12. 一养鱼专业户为了估计池塘里有多少条鱼，先捕上 100 条做上标记，然后放回池塘里. 过了一段时间，待带标记的鱼混合于鱼群后，再捕捞 5 次，记录如下：第 1 次共捕捞 90 条，带标记的有 11 条；第 2 次捕捞 100 条，带标记的有 9 条；第 3 次捕捞 120 条，带标记的有 12 条；第 4 次捕捞 100 条，带标记的有 9 条；第 5 次捕捞 80 条，带标记的有 8 条. 鱼塘内大约有多少条鱼？

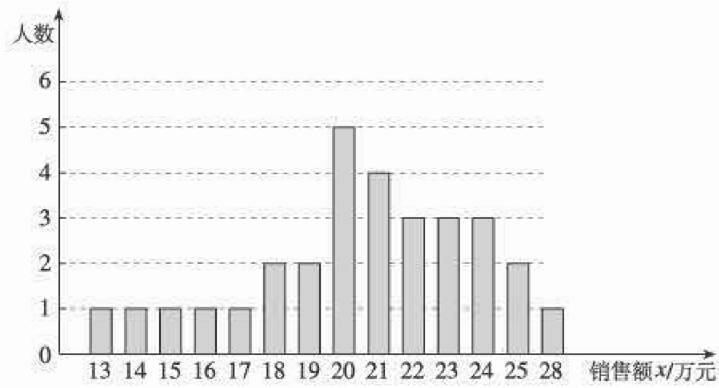
13. 某公司招聘职员，对甲、乙两位候选人进行了面试和笔试，面试中包括形体和口才，笔试中包括专业水平和创新能力，他们的成绩（百分制）如下表：

候选人	面试		笔试	
	形体	口才	专业水平	创新能力
甲	86	90	96	92
乙	92	88	95	93

（1）如果公司根据经营性质和岗位要求，以形体、口才、专业水平、创新能力按照 5∶5∶4∶6 的比确定成绩，请计算甲、乙两人各自的平均成绩，看看谁将被录取？

（2）如果公司根据经营性质和岗位要求，以面试成绩中形体占 5%，口才占 30%，笔试成绩中专业水平占 35%，创新能力占 30%确定成绩，那么你认为该公司应该录取谁？

14. 某商场统计了每个营业员在某月的销售额，绘制了如下统计图.



(第 14 题)

解答下列问题：

(1) 设营业员的月销售额为 x（单位：万元）. 商场规定：当 $x<15$ 时为不称职，当 $15\leqslant x<20$ 时为基本称职，当 $20\leqslant x<25$ 时为称职，当 $x\geqslant 25$ 时为优秀. 试求出不称职、基本称职、称职、优秀四个层次营业员人数所占百分比，并画出相应的扇形图.

(2) 根据 (1) 中规定，所有称职和优秀的营业员月销售额的中位数、众数和平均数分别是多少？

(3) 为了调动营业员的积极性，决定制定一个月销售额奖励标准，凡达到或超过这个标准的营业员将受到奖励. 如果要使得称职和优秀的所有营业员的半数左右能获奖，奖励标准应定为多少元？并简述其理由.

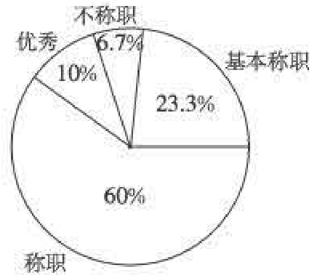
参考答案

1. D. 本题主要考查众数的概念.
2. A. 本题主要考查中位数的概念.
3. C. 本题主要考查对平均数、众数、中位数、方差统计意义的理解.
4. C. 本题主要考查对平均数、众数、中位数、方差统计意义的理解.
5. C. 本题主要考查用样本估计总体的思想和用频数分布组中值求加权平均数.
6. A. 本题主要考查对中位数、平均数、方差统计意义的理解.
7. 3，18，9 双. 本题主要考查加权平均数的运用.
8. ＞. 本题主要考查从图表中获取信息的能力及对方差意义的理解.
9. 22.2. 本题主要考查平均数与中位数的意义.
10. (1) 84，83.2；(2) 甲的成绩比乙稳定；(3) 甲，甲的平均成绩高且比较稳定.
    本题主要考查中位数、众数、平均数、方差的实际意义.
11. (1) 140；(2) C；(3) 20 000 人.
    本题主要考查学生解读统计图信息，用样本估计总体思想解决实际问题的能力.
12. 1 000 条.
    本题主要考查样本估计总体的思想方法，同时培养学生应用所学知识解决实际问题的能力.
13. (1) 甲、乙的平均成绩分别为 90.8，91.9，录取乙；

（2）甲、乙的平均成绩分别为 92.5，92.15，录取甲.

本题主要考查加权平均数在实际问题中的应用.

14.（1）如图所示；



（第 14 题）

（2）中位数是 22，众数是 20，平均数是 22.3；

（3）奖励标准应定为 22 万元. 理由：要使称职和优秀的员工中有半数左右能获奖，应该以这些员工的销售额的中位数为标准.

本题主要考查学生综合运用统计图表进行数据处理，合理选择统计量分析数据并作出决策的能力.