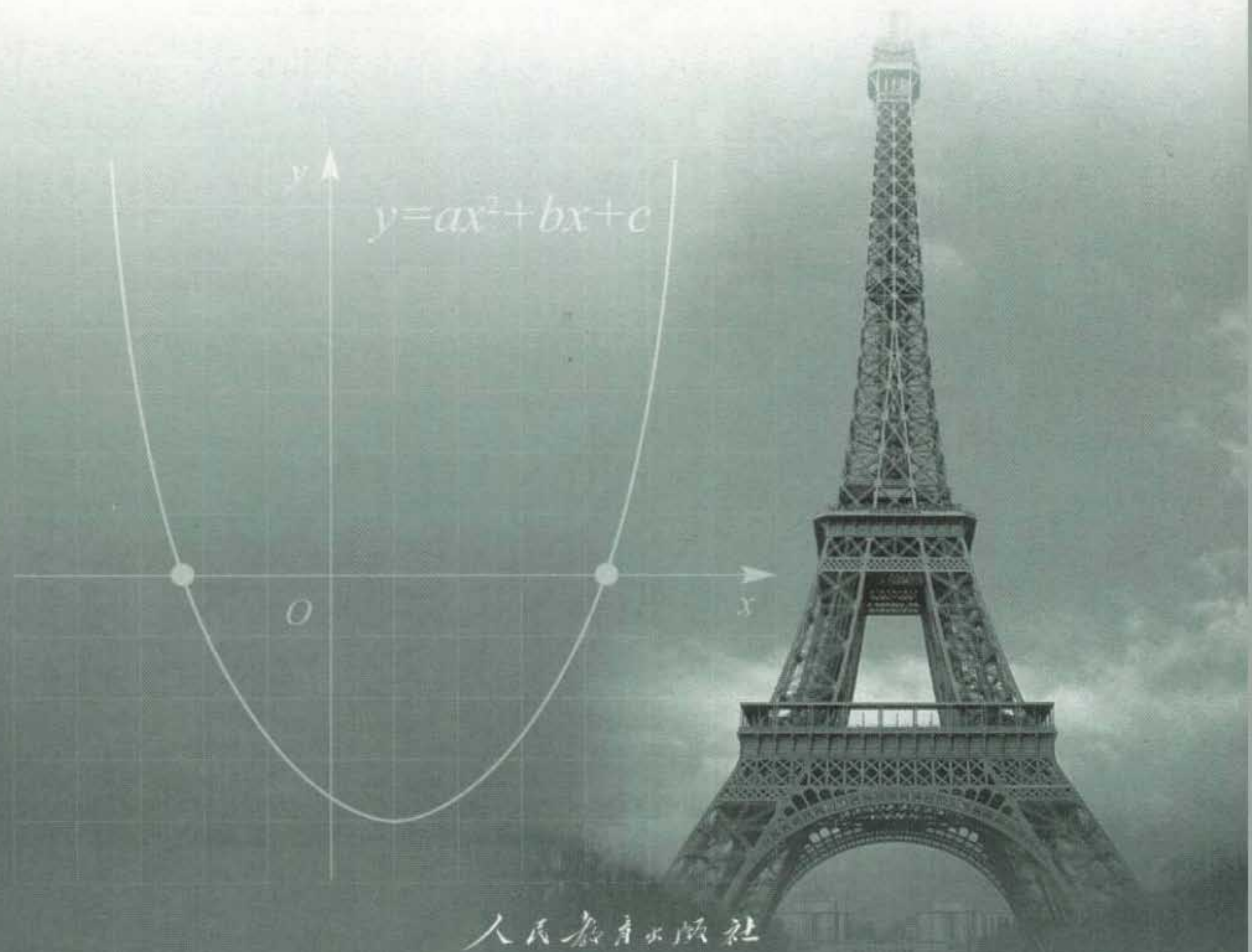
中等职业教育课程改革国家规划新教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

数学

（基础模块）上册

人民教育出版社 课程教材研究所
职业教育课程教材研究开发中心 编著

审定专家：丁百平 刘春佳



人民教育出版社

顾　　问：丁尔陞
主　　编：房艮孙
本册主编：牟正道　王旭刚
编　　者：叶思义　牟正道　王智海　陆泽贵
责任编辑：王旭刚
审　　读：高尚华　王存志
特约审稿：陈亦飞

图书在版编目（CIP）数据

数学：基础模块. 上册/人民教育出版社，课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2009.6（2019.5 重印）
中等职业教育课程改革国家规划新教材
ISBN 978-7-107-21966-5

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①人…　②课…　Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教材　Ⅳ. ①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 037386 号

中等职业教育课程改革国家规划新教材　数学（基础模块）上册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　唐山市润丰印务有限公司
版　　次　2009 年 6 月第 1 版
印　　次　2019 年 5 月第 43 次印刷
开　　本　787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张　11.75
字　　数　180 千字
定　　价　23.00 元

如发现内容质量问题、印装质量问题，请与本社联系。电话：400-810-5788

出版说明

为贯彻《国务院关于大力发展职业教育的决定》(国发〔2005〕35号)精神，落实《教育部关于进一步深化中等职业教育教学改革的若干意见》(教职成〔2008〕8号)关于"加强中等职业教育教材建设，保证教学资源基本质量"的要求，确保新一轮中等职业教育教学改革顺利进行，全面提高教育教学质量，保证高质量教材进课堂，教育部对中等职业学校德育课、文化基础课等必修课程和部分大类专业基础课教材进行了统一规划并组织编写，从2009年秋季学期起，国家规划新教材将陆续提供给全国中等职业学校选用.

国家规划新教材是根据教育部最新发布的德育课程、文化基础课程和部分大类专业基础课程的教学大纲编写，并经全国中等职业教育教材审定委员会审定通过的. 新教材紧紧围绕中等职业教育的培养目标，遵循职业教育教学规律，从满足经济社会发展对高素质劳动者和技能型人才的需要出发，在课程结构、教学内容、教学方法等方面进行了新的探索与改革创新，对于提高新时期中等职业学校学生的思想道德水平、科学文化素养和职业能力，促进中等职业教育深化教学改革，提高教育教学质量将起到积极的推动作用.

希望各地、各中等职业学校积极推广和选用国家规划新教材，并在使用过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高.

教育部职业教育与成人教育司

2009年5月

前言

根据教育部对中等职业学校德育课、文化基础课等必修课程和部分大类专业基础课教材的统一规划，教育部课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心组织对职业数学教育有深入研究的专家学者、中等职业学校的数学教研员和一线数学教师，依据教育部“以科学发展观为指导，实现中等职业教育快速健康发展”的精神和“以就业为导向，推进职业教育的改革发展”的要求，并结合中等职业学校学生学习的实际编写了这套文化基础课程数学教材. 本套教材经全国中等职业教育教材审定委员会审定通过，列为中等职业教育课程改革国家规划新教材.

本套教材共分为三个模块：基础模块（上册、下册），职业模块（理工类、服务类），拓展模块. 本套教材从 2009 年秋季起供全国三年制各类中等职业学校选用.

一、教材编写的指导思想

认真贯彻《国务院关于大力发展职业教育的决定》，落实教育部职成司关于中等职业学校文化课改革的各项精神.

1. 履行“以就业为导向，以学生发展为本”的职业教育思想，突出培养学生的就业能力、生活能力和生产实践能力. 教材力求体现对于中职学生适度、够用的数学知识，使他们在学习后能够更好地就业与发展.

2. 改革传统数学课程逻辑推理的思想体系，贯彻“学以致用”的思想，全书采用问题—算法操作步骤及案例教学的模式编写，给出解决一类问题的基本操作步骤，学生在学习后即可通过模仿、操作解题.

3. 做好与九年义务教育衔接，温故知新、深入浅出.

4. 每章内容层次分明，加强基础、增加拓展.

二、教材编写的原则

1. 深入贯彻教育部以“就业为导向”的中等职业教育改革的指导思想.

2. 突出基本数学方法和算法操作步骤的教育.

3. 为其他文化课程和专业课程的学习打好数学基础.

4. 注意引入现代计算技术来改进教学.

5. 严格执行国家有关的技术标准和规定.

三、编写结构与学时说明

1. 本套教材由基础模块、职业模块和拓展模块构成. 基础模块为必修内容，采用代数、分析和几何混合统一编写以加强知识之间的联系. 职业模块分为理工类分册（涵盖制造业、运输业等理工科类专业）和服务类分册（涵盖现代服务业、物流业、电子信息技术等服务类专业）. 拓展模块全一册，供对数学有较高要求的专业或需要

进入高一级职业院校的学生选用. 教材各册内容包括：

基础模块上册：集合，不等式，函数，指数函数和对数函数，三角函数，合计 60 学时；基础模块下册：数列，平面向量，直线和圆的方程，立体几何，概率与统计初步，合计 68 学时；职业模块理工类：三角计算及其应用，坐标变换与参数方程，复数及其应用，数据表格信息处理，逻辑代数初步，合计 64 学时，可根据专业需要选择 32～64 学时的内容进行教学；职业模块服务类：算法与程序框图，逻辑代数初步，数据表格与信息处理，编制计划的原理与方法，线性规划初步，合计 64 学时，可根据专业需要选择 32～64 学时的内容进行教学；拓展模块：三角公式及其应用，椭圆、双曲线、抛物线，概率与统计，合计 32 学时.

2. 本套教材每章分为问题、例题、练习 A 组、练习 B 组、习题、复习与提问、阅读材料等进行编写，并设置了思考与讨论、探索与研究、知识延伸、计算机上的练习等栏目.

这套教材是在原职业高中数学教材和中等职业教育国家规划数学教材的基础上编写的. 在编写过程中，得到了教育部课程教材研究所高存明研究员的细心指导和热情鼓励，他还帮助审读了全书，并对教材提出了很多建设性的意见和很好的修改思路. 我们向他表示衷心的感谢.

教育部特邀丁百平、刘春佳（按姓氏笔画排序）两位专家对本套教材进行了细致的审查. 他们对教材作出了积极的评价，认为本套教材："语言简明、流畅""提示解题步骤，有利于学生掌握""有利于分层教学"；"注重数学知识的科学性、严谨性、拓展性""有利于培养学生的数学思维能力""配有的电子教材完整，利于课堂教学的直观呈现". 同时又对教材提出了很多中肯的意见，我们向他们表示深深的谢意.

孙超英、张叔鸣、张永梅、刘少英、杜炳生、吴海红、魏银喜等老师对本教材作了修订，并提出了大量的宝贵意见，在此我们表示衷心感谢.

由于编者水平限制，本书难免存在不少缺点和错误，诚恳希望教师和同学们以及数学教学研究人员批评指正，以便进一步修改与完善这套教材.

通信地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼

邮　　编：100081

联系电话：010-58758523/32

电子邮箱：wangxg@pep.com.cn，longzw@pep.com.cn

职业教育课程教材研究开发中心

2009 年 5 月

编者寄语

数学是科学的大门钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的. 更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施.

——英国哲学家 弗兰西斯·培根（Francis Bacon）

你知道吗？数学作为一门课程进入学校，这在两千多年以前就开始了，而且现在全世界最普遍开设的课程就是数学！

人们之所以如此重视数学，一个很重要的原因是数学的应用非常广泛. 实际上，不论是机械制造、交通运输、经济金融、电子技术等行业，还是新兴的现代服务、信息技术、物流等行业，都离不开数学，数学已渗透到社会生活的各个方面. 另外，数学是人类文化的重要组成部分，是人类思维训练的主要工具，是提高学习能力的重要手段，数学素质已成为公民素质的一个重要组成部分.

不过，有些人可能认为，数学就只是算数，只要学会加减乘除就可以了，其他的都没用；另外，还有人觉得数学很难，学不会. 其实，这些很可能只是一种误解. 力图减少这些误解是我们这套数学教材要达到的目标之一.

本教材的主要特点有：

1. 降低起点、化解难点

有些同学可能会担心自己的数学基础不好. 在编写时，编者特别注意了这一点. 例如，在讲授新的内容之前，都力图先复习以前的有关知识，降低知识的起点. 这样一来，就算以前学过的东西已经不太记得了，也能查漏补缺，顺利地进行相关知识的学习.

在呈现知识时，对于比较难的内容，教材力图从各个方面去阐述，将难点化解掉. 例如，既强调从直观上去理解，也强调通过实例去阐述，适当地降低了抽象化和形式化的要求，注意利用各种素材帮助同学们理解相关知识，从而帮助同学们更好、更快地理解知识的本质.

2. 贴近实际、贴近生活

教材内容处处从实际出发，先从实际问题引出相关内容，然后利用实际例子讲解有关知识，并特别注意了数学在社会实践中的应用，从而提高同学们学习数学的兴趣，让同学们感觉到数学绝不只是算算数，而是在日常生产生活中有广泛的应用.

3. 呈现方式多样

在编写时，我们在遵循同学们的认知规律方面花了很大的力气，做到了采用多种形式，图文并茂、生动有趣地呈现知识. 比如，精心制作了多媒体课件帮助大家学习，设置了“思考与讨论”“探索与研究”“计算机上的练习”等栏目，来帮助同学们理解数学. 我们相信，只要同学们认真努力，就一定能够读懂这套教材，进而喜欢上数学!

4. 具有一定的弹性

教材兼顾了不同学生的需要. 例如，设置了“知识延伸”栏目，以供有兴趣的学生对知识做进一步的探讨，而这些内容就算略去不学也不会影响知识的完整性，给同学们提供了选择的空间.

总之，本教材力图利用各种形式激发同学们学习数学的兴趣，让大家深深地体会到学习数学是不难的，学习数学是有用的!

同学们，我们的国家正处于快速发展阶段，各行各业都离不开数学，而你们正处于接受数学基本训练、打好数学基础的黄金时期，在这一时期下一番功夫，学好数学，一定能为将来建设祖国做好准备，为实现你们的人生理想打下基础. 学好数学肯定会使你们受益终生!

尽管我们在编写教材时，做了很大的努力，希望帮助同学们学好数学. 但数学毕竟是比较抽象的，要想感悟数学的美与理，自己不下一番功夫是不行的. 预祝同学们学好数学，使数学成为你们人生拼搏的一把利剑.

由于时间仓促，教材中一定会有一些不妥之处，恳请广大师生多提宝贵意见和建议，这些都是对我们工作的极大支持，并将鼓励我们继续努力，不断完善，精益求精!

编　者

2009 年 5 月

目 录

第一章 集 合

第二章 不等式

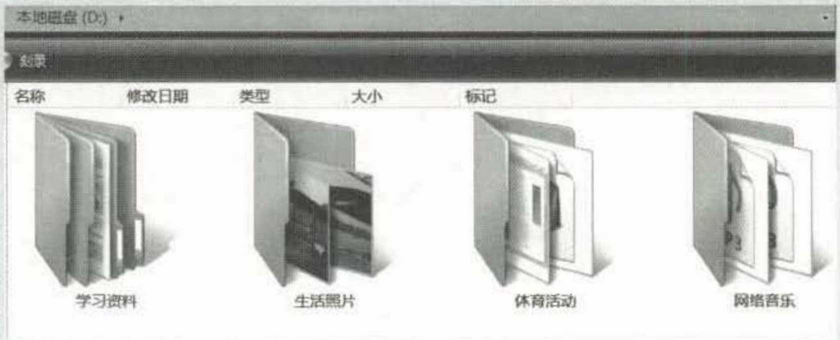
第三章 函 数

第四章 指数函数与对数函数

第五章 三角函数

第一章 集 合

新的学期就要开始了，李明在开学前要把自己电脑保存的资料整理一番．经过一番忙碌，李明电脑中的资料被他分类放在了以下几个文件夹里：有关语文、数学、英语、计算机的学习文档放在{学习资料}里，暑假全家去风景区拍摄的照片放在{生活照片}里，自己录制的乒乓球比赛录像放在{体育活动}里，从网上下载的音乐放在{网络音乐}里……



这里，李明无意中触及了一个数学概念：集合．上面的{学习资料}，{生活照片}，{体育活动}，{网络音乐}……就是一些集合的例子．那么，什么是集合呢？形象地说，集合就是放在一起的“一堆东西”，集合里的“东西”叫做元素．

想想看，在生活中，你还能找到哪些可以放在一起的“一堆东西”？

集合这个概念在数学中非常重要，是建造整个数学大厦的基础，使用集合观点，就能简洁、精确地表达各种数学对象以及它们之间的关系．

同学们，学习贵在打好基础，让我们从学好数学的基础——集合开始吧．

1.1 集合及其运算

1.1.1 集合的概念

问题 在数学中，如果把一些能够确定的对象看成一个整体，那么如何对这个整体进行表述和研究呢？

首先，我们引进集合的概念.

一般地，把一些能够确定的对象看成一个整体，我们就说，这个整体是由这些对象的全体构成的**集合**. 构成集合的每个对象都叫做集合的**元素**. 这样，我们就可用集合与元素的概念来描述一些对象构成的整体. 例如：

(1) 某职业学校数控班学生的全体构成一个集合，其中每个学生都是这个集合的一个元素；

(2) 正数的全体构成一个集合，每个正数都是这个集合的一个元素；

(3) 平行四边形的全体构成一个集合，其中任意一个平行四边形都是这个集合的一个元素；

(4) 数轴上所有点的坐标的全体构成一个集合，其中每个点的坐标都是这个集合的一个元素.

为了描述元素与集合以及集合与集合之间的关系，我们引进字母及特定的符号来分别表示它们.

一个集合，通常用大写英文字母 A，B，C，…表示，它的元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作

$$a \in A,$$

读作"a 属于 A".

如果 a 不是 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作

$$a \notin A,$$

读作“a 不属于 A”.

关于集合的概念，再作如下说明：

(1) 作为集合的元素，必须是能够确定的. 这就是说，不能确定的对象，就不能构成集合. 例如，高一电子班高个子同学的全体，就不能构成集合. 这是由于没有规定多高才算是高个子，因而“高个子同学”不能确定.

思考与讨论

下面的照片中哪些同学是“高个子同学”？

(2) 对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的. 这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素.

集合有时也简称为**集**. 含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

我们约定用一些大写英文字母，表示常用到的一些数集：

非负整数全体构成的集合，叫做**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

在自然数集内排除 0 的集合，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$；

整数全体构成的集合，叫做**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

有理数全体构成的集合，叫做**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

实数全体构成的集合，叫做**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

练习

A 组

1. 下列语句是否能确定一个集合？

(1) 大于 10 的自然数的全体；

(2) 某学校高一园林班性格开朗的男生全体；

(3) 质数的全体；

(4) 与 1 接近的实数的全体.

2. 自然数集、整数集、有理数集、实数集分别用哪几个大写英文字母表示？它们是有限集还是无限集？

3. 判断下列关系式是否正确？

(1) $0 \in \mathbf{N}_+$；　(2) $-\frac{3}{2} \in \mathbf{Q}$；　(3) $\pi \in \mathbf{Q}$；

(4) $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$；　(5) $-3 \in \mathbf{Z}$；　(6) $0 \in \mathbf{N}$.

B 组

1. 用符号$\in$或$\notin$填空：

(1) -3 ____ $\mathbf{N}$；　(2) 3.14 ____ $\mathbf{Q}$；　(3) $\frac{1}{3}$ ____ $\mathbf{Z}$；

(4) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{R}$；　(5) $-\frac{1}{2}$ ____ $\mathbf{R}$；　(6) 0 ____ $\mathbf{Z}$.

2. 判断下列语句是否正确？

(1) 由 2，2，3，3 构成一个集合，这个集合共有 4 个元素；

(2) 所有三角形构成的集合是无限集；

(3) 周长为 20 cm 的三角形构成的集合是有限集；

(4) 如果 $a \in \mathbf{Q}$，$b \in \mathbf{Q}$，则 $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b \in \mathbf{Q}$.

1.1.2 集合的表示方法

问题

如何表示集合？

集合是数学中最基本的语言，在今后的数学学习中，我们都要用到它．为此，我们来学习集合的表示方法．

集合的元素有多有少，有的是有限集，有的是无限集．在不同的地方，使用集合研究问题的目的也各不相同，根据不同的需要表示集合的方法也各不相同．经常使用的表示集合的方法有两种：

1. 列举法

当集合元素不多时，我们常常把集合的元素列举出来，写在花括号内表示这个集合，这种表示集合的方法

叫做**列举法**.

例如，由 1，2，3，4，5，6 这 6 个数组成的集合，可表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

又如，中国古代的四大发明构成的集合，可以表示为

{指南针，造纸术，活字印刷术，火药}.

有些集合的元素较多，在不发生误解的情况下，也可列出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示. 例如，小于 100 的自然数的全体构成的集合，可表示为

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots, 99\}.$$

1932 年，我国运动员刘长春一个人代表中国首次参加现代奥运会（第 10 届）.

由一个元素构成的集合，例如 $\{a\}$，要与它的元素 a 加以区别. a 与 $\{a\}$ 是完全不同的，a 是集合 $\{a\}$ 的一个元素，而 $\{a\}$ 表示一个集合. 例如，某个代表团只有一人，这个人本身和由这个人构成的代表团的含义是不同的.

用列举法表示集合时，不必考虑元素的前后顺序. 例如，集合

$$\{1, 2\} \quad 与 \ \{2, 1\}$$

表示同一个集合.

例1 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 3 且小于 10 的奇数的全体构成的集合；

(2) 一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的解集.

解 (1) $\{5, 7, 9\}$； (2) $\{2, 3\}$.

2. 性质描述法

我们来看正偶数 2，4，6，8，…的全体构成的集合，它的每一个元素都具有性质

“能被 2 整除，且大于 0”，

而这个集合外的元素都不具有这种性质.

我们常用上述性质把正偶数集合表示为

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ 能被 2 整除，且大于 } 0\},$$

或 $$\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2n,\ n \in \mathbf{N}_+\}.$$

花括号内竖线左边的 x 表示该集合的任意一个元

素，并标出元素的取值范围，在竖线右边写出只有集合内的元素 x 才具有的性质.

给定 x 的取值集合 I，如果属于集合 A 的任意一个元素 x 都具有性质 $p(x)$，而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$，则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的**特征性质**.

于是，集合 A 可用它的特征性质 $p(x)$ 表示为

$$A=\{x\in I \mid p(x)\}❶,$$

它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的所有元素构成的. 这种用特征性质表示集合的方法叫做**性质描述法**.

❶此式也可简记为 $A=\{x \mid p(x)\}$.

例如，集合 $A=\{x\in \mathbf{R} \mid x^2-1=0\}$ 的特征性质是

$$x^2-1=0.$$

它表示在实数范围内，集合 A 的所有元素都满足方程 $x^2-1=0$，满足方程 $x^2-1=0$ 的所有元素也都在集合 A 内.

集合 A 通常也用来表示方程 $x^2-1=0$ 的解集. 如果方程的解的个数是有限的，我们也可以用列举法表示方程的解集. 例如方程 $x^2-1=0$ 的解集，也可以表示为 $\{-1, 1\}$.

在某种约定下，x 的取值集合可省略不写. 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中取值，$x\in \mathbf{R}$ 常常省略不写. 上述集合 A 可写作

$$\{x \mid x^2-1=0\}.$$

例2 用性质描述法表示下列集合：

(1) 大于 3 的实数的全体构成的集合；

(2) 平行四边形的全体构成的集合；

(3) 平面 α 内到两定点 A, B 距离相等的点的全体构成的集合.

解 (1) $\{x \mid x>3\}$；

(2) $\{x \mid x$ 是两组对边分别平行的四边形$\}$；

(3) $l=\{P\in\alpha \mid |PA|=|PB|$❷, A, B 为 α 内的两

❷ $|PA|$, $|PB|$ 分别表示点 P 到 A, B 两点的距离.

定点}.

注 (1) 一个集合的特征性质不是唯一的. 例如，“两组对边分别平行的四边形”是平行四边形全体的特征性质；同样，“有一组对边平行且相等的四边形”也是平行四边形全体的特征性质. 因此平行四边形全体也可表示为

$$\{x \mid x \text{ 是有一组对边平行且相等的四边形}\}.$$

(2) 在几何中，通常用大写字母表示点（元素），用小写字母表示点的集合.

练习

A组

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 3 且小于 11 的偶数全体；

(2) 平方等于 1 的实数全体；

(3) 比 2 大 3 的实数全体；

(4) 一年中有 31 天的月份的全体；

(5) 大于 3.5 且小于 12.8 的整数的全体；

(6) 方程 $x^2=4$ 的解集；

(7) 方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集；

(8) 你本学期所学习的课程全体.

2. 用性质描述法表示下列集合：

(1) 你所在班级所有同学构成的集合；

(2) 正奇数的全体；

(3) 不大于 3 的全体实数；

(4) 绝对值等于 3 的实数的全体；

(5) 平面 α 内与一定点 O 距离等于 3 cm 的点的集合；

(6) 矩形的全体构成的集合.

B组

1. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 构成英语单词 mathematics（数学）字母的全体；

(2) 方程 $x^2+5x+6=0$ 的解集；

(3) 10 以内的质数；

(4) 在自然数集内，小于 1 000 的奇数构成的集合；

(5) 方程 $x^3+2x^2-3x=0$ 的解集；

(6) 绝对值小于 3 的整数的全体.

2. 用性质描述法表示下列集合：

(1) 偶数全体构成的集合；

(2) 奇数全体构成的集合；

(3) 被 3 除余 2 的自然数的全体构成的集合；

(4) 梯形全体构成的集合；

(5) 菱形全体构成的集合；

(6) 正方形全体构成的集合.

1.1.3 集合之间的关系

问题 考察集合

$E=\{x \mid x\text{是河南人}\}$，$F=\{x \mid x\text{是中国人}\}$，

$G=\{1, 2, 3\}$，$H=\{x \mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$.

集合 E 和 F，集合 G 和 H 分别有怎样的关系？

容易看出，集合 E 的任意一个元素都是集合 F 的元素，但在集合 F 中有的元素不在 E 中. 集合 G 与集合 H 的元素完全相同. 换句话说集合 G 的任意一个元素都是集合 H 的元素，并且集合 H 的任意一个元素都是集合 G 的元素.

为了表达集合之间的这些关系，我们引入如下概念.

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读作“A 包含于 B”，或“B 包含 A”.

依上述定义，任何一个集合 A 都是它本身的子集，即

$$A \subseteq A.$$

思考与讨论

为什么有 $A \subseteq A$，你能说出理由吗？

如前面的 E，F 和 G，H，它们之间的关系可用上述符号分别表示为：

$\{x \mid x \text{是河南人}\} \subseteq \{x \mid x \text{是中国人}\}$；

$\{1, 2, 3\} \subseteq \{x \mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$.

我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，

$\{x \mid x+1=x+2\}=\varnothing$，$\{x \mid x^2<0\}=\varnothing$.

我们规定空集是任意一集合的子集，❶ 也就是说，对于任何集合 A，都有

$$\varnothing \subseteq A.$$

思考与讨论

❶想一想，这个规定为什么是合理的？

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A \subsetneqq B \text{ 或 } B \supsetneqq A,$$

读作“A 真包含于 B”，或“B 真包含 A”.

如问题中的 E，F 可用真子集的符号表示为

$$E \subsetneqq F.$$

我们常用平面上一个封闭曲线的内部表示一个集合（图1-1(1)）. 如果集合 A 是集合 B 的真子集，则把表示 A 的区域画在表示 B 的区域内部（图 1-1(2)），这种图形通常叫做**维恩**（Venn）**图**.

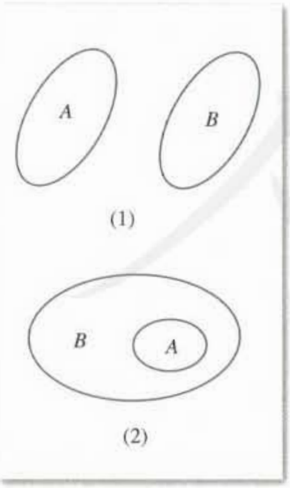


图 1-1

根据子集、真子集的定义可推知：

对于集合 A，B，C，如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

对于集合 A，B，C，如果 $A \subsetneqq B$，$B \subsetneqq C$，则 $A \subsetneqq C$.

为了方便起见，通常把步骤用大写英文字母S表示. 例如，步骤1记为S1.

例1 写出集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 的所有子集和真子集.

分析 如何一个不漏地写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集呢？我们采用下面的步骤：

S1 因为空集 $\varnothing$ 是所有集合的子集，所以首先写出空集 $\varnothing$；

S2 写出所有由一个元素构成的集合：$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$；

S3 写出所有由两个元素构成的集合：$\{1, 2\}$，$\{1,3\}$，$\{2, 3\}$；

S4 写出所有由三个元素构成的集合：$\{1, 2, 3\}$.

解 集合 A 的所有子集是：

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$.

在上述子集中，除去集合 A 本身，即 $\{1, 2, 3\}$，剩下的都是 A 的真子集.

如果两个集合的元素完全相同，那么我们就说这两个**集合相等**. 集合 A 等于集合 B，记作

$$A=B.$$

如前面的集合 G，H，它们之间的关系就可用相等的符号表示为

$$G=H.$$

由相等的定义，可得：

如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；反之，如果 $A=B$，那么 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

知识延伸

当集合 A 不是集合 B 的子集时，记作

$$A\not\subseteq B \quad 或 \quad B\not\supseteq A,$$

读作"A 不包含于 B"，或"B 不包含 A".

如果 $A=\{1, 2\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，则 $A\not\subseteq B$.

❶有时为了方便，像正奇数集、正整数集等这样的集合，也可以表示为 $\{x \mid x$ 是正奇数$\}$，$\{x \mid x$ 是正整数$\}$.

例2 说出以下两个集合之间的关系：

(1) $A=\{2, 4, 5, 7\}$，$B=\{2, 5\}$；

(2) $E=\{x \mid x^2=1\}$，$F=\{-1, 1\}$；

(3) $G=\{x \mid x$ 是正奇数$\}$，$H=\{x \mid x$ 是正整数$\}$. ❶

解 (1) $B \subsetneqq A$； (2) $E=F$； (3) $G \subsetneqq H$.

练 习

A 组

1. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$）填空：

(1) a ____ $\{a, b, c\}$； (2) $\{4, 5, 6\}$ ____ $\{6, 5, 4\}$；

(3) $\{a\}$ ____ $\{a, b, c\}$； (4) $\{a, b, c\}$ ____ $\{b, c\}$；

(5) $\varnothing$ ____ $\{1, 2, 3\}$； (6) $\{x \mid x$ 是矩形$\}$ ____ $\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$；

(7) 5 ____ $\{5\}$； (8) $\{2, 4, 6, 8\}$ ____ $\{2, 8\}$.

2. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集和真子集.

3. 指出下列各对集合之间的关系：

(1) $A=\{x \mid x$ 是等边三角形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\}$；

(2) $C=\{x \mid x$ 是等腰直角三角形$\}$，$D=\{x \mid x$ 是有一个角是 45° 的直角三角形$\}$.

4. 指出下列各集合之间的关系，并用图表示：

$A=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$， $B=\{x \mid x$ 是菱形$\}$，

$C=\{x \mid x$ 是矩形$\}$， $D=\{x \mid x$ 是正方形$\}$.

B 组

1. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$）填空：

(1) $\{a, b\}$ ____ $\{b, a\}$；

(2) $\varnothing$ ____ $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2=-1\}$；

(3) $\varnothing$ ____ $\{0\}$；

(4) $\{x \mid x>1\}$ ____ $\{y \mid y-1>0\}$.

2. 指出下列各对集合之间的关系：

(1) $E=\{x \mid x$ 是两组对边分别平行的四边形$\}$，

$F=\{x \mid x$ 是一组对边平行且相等的四边形$\}$；

(2) $G=\{x \mid x$ 是能被 3 整除的整数$\}$，

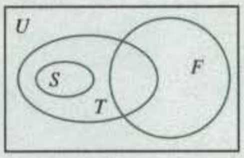
$H=\{x \mid x$ 是能被 6 整除的整数$\}$.

3. 指出下列四个集合之间的关系，并用图表示：

$A=\{x \mid x$ 是四边形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$，

$C=\{x \mid x$ 是矩形$\}$，　$D=\{x \mid x$ 是正方形$\}$.

4. 集合 U，S，T，F 如图所示，下列关系中哪些是正确的，哪些是错误的？



(第 4 题)

(1) $S \subsetneqq U$；　(2) $F \subsetneqq T$；

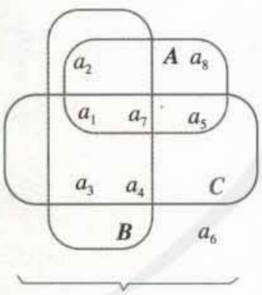
(3) $S \subsetneqq T$；　(4) $S \supsetneqq F$；

(5) $S \subsetneqq F$；　(6) $F \subsetneqq U$.

1.1.4 集合的运算

问题 某商店计划一季度购进 8 种商品，并把商品分别编号为 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8. 这 8 种商品构成的集合记为

$$U=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}.$$



已知这个商店第一个月购进商品构成的集合为

$$A=\{a_1, a_2, a_5, a_7, a_8\};$$

第二个月购进商品构成的集合为

$$B=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_7\};$$

第三个月购进商品构成的集合为

$$C=\{a_1, a_3, a_4, a_5, a_7\}.$$

求三个月中每个月都购进的商品集合 E；三个月中购进的所有商品的集合 F；在计划购进的商品中，还没有购进的商品构成的集合 G？

只要对每月购进的商品检验一下，容易得到：

$E=\{a_1, a_7\}$；

$F=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8\}$；

$G=\{a_6\}$.

在实际问题中，常常需要由已知的两个或多个集合，构造出新的集合. 为此我们引进集合的三个重要运算：交，并，补.

"运算"这个词，过去只用于数或代数式. 这里集合运算的意义是，由两个或多个已知的集合，按照某种指定的法则，构造出一个新的集合.

1. 集合的交

给定两个集合 A，B，由既属于 A 又属于 B 的所有公共元素所构成的集合，叫做 A，B 的**交集**，记作

$$A \cap B,$$

读作"A 交 B".

例如，在本节的问题中

$$A \cap B = \{a_1, a_2, a_7\};$$

$$E = (A \cap B) \cap C^{❶} = \{a_1, a_7\}.$$

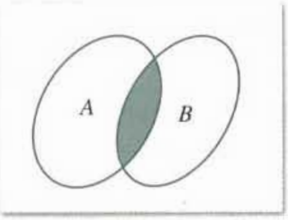


图 1-2

集合 A 与 B 的交集，可用图 1-2 中的阴影表示.

如果两个集合没有公共元素，则它们的交集等于空集.

例如 $A = \{1, 3, 5\}$，$B = \{2, 4, 6\}$，则

$$A \cap B = \varnothing.$$

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A,B，都有

(1) $A \cap B = B \cap A$；

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

(3) $A \cap A = A$；

(4) $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$.

思考与讨论

对于任意两个集合 A，B，如果 $A \subseteq B$，那么 $A \cap B=$____.

2. 集合的并

给定两个集合 A，B，把它们所有的元素合并在一起构成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作

$$A \cup B,$$

读作"A 并 B".

例如，本节问题中：

❶ A 与 B 的交集 $A \cap B$ 再与 C 求交集.

$$A\cup B=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8\};$$

$$F=(A\cup B)\cup C^{❶}=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8\}.$$

注 在求集合的并集时，同时属于 A 和 B 的公共元素，在并集中只列举一次. 在上例中，元素 a_1 在并集中只列一次.

由并集的定义可知，对于任意两个集合 A,B,有

(1) $A\cup B=B\cup A$;

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(3) $A\cup A=A$;

(4) $A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$.

思考与讨论

对于任意两个集合 A, B, 如果 $A\subseteq B$, 则 $A\cup B=$____.

集合 A 与 B 的并集，可用图1-3（1）或（2）中的阴影表示.

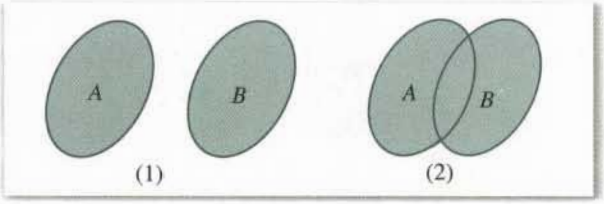


图 1-3

例1 已知 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, 求 $A\cap B$, $A\cup B$.

解 $A\cap B=\{1, 2, 3\}\cap\{3, 4, 5\}=\{3\}$;

$A\cup B=\{1, 2, 3\}\cup\{3, 4, 5\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

结合课件 101❷ 学习集合的交、并、补运算.

例2 设 $A=\{x\mid x$是奇数$\}$, $B=\{x\mid x$是偶数$\}$, $\mathbf{Z}=\{x\mid x$是整数$\}$, 求 $A\cap\mathbf{Z}$, $B\cap\mathbf{Z}$, $A\cap B$.

解 $A\cap\mathbf{Z}=\{x\mid x$是奇数$\}\cap\{x\mid x$是整数$\}=\{x\mid x$是奇数$\}=A$;

$B\cap\mathbf{Z}=\{x\mid x$是偶数$\}\cap\{x\mid x$是整数$\}=\{x\mid x$是偶数$\}=B$;

$A\cap B=\{x\mid x$是奇数$\}\cap\{x\mid x$是偶数$\}=\varnothing$.

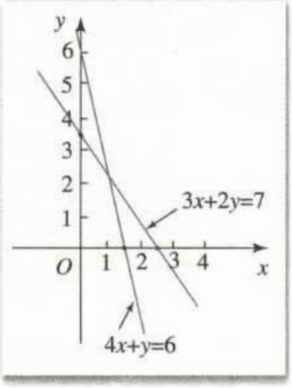
例3 已知 $C=\{x\mid x\geqslant 1\}$, $D=\{x\mid x<5\}$, 求 $C\cap D$, $C\cup D$.

---

❶ A 与 B 的并集 $A\cup B$ 再与 C 求并集.

❷ 本书中课件请登录 http://www.pep.com.cn/xgjy/zcjy/下载使用.

解　$C\cap D=\{x\mid x\geqslant 1\}\cap\{x\mid x<5\}$
$=\{x\mid 1\leqslant x<5\}$；
$C\cup D=\{x\mid x\geqslant 1\}\cup\{x\mid x<5\}=\mathbf{R}$.



例4　已知　$A=\{(x,\ y)\mid 4x+y=6\}$，
$B=\{(x,\ y)\mid 3x+2y=7\}$，
求 $A\cap B$.

分析　集合 A 和 B 的元素是一些有序实数对 $(x,\ y)$. A，B 的交集，即为方程组

$$\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}$$

的解集.

解

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,\ y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,\ y)\mid 3x+2y=7\}\\&=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}\\&=\{(1,\ 2)\}.\end{aligned}$$

练习

A 组

1. 已知 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

2. 已知 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$B=\{b,\ d,\ e,\ f\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

3. 用维恩图表示：如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$，$A\cup B=B$.

4. 已知 $A=\{x\mid x^2-9=0\}$，$B=\{x\mid x-3=0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$（用列举法表示）.

B 组

1. 对任意集合 A，B，关系 $(A\cap B)\subsetneqq(A\cup B)$ 总成立吗？

2. 已知 $A=\{x\mid x$ 是锐角三角形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是钝角三角形$\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

3. 已知 $A=\{(x,\ y)\mid 2x+3y=1\}$，$B=\{(x,\ y)\mid 3x-2y=3\}$，求 $A\cap B$（用列举法表示）.

4. 设集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

3. 集合的补集

我们在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某一给定集合的子集，那么称这个给定的集合为这些集合的**全集**，通常用 U 表示. 例如，我们在研究数集时，常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

在本节开始的问题中，计划购进商品的全部品种构成的集合作为全集，每月购进品种构成的集合作为全集的子集.

如果 A 是全集 U 的一个子集，由 U 中的所有不属于 A 的元素构成的集合，叫做 A 在 U 中的**补集**，记作

$$\complement_U A,$$

读作"A 在 U 中的补集". 如图 1-4 中的阴影所示.

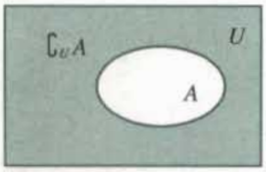


图 1-4

在本节问题的解答中，F 在 U 中的补集为 G. 即

$$\complement_U F = G.$$

由补集定义可知，对于任意集合 A，有

(1) $A \cup \complement_U A = U$;

(2) $A \cap \complement_U A = \varnothing$;

(3) $\complement_U(\complement_U A) = A$.

例5 已知 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A=\{1, 3, 5\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap\complement_U A$，$A\cup\complement_U A$.

解 $\complement_U A=\{2, 4, 6\}$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$.

例6 已知 $U=\{x \mid x$ 是实数$\}$，$\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$，求 $\complement_U\mathbf{Q}$.

解 $\complement_U\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是无理数$\}$.

例7 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x>5\}$，求 $\complement_U A$.

解 $\complement_U A=\{x \mid x\leqslant 5\}$.

练 习

A 组

1. 设 $U=\{x \mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.
2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x<5\}$，求 $\complement_U A$.

3. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x \mid -1<x<1\}$，求 $\complement_U A$, $\complement_U A\cap U$, $\complement_U A\cup U$, $A\cap\complement_U A$, $A\cup\complement_U A$.

4. 设全集 $U=\mathbf{Z}$, $A=\{x \mid x=2k,\ k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$，求 $\complement_U A$, $\complement_U B$.

B 组

1. 设 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{5, 2, 1\}$, $B=\{5, 4, 3, 2\}$，求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U A\cap\complement_U B$, $\complement_U A\cup\complement_U B$.

2. 已知 $U=\{\alpha \mid 0°<\alpha<180°\}$, $A=\{x \mid x$ 是锐角$\}$, $B=\{x \mid x$ 是钝角$\}$，求 $\complement_U A\cap B$, $\complement_U A\cup\complement_U B$, $\complement_U(A\cup B)$.

3. 如果 $U=\{x \mid x$ 是整数$\}$, $A=\{x \mid x$ 是奇数$\}$, $B=\{x \mid x$ 是 5 的倍数$\}$，求 $B\cap\complement_U A$.

习题

1. 用适当的方法表示下列集合：
   (1) 中国国旗所用颜色的全体所构成的集合；
   (2) 世界上最高的山峰所构成的集合；
   (3) 大于 0 并且小于 20 的正偶数的全体所构成的集合；
   (4) 大于 0.9 并且小于 3.9 的自然数的全体所构成的集合；
   (5) 被 3 除余 1 的整数的全体所构成的集合；
   (6) 15 的正因数的全体所构成的集合；
   (7) 绝对值等于 2 的实数的全体所构成的集合；
   (8) 9 的平方根的全体所构成的集合.
2. 用列举法写出下列方程的解集：
   (1) $2x-1=0$;
   (2) $4(x+1)-3(x-1)=2$;
   (3) $x^2-5x+4=0$;
   (4) $x^2+x-1=0$.

3. 判断下列关系是否正确？

(1) $2 \subsetneqq \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 10\}$；

(2) $2 \in \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 10\}$；

(3) $\{2\} \subsetneqq \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 10\}$；

(4) $\varnothing \in \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 10\}$；

(5) $\varnothing \nsubseteq \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 10\}$；

(6) $\varnothing \subsetneqq \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 10\}$.

4. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$，$C=\{6, 7, 8, 9\}$，求

(1) $A \cap B$，$B \cap C$，$A \cap C$；

(2) $A \cup B$，$B \cup C$，$A \cup C$.

5. 用适当的集合填空：

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A			
B			

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A			
B			

6. 已知 $A=\{x \mid x$ 是菱形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是矩形$\}$，求 $A \cap B$.

7. 已知 $A=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是菱形$\}$，求 $A \cap B$，$A \cup B$.

8. 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{4, 7, 8\}$.

(1) 求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A \cap \complement_U B$，$\complement_U A \cup \complement_U B$；

(2) 验证：$\complement_U(A \cap B)=\complement_U A \cup \complement_U B$，

$\complement_U(A \cup B)=\complement_U A \cap \complement_U B$.

9. 下列集合中哪些是空集？哪些是有限集？哪些是无限集？

(1) $\{x \mid x+1=1\}$；

(2) $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$；

(3) $\{x \mid x^2+1=0\}$；

(4) $\{x \mid x^2-2x-3=0\}$.

10. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\supseteq$，$=$）填空：

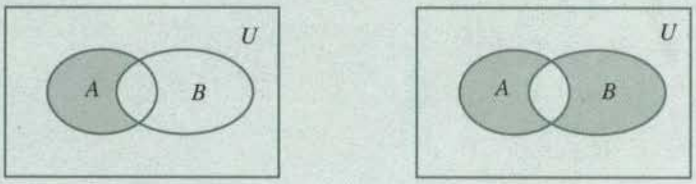
(1) 2 ____ $\{x \mid x$ 是质数$\}$；

(2) $\{0\}$ ____ $\varnothing$；

(3) $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{R}$；

(4) $\{x \mid x^2=-1\}$ ____ $\{x \mid x^3=-1\}$.

11. 用集合的符号，表示图中的阴影部分：



(1) (2)

（第 11 题）

12. 已知 $A=\{U$ 中的奇数$\}$：

(1) 若 $U=\{4,5,6\}$，列出 A 中所有元素；

(2) 若 $U=\{$小于 15 的正整数$\}$，列出 A 中所有元素；

(3) 若 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid 25<x<40\}$，列出 A 中所有元素.

13. 如果 $U=\{x\mid x$ 是鸟$\}$，$P=\{x\mid x$ 是不会飞的鸟$\}$，$Q=\{x\mid x$ 是雌鸟$\}$，分别说出 $\complement_U P\cap Q$ 和 $P\cap\complement_U Q$ 这两个集合的特征性质.

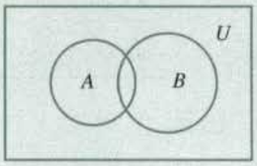
14. 图中 U 是全集，A，B 是 U 的两个子集，用阴影表示：

(1) $\complement_U A\cap\complement_U B$；

(2) $\complement_U A\cup\complement_U B$；

(3) 画图验证：

$$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B,$$
$$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B.$$



（第 14 题）

1.2 充要条件

1.2.1 充要条件

在数学中，我们经常遇到“如果 p, 则 q”形式的命题，这种命题的真假要通过推理来判断. 如果 p 真，通过推理，证明 q 也为真，那么“如果 p, 则 q”就是真命题. 这时，我们就说，由 p 可**推出** q. 用符号记作

$$p \Rightarrow q,$$

读作“p 推出 q”.

p 推出 q，通常还表述为

p 是 q 的**充分条件**；

或　　q 是 p 的**必要条件**.

这就是说，

如果 p, 则 q；（真）

$p \Rightarrow q$;

p 是 q 的充分条件；

q 是 p 的必要条件.

这四句话表达的是同一逻辑关系.

下面我们举例说明.

(1)“如果 $x=y$, 则 $x^2=y^2$”(真)，这个命题还可表述为

$x=y \Rightarrow x^2=y^2$;

或　　$x=y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件；

或　　$x^2=y^2$ 是 $x=y$ 的必要条件.

以上四句话表达的都是同一意义.

(2) "在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB = AC$，那么 $\angle B = \angle C$"（真），它还可表述为

在$\triangle ABC$中，$AB=AC \Rightarrow \angle B=\angle C$；

或　在$\triangle ABC$中，$AB=AC$是$\angle B=\angle C$的充分条件；

或　在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$是$AB=AC$的必要条件.

以上四句话表达的都是同一意义.

我们知道，"在$\triangle ABC$中，如果$\angle B=\angle C$，则$AB=AC$"也是真命题. 这就是说，$\angle B = \angle C$不仅是$AB = AC$的必要条件，也是$AB = AC$的充分条件.

如果 p 是 q 的充分条件（$p \Rightarrow q$），p 又是 q 的必要条件（$q \Rightarrow p$），则称 p 是 q 的**充分且必要条件**，简称**充要条件**. 记作

$$p \Leftrightarrow q.$$

显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件. p 是 q 的充要条件，又常说成 q **当且仅当** p，或 p 与 q **等价**.

例 已知 p 是 q 的充分条件，s 是 r 的必要条件，p 是 s 的充要条件，求 q 与 r 的关系.

解 根据已知可得

$$p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow s,\ p \Leftrightarrow s.$$

所以　$r \Rightarrow s,\ s \Leftrightarrow p,\ p \Rightarrow q.$

即　$r \Rightarrow s \Rightarrow p \Rightarrow q.$

所以　$r \Rightarrow q.$

即，r 是 q 的充分条件，q 是 r 的必要条件.

练习

A组

1. 分别用充分条件、必要条件或充要条件叙述下列真命题：

(1) 如果 $x-1=0$，则 $x^2-1=0$；

(2) 设 $x, y \in \mathbf{R}$，如果 $x^2+y^2=0$，则 $x=0$，且 $y=0$.

2. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) x 为自然数是 x 为整数的______；

(2) x 为有理数是 x 为实数的______；

(3) x 为实数是 x 为有理数的______；

(4) $x>3$ 是 $x>5$ 的______.

B 组

1. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $A=\varnothing$ 是 $A\cup B=B$ 的______；

(2) $A\subseteq B$ 是 $A\cap B=A$ 的______；

(3) $x\in A$ 是 $x\in A\cap B$ 的______；

(4) $x\in A$ 且 $A\subsetneqq B$ 是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 的______.

2. 判断下列命题是不是真命题？

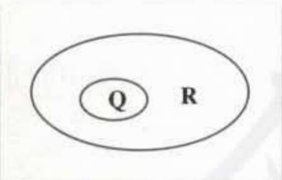
(1) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的必要条件；

(2) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的充分条件；

(3) $x-2=0$ 是 $x^2-4=0$ 的必要条件；

(4) $x-2=0$ 是 $x^2-4=0$ 的充要条件.

1.2.2 子集与推出的关系[1]



已知

$\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$，$\mathbf{R}=\{x \mid x$ 是实数$\}$，

容易判断 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集.

如果再考虑它们特征性质之间的关系，也容易判断命题

"如果 x 是有理数，则 x 是实数"

正确. 即

$$x\text{ 是有理数} \Rightarrow x\text{ 是实数}.$$

反过来，如果上述命题正确，则有理数集 $\mathbf{Q}$ 也一定是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集.

[1] 本节为选学内容.

由此可见，我们可通过判断两个集合之间的关系来判断它们的特征性质之间的关系.

再举一个例子：山东省居民构成的集合一定是中国居民构成集合的子集.

由此，我们一定可以判断命题“如果我是山东省的居民，则我是中国居民”正确.

一般地，设 $A=\{x \mid p(x)\}$，$B=\{x \mid q(x)\}$，如果 $A \subseteq B$（图1-5），则

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

于是 x 具有性质 $p(x) \Rightarrow x$ 具有性质 $q(x)$，即

$$p(x) \Rightarrow q(x);$$

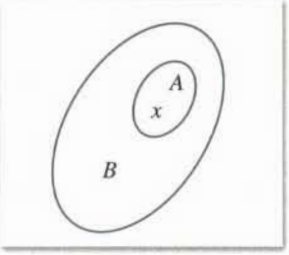


图 1-5

反之，如果 A 中的所有元素 x 都具有性质 $q(x)$，则 A 一定是 B 的子集.

例 判定下列集合 A 与 B 的关系：

(1) $A=\{x \mid x$ 是 12 的约数$\}$，$B=\{x \mid x$ 是 36 的约数$\}$；

(2) $A=\{x \mid x>3\}$，$B=\{x \mid x>5\}$；

(3) $A=\{x \mid x$ 是矩形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是有一个角为直角的平行四边形$\}$.

解 (1) 因为 x 是 12 的约数 $\Rightarrow x$ 是 36 的约数，

所以 $A \subseteq B$；

(2) 因为 $x>5 \Rightarrow x>3$，

所以 $B \subseteq A$；

(3) 因为 x 是矩形 $\Leftrightarrow x$ 是有一个角为直角的平行四边形，

所以 $A=B$.

练习

A 组

1. 说明下列各题中集合 A 与 B 之间的关系：

(1) $A=\{x \mid x$ 是矩形$\}$，

$B=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$；

(2) $A=\{x \mid x$ 是 2 的倍数$\}$，

$B=\{x \mid x$ 是 4 的倍数$\}$.

2. 已知 $A=\{x \mid x$ 是直角三角形$\}$，$B=\{x \mid p(x)\}$，试确定一个 $p(x)$，使 $A \subseteq B$.

B组

1. 说明下列各题中集合 A 与 B 之间的关系：

(1) $A=\{x \mid x$ 是等边三角形$\}$，

$B=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\}$；

(2) $A=\{x \mid x$ 是两组对角分别相等的四边形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是两组对边分别相等的四边形$\}$.

2. 已知 $M=\{x \mid p(x)\}$，$N=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$，试确定一个 $p(x)$，使 $M \subsetneqq N$.

习　题

1. 分别用充分条件、必要条件或充要条件叙述下列真命题：

(1) 如果四边形的一组对边平行且相等，则这个四边形是平行四边形；

(2) 如果四边形 $ABCD$ 是正方形，则这个四边形的四边相等；

(3) 如果两个三角形相似，则它们的对应角相等；

(4) 如果 $\angle A=30^\circ$，则 $\sin A=\dfrac{1}{2}$.

2. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $x=3$ 是 $x^2-2x-3=0$ 的______；

(2) $x>5$ 是 $x>3$ 的______；

(3) $x^2-4=0$ 是 $x+2=0$ 的______；

(4) 两个三角形的三边对应相等，是两个三角形全等的______；

(5) $a=0$ 是 $ab=0$ 的______；

(6) $ab=0$ 是 $a=0$ 的______.

3. 判断下列命题是不是真命题?

(1) $a>b$ 是 $a^2>b^2$ 的充分条件;

(2) $a>b$ 是 $|a|>|b|$ 的必要条件;

(3) 今天是星期一是明天是星期二的充要条件;

(4) 两个三角形的两组对应角分别相等是两个三角形相似的充要条件.

4. 说明下列各题中集合 A 与 B 之间的关系:

(1) $A=\{x \mid x$ 是整数$\}$,
$B=\{x \mid x$ 是自然数$\}$;

(2) $A=\{x \mid x$ 是等腰直角三角形$\}$,
$B=\{x \mid x$ 是直角三角形$\}$;

(3) $A=\{x \mid x$ 是正偶数$\}$,
$B=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{N}_+\}$;

(4) $A=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\}$,
$B=\{x \mid x$ 是有两内角相等的三角形$\}$.

5. 在下列各题中, $p(x)$ 是 $q(x)$ 的什么条件?

(1) $p(x): x^2-3x+2=0$, $q(x): x=1$;

(2) $p(x): a^2>4b$, $q(x): x^2+ax+b=0$ 有实根;

(3) $p(x): a-b=0$, $q(x): a^2-b^2=0$;

(4) $p(x): a^3+b^3=0$, $q(x): a+b=0$.

复习与提问

学完本章后, 通过复习与回顾, 你应当能够回答下列问题:

1. 举例说明: 什么是集合, 什么是有限集, 什么是无限集.
2. 表示一个集合, 有哪两种方法?
3. 什么是集合的特征性质? 试举例说明.
4. 什么是一个集合的子集、真子集? 什么是空集? 能不能说, 空集是所有集合的子集?
5. 集合的包含关系与集合的特征性质存在怎样的关系?

6. 怎样的两个集合叫做相等？

7. 怎样进行集合的交、并、补运算？怎样用图表示集合、集合间的关系和运算？

8. $p \Rightarrow q$ 有哪几种等价的说法？

9. 命题 $p \Leftrightarrow q$ 有哪几种等价的说法？

10*. 举例说明“子集”与“推出”之间的关系.

阅读材料

康托尔与集合论

康托尔（G. Cantor，1845—1918）是 19 世纪末 20 世纪初德国伟大的数学家. 康托尔 1845 年 3 月 3 日出生在俄国的圣彼得堡，他的父亲是迁居俄国的丹麦商人. 在康托尔 11 岁的时候，他和父母一起迁到德国的法兰克福，在那里读中学. 像历史上的许多优秀数学家一样，他在中学阶段就表现出对数学的特殊天分，并经常得到令人惊异的结论. 1862 年，17 岁的康托尔进入瑞士苏黎世大学学习，第二年转入柏林大学，他在 1867 年获博士学位，1869 年取得在哈勒大学任教的资格，1872 年升为副教授，并在 1879 年升为正教授. 大学期间康托尔主修数论，但后来受到著名数学家魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass，1815—1897）的影响，对数学推导的严格性和数学分析产生了浓厚的兴趣.

当时的数学家在研究一些数学基本概念的时候，例如实数等概念的研究都要涉及由无限多个元素组成的集合，康托尔的研究也遇到了无限集的问题. 因此，他开始关注这样的问题：像正整数集那样的无限集和像实数集那样的无限集存在着怎样的关系？从直觉上来讲，数轴上对应的正整数点和整个数轴上的点会有很大的不同. 但康托尔认为这个问题或许不那么简单，他先研究了正整数集和有理数集的关系. 正有理数和正整数不同，在任何两个不同的正有理数之间都存在着另一个正有理数，事实上，任何两个正有理数之间还有无限多个有理数. 依靠直觉，似乎可以断定正有理数要比正整数多得多. 但事实并非如

此．让我们来看下面的证明：

把正有理数按以下的方式排列：

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \to & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \to & \frac{4}{1}\cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2}\cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3}\cdots \\
& \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4}\cdots \\
\downarrow & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

其中，第一行依大小顺序包括所有的以 1 为分母的正分数，即全体正整数，第二行依次包括所有以 2 为分母的正分数；第三行依次包括所有以 3 为分母的正分数等等．显然，每个正有理数都出现在这个排列中．如果我们按箭头所示次序重新排序，略去已经出现过的数，就得到全体正有理数的一个无穷序列 $\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$．这样每一个正整数 n 就对应着一个正有理数 r_n．我们知道正整数集是正有理数集的一个真子集，这就得出了一个惊人的结果：一个集合可以和它的真子集建立一一对应关系．康托尔不但证明了上述事实，他还发现，正整数集和实数集之间不可能建立这样的对应关系．

康托尔最初的证明发表在 1874 年的一篇题为“关于一切实代数数的一个性质”的文章中，它标志着集合论的诞生．

在这以后，康托尔还考虑了能否建立平面上的点和直线上的点之间的一一对应关系．从直观上说，平面上的点显然要比直线上的点多得多．康托尔最初也这么认为，但是经过三年研究后，在 1877 年，康托尔证明了：不仅平面和直线之间可以建立一一对应，而且 n 维空间的点也是可以和直线上的点建立一一对应的！这个结论与人们直观的感觉是如此的不同，以至于康托尔惊呼：“我见到了，但我不相信．”然而这又是经过了严格证明的事实．它说明科学研究不能光靠直观的感觉，只有靠理性思维和严格的逻辑推理才能发现真理，避免谬误．

第二章 不等式

2.1 不等式的基本性质

2.2 不等式的解法

2.3 不等式的应用

王华的父亲购买了一部移动电话，他想在“全球通”和“神州行”两种服务方式中选择一种，假设只考虑本地通话的费用，两种方式的资费标准见下表：

	全球通	神州行
月租费/(元·月$^{-1}$)	50	0
本地通话费/(元·min^{-1})	0.4	0.6

王华的父亲每月使用移动电话的本地通话时间平均大约是 150 min. 那么，他选择哪种服务方式较为经济呢？他请王华来帮忙算一算.

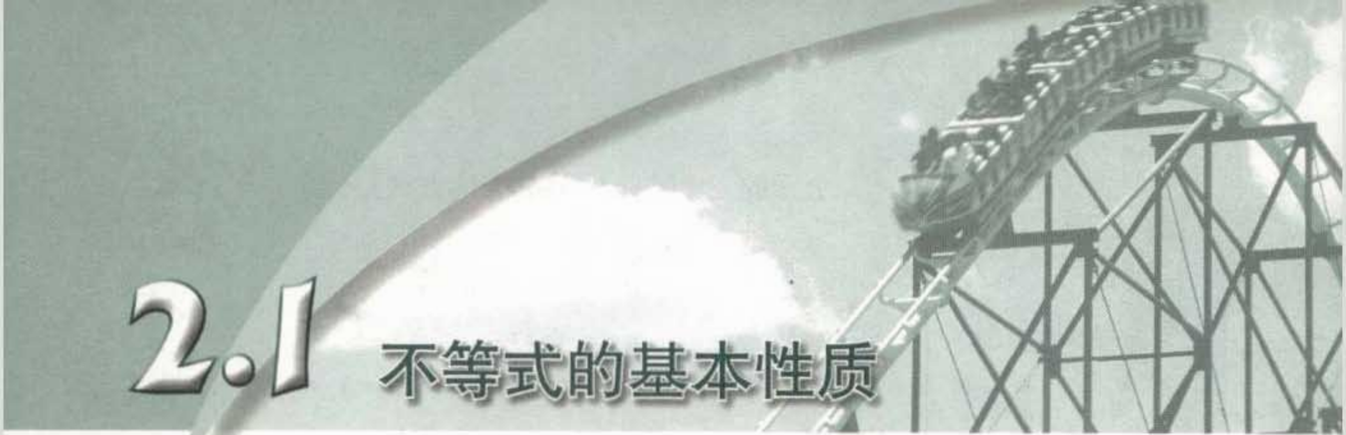
王华通过计算发现：

全球通方式的费用为 $50+0.4\times 150=110$（元）；

神州行方式的费用为 $0.6\times 150=90$（元）.

全球通方式的费用>神州行方式的费用. 所以选择神州行更为经济一些. 这就是一个生活中比较大小的不等式的例子.

我们考察事物，经常要进行大小、轻重、长短的比较. 在数学中，我们应用等式和不等式知识研究这类问题. 不等式是进一步学习数学和其他科学的基础. 我们在这里主要学习不等式的基本性质及其解法.



2.1 不等式的基本性质

2.1.1 实数的大小

> **问题**
>
> 如何比较实数的大小?

我们知道，实数与数轴上的点之间可以建立一一对应关系（图 2-1）. 例如，点 A 与数 3 对应，点 B 与数 -2 对应等. 可以看到当数轴上一动点 P 从左向右移动时，它对应的实数就从小到大变化. 这就是说，**数轴上的任意两点中，右边的点对应的实数比左边的点对应的实数大.**

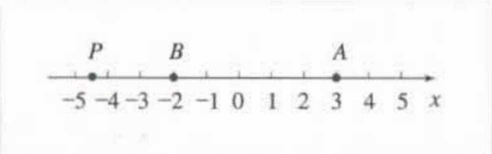


图 2-1

例如，点 A 位于点 B 的右边，则点 A 对应的实数 3 比点 B 对应的实数 -2 大，即 $3>-2$. 同样有

$$3>-3,\ 0>-2,\ 3>0,\ -3>-4,\ 4>3 \text{ 等.}$$

设 a，b 为任意两个实数，在数轴上用点 A 表示 a，用点 B 表示 b，则点 A，B 在数轴上的位置有且只有以下三种：

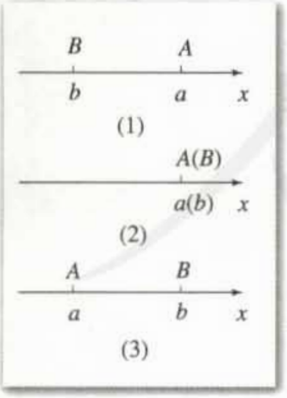


图 2-2

(1) 点 A 在点 B 右侧（图 2-2(1)）；

(2) 点 A 与点 B 重合（图 2-2(2)）；

(3) 点 A 在点 B 左侧（图 2-2(3)）.

相应的，实数 a，b 的关系为：

(1) $a>b$；(2) $a=b$；(3) $a<b$.

上面的三个式子的另一表达方法是：

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b; \quad ①$$

$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b; \quad ②$$

$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b. \quad ③$$

> **思考与讨论**
>
> 怎样根据①②③式比较两个实数的大小？

含有不等号（$<$，$>$，$\leqslant$，$\geqslant$，$\neq$）的式子，叫做**不等式**.

例1 比较下列各组中两个实数的大小：

(1) -3，-4；　　(2) $\frac{6}{7}$，$\frac{5}{6}$；

(3) $-\frac{7}{11}$，$-\frac{10}{17}$；　　(4) 12.3，$12\frac{1}{3}$.

解　(1) 因为 $(-3)-(-4)=-3+4=1>0$，

所以 $-3>-4$；

(2) 因为 $\frac{6}{7}-\frac{5}{6}=\frac{36-35}{42}=\frac{1}{42}>0$，

所以 $\frac{6}{7}>\frac{5}{6}$；

(3) 因为
$$-\frac{7}{11}-\left(-\frac{10}{17}\right)=-\frac{7}{11}+\frac{10}{17}=\frac{-119+110}{187}=-\frac{9}{187}<0,$$

所以 $-\frac{7}{11}<-\frac{10}{17}$；

(4) 因为
$$12.3-12\frac{1}{3}=12\frac{3}{10}-12\frac{1}{3}=\frac{3}{10}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{30}<0,$$

所以 $12.3<12\frac{1}{3}$.

例2 对任意实数 x，比较 $(x+1)(x+2)$ 与 $(x-3)(x+6)$ 的大小❶.

> ❶ 比较两个式子的大小，就是比较两个式子的值的大小.

解　因为 $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+6)$

$$=x^2+3x+2-x^2-3x+18$$
$$=20>0,$$

所以对任意实数 x，有

$$(x+1)(x+2)>(x-3)(x+6).$$

本书中，如无特别说明，式子中的字母 a，b，…等均表示使式子有意义的实数. 例如，在例 3 中，就省略了“对任意实数 x”这个语句.

例3 比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小.

解 因为 $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$
$$=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1$$
$$=x^2,$$

又对任意实数 x，都有 $x^2\geqslant 0$，

所以 $(x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1$.

上式当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

练 习

A 组

1. 填空：

(1) ______与数轴上的______之间可以建立起________关系，位于数轴上左边的点对应的实数______右边的点对应的实数；

(2) 如果 $a-b>0$，则______； 如果______，则 $a=b$；

如果 $a-b<0$，则______.

2. 把下列各语句用不等式表示：

(1) a 是正数； (2) a 是非正数；

(3) a 是负数； (4) a 是非负数.

3. 比较下列各组中两个实数的大小：

(1) $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$； (2) $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$；

(3) -7，-10； (4) $-\frac{2}{3}$，$-\frac{13}{20}$.

4. 把下列实数按从大到小的顺序排列起来：

-2，1，3，0，-5，-6，$-\frac{1}{2}$，$\sqrt{7}$，13，$\sqrt{121}$.

B 组

1. 说明：任意一个正数都大于一个负数；0 小于任何正数，且大于任何负数.

2. 比较下列两式的大小：

(1) $(x+5)(x+7)$，$(x+6)^2$；

(2) $(x+4)^2$，$(x+2)(x+6)$；

(3) $(x+1)^2$，$2x+1$；

(4) $(x^2+1)^2$，x^4+x^2+1；

(5) x^2+x，$3x-2$；

(6) a^2+b^2+5，$2(2a-b)$.

2.1.2 不等式的基本性质

从实数大小的基本性质出发，可以证明下列不等式的重要性质.

性质 1（传递性） **如果** $a>b$，$b>c$，**则** $a>c$.

分析 要证 $a>c$，只要证 $a-c>0$.

证明 因为 $a-c=(a-b)+(b-c)$，

又由 $a>b$，$b>c$，即 $a-b>0$，$b-c>0$，

所以 $(a-b)+(b-c)>0$.

因此 $a-c>0$.

即 $a>c$.

如果 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

性质 1 通常叫做**不等式的传递性**.

性质 2（加法法则） **如果** $a>b$，**则** $a+c>b+c$.

证明 因为 $(a+c)-(b+c)=a-b$，

又由 $a>b$，即 $a-b>0$，

所以 $a+c>b+c$.

性质 2 表明，**不等式的两边同时加上（或同时减去）同一个实数，不等号的方向不变.**

性质 3（乘法法则） **如果** $a>b$，$c>0$，**则** $ac>bc$；**如果** $a>b$，$c<0$，**则**$ac<bc$.

证明　因为　$ac-bc=(a-b)c$，

又由　$a>b$，即 $a-b>0$，

所以　当 $c>0$ 时，$(a-b)c>0$，即 $ac>bc$；

当 $c<0$ 时，$(a-b)c<0$，即 $ac<bc$.

性质 3 表明，**如果不等式两边都乘同一个正数，则不等号的方向不变，如果都乘同一个负数，则不等号的方向改变.**

上述证明性质 2 和性质 3 的方法，通常叫做**作差比较法**.

推论 1　如果 $a+b>c$，则 $a>c-b$.

证明　因为　$a+b>c$，

所以　$a+b+(-b)>c+(-b)$.　　（加法法则）

即　　$a>c-b$.

这就告诉我们，**不等式中任何一项，变号后可以从一边移到另一边.**

思考与讨论

把不等式性质 1、2、3 中的大于号，改为小于号，性质是否成立？并说明你的结论.

知识延伸

推论 2　如果 $a>b$，且 $c>d$，则 $a+c>b+d$.

证明　因为　$a>b$，

所以　$a+c>b+c$.　　（加法法则）

因为　$c>d$，

所以　$b+c>b+d$.

因此　$a+c>b+d$.　　（传递性）

这又告诉我们，**两个或几个同向不等式，两边分别相加，所得的不等式与原不等式同方向.**

推论 3　如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，则 $ac>bd$.

证明　因为　$a>b$，且 $c>0$，

所以　$ac>bc$.　　（乘法法则）

因为　$c>d$，且 $b>0$，

所以　$bc>bd$.

因此　$ac>bd$.　　（传递性）

这就告诉我们，**两个或几个两边都是正数的同向不等式，把它们的两边分别相乘，所得的不等式与原不等式同向.**

练习

A组

1. 用“$>$”或“$<$”号填空：

(1) $x+5$ ____ $x+2$；

(2) $a+5$ ____ $b+5$ ($a<b$)；

(3) $7a$ ____ $4a$ ($a>0$)；

(4) $3a$ ____ $3b$ ($a<b$)；

(5) $-5a$ ____ $-5b$ ($a<b$).

2. 用“$>$”“$<$”或“$\neq$”号填空：

(1) 如果 $a>b$，$c<d$，则 $a-c$ ____ $b-d$；

(2) 如果 $a>b>0$，$c<d<0$，则 ac ____ bd；

(3) 当 c ____ 0 时，由 $a>b$，可得 $ac>bc$；

(4) 当 c ____ 0 时，由 $a>b$，可得 $ac^2>bc^2$；

(5) 当 c ____ 0 时，由 $a>b$，可得 $ac<bc$；

(6) 如果 $a>0$，$b<0$，则 ab ____ 0.

B组

1. 如果 $a>b$，$c>d$，能否断定 $a-c$ 与 $b-d$ 的大小？如果不能，试举反例说明.

2. 如果 $a>b$，$c>d$，能否一定得到 $ac>bd$？如果不能，试举反例说明.

3. 用“$>$”或“$<$”号填空：

(1) $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$ ($a>b>0$)；　　(2) $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$ ($a<b<0$).

习　题

1. 比较下列各组中两个实数的大小：

(1) $\frac{8}{9}$，$\frac{7}{8}$；　　(2) $-\frac{3}{7}$，$-\frac{39}{101}$；

(3) 0，a^2；　　(4) 3.14，π.

2. 用“$>$”，或“$=$”，或“$<$”号把下列各组数或式连接起来：

(1) $8+9$ ____ $9+7$；

(2) $6\times(-5)$ ____ $5\times(-5)$；

(3) $(-1)^2$ ____ 1；

(4) 1.1^2 ____ 1.1；

(5) 0.3^2 ____ 0.3；

(6) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ____ $-\frac{1}{2}$；

(7) $\sqrt{3}$ ____ 3；

(8) $\left|-\frac{1}{2}\right|$ ____ $\frac{1}{2}$.

3. 比较下列各组中两个代数式的大小：

(1) $(x-3)^2$，$(x-2)(x-4)$；

(2) a^2+3b^2，$2b(a+b)$ $(a\neq b)$；

(3) $(x^2+1)^2$，x^4+x^2-2x $(x\neq -1)$.

4. 设 $a>0$，$b>0$，比较下列两式的大小：

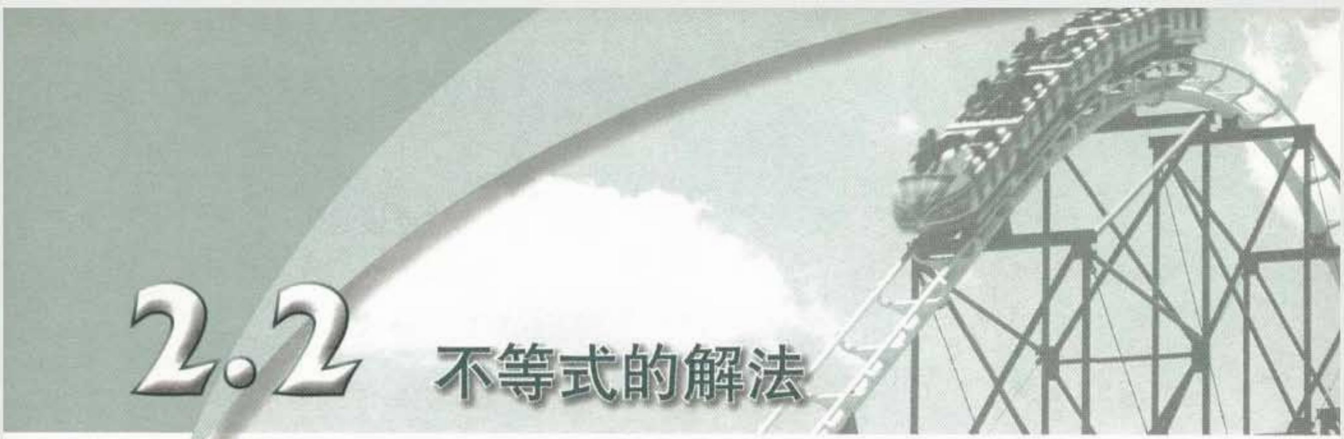
(1) $\frac{b}{a}$，$\frac{b}{a+1}$；

(2) $\frac{b}{a}$，$\frac{b+1}{a}$.

5. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) 如果 $a>b$，则 $ac>bc$；

(2) 如果 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$.



2.2 不等式的解法

2.2.1 区间的概念

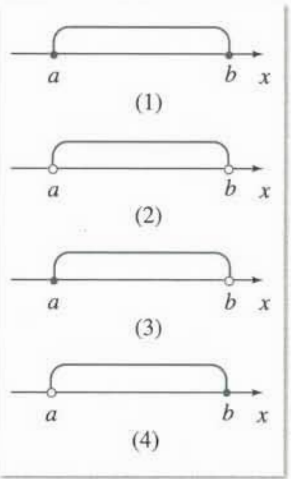


图 2-3

我们经常用区间表示不等式的解集. 下面介绍区间的概念.

设 a，b 是实数，且 $a<b$.

(1) 满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体，叫做**闭区间**，记作 $[a, b]$（图 2-3(1)）；

(2) 满足 $a<x<b$ 的实数 x 的全体，叫做**开区间**，记作 (a, b)（图 2-3(2)）；

(3) 满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的全体，都叫做**半开半闭区间**，分别记作 $[a, b)$ 或 $(a, b]$（图 2-3(3)(4)）.

a 和 b 叫做区间的**端点**. 在数轴上表示一个区间时，区间包括端点，则端点用实心点表示；区间不包括端点，则端点用空心点表示.

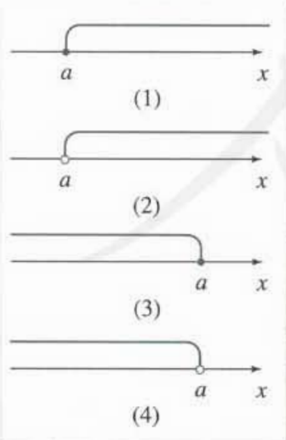


图 2-4

全体实数也可用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$，符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”.

满足 $x\geqslant a$ 的全体实数，可记作 $[a, +\infty)$（图 2-4(1)）；

满足 $x>a$ 的全体实数，可记作 $(a, +\infty)$（图 2-4(2)）；

满足 $x\leqslant a$ 的全体实数，可记作 $(-\infty, a]$（图 2-4(3)）；

满足 $x<a$ 的全体实数，可记作 $(-\infty, a)$（图

2-4(4)).

例1 用区间表示下列不等式的解集：

(1) $9\leqslant x\leqslant 10$；　　(2) $x\leqslant 0.4$.

解 (1) $[9, 10]$；　　(2) $(-\infty, 0.4]$.

例2 用集合的性质描述法表示下列区间：

(1) $[-4, 0]$；　　(2) $(-8, 7]$.

解 (1) $\{x \mid -4\leqslant x\leqslant 0\}$；

(2) $\{x \mid -8< x\leqslant 7\}$.

例3 在数轴上表示集合 $\{x \mid x<-2$ 或 $x\geqslant 1\}$.

解 如图 2-5 所示.

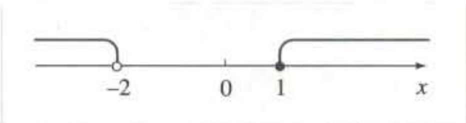


图 2-5

练习

A 组

1. 用集合的性质描述法，写出下列不等式的解集：

(1) $-2<x<3$；　　(2) $2\leqslant x\leqslant 4$；

(3) $2\leqslant x<5$；　　(4) $0<x\leqslant 1$；

(5) $x\geqslant 4$；　　(6) $x<8$.

2. 用区间表示下列不等式的解集，并在数轴上表示这些区间：

(1) $-2\leqslant x\leqslant 3$；　　(2) $-3<x<4$；

(3) $-2\leqslant x<3$；　　(4) $-3<x\leqslant 4$；

(5) $x>3$；　　(6) $x\leqslant 4$.

3. 用区间表示下列集合：

(1) $\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$；　　(2) $\{x \mid -3\leqslant x<2\}$；

(3) $\{x \mid x\geqslant 0\}$；　　(4) $\{x \mid x<0\}$.

B组

1. 已知集合 $A=[-2, 5]$，$B=(-5, 0]$. 求：

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$，

并分别在数轴上表示集合 A，B，$A\cup B$，$A\cap B$.

2. 已知数轴上的三个区间：$(-\infty, -3)$，$(-3, 4)$，$(4, +\infty)$. 当 x 在每一个区间上取值时，试确定代数式 $x+3$ 的值的符号.

3. 已知 x 在区间 $(-\infty, 2)$ 内，试用区间表示下列各代数式值的范围：

(1) $x+2$ 的取值范围是______；

(2) $x-2$ 的取值范围是______；

(3) $2-x$ 的取值范围是______；

(4) $\frac{1}{2}x+3$ 的取值范围是______.

2.2.2 一元一次不等式（组）的解法

问题 1 在本章的章前语关于全球通和神州行的服务资费问题中，如果只考虑本地通话的费用，则通话时间为多少时，神州行方式的费用小于全球通方式的费用？

解 设本地通话时间为 x min，由题意得

$$0.6x<50+0.4x.$$

解这个不等式的步骤依次为：

$$0.6x-0.4x<50, \quad \text{（移项）}$$

$$0.2x<50, \quad \text{（合并同类项）}$$

$$x<250. \quad \text{（两边同除以 0.2，不等号的方向不变）}$$

所以，在本地通话时间小于 250 min 时，神州行方式的费用小于全球通的费用.

在问题 1 列出的不等式中，未知数的个数是 1，且它的次数为 1，这样的不等式叫做**一元一次不等式**.

使不等式成立的未知数的值的全体，通常称为这个

不等式的解集.

很多实际问题，通过设未知数列关系式，得到的是一元一次不等式. 上面解一元一次不等式的步骤对于任意一个一元一次不等式都有效. 下面再举例说明解一元一次不等式的步骤.

例1 解不等式 $2(x+1)+\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1$.

解 由原不等式可得

$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6, \quad \text{(原式两边乘 6)}$$

$$12x+12+2x-4>21x-6, \quad \text{(分配律)}$$

$$12x+2x-21x>-12+4-6, \quad \text{(移项)}$$

$$-7x>-14, \quad \text{(合并同类项)}$$

$$x<2. \quad \text{(不等式性质)}$$

所以，原不等式的解集是 $\{x\mid x<2\}$，即 $(-\infty,\ 2)$.

我们把解一元一次不等式的步骤归纳如下：

S1　去分母；

S2　去括号；

S3　移项；

S4　合并同类项，化成不等式 $ax>b$ $(a\neq 0)$ 的形式；

S5　不等式两边都除以未知数的系数，得出不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{b}{a}\right\}$ $\left(\text{或}\left\{x\,\middle|\,x<\frac{b}{a}\right\}\right)$.

上述解不等式的步骤，可以根据具体情况灵活运用.

生活中还有一些问题涉及多个不等式. 一般地，由几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做**一元一次不等式组**. 下面我们来解决这样的问题.

问题 2　某塑料制品加工厂为了制定某产品第四季度的生产计划，收集到该产品的生产信息如下：

(1) 此产品第四季度已有订货数为 4 000 袋；

(2) 每袋需原料 0.1 t，可供应原料 410 t；

(3) 第四季度生产此产品的工人至多有 5 人，每人的工时至多为504工时，每人每工时生产该产品 2 袋.

请你依据以上数据，决定第四季度该产品可能的产量.

分析 根据信息：为了满足供货要求，第四季度该产品的产量不能少于 4 000 袋；由于供应的原料限制，第四季度生产该产品的袋数不能多于 $410\div 0.1=4\ 100$（袋）；第四季度该产品的产量不能超过工人的生产能力，即 $5\times 504\times 2=5\ 040$（袋）.

解 设该产品第四季度的产量为 x 袋，由题意可列不等式组：

$$\begin{cases} x\geqslant 4\ 000 \\ x\leqslant 4\ 100 \\ x\leqslant 5\ 040 \end{cases}$$

x 的取值范围应为同时满足这三个不等式的整数，容易看出 x 的取值范围是满足

$$4\ 000\leqslant x\leqslant 4\ 100$$

的整数.

所以，第四季度该产品的产量应不少于 4 000 袋且不多于 4 100 袋.

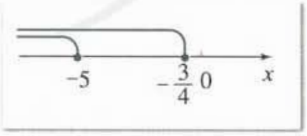
从上面的问题可以看到，解由几个不等式组成的不等式组，就是求这几个不等式的解集的公共部分.

例2 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} -3x+2x\geqslant 5 \\ x+\dfrac{1}{3}x\leqslant -1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-7x\leqslant -4x-2 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}x+2>0 \end{cases}$

解 (1) 由原不等式组可得

$$\begin{cases} -x\geqslant 5 \\ \dfrac{4}{3}x\leqslant -1 \end{cases}$$



即

$$\begin{cases} x\leqslant -5 \\ x\leqslant -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

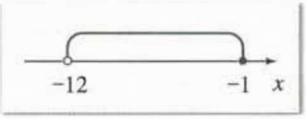
所以 $x \leqslant -5$.

即原不等式组的解集为 $\{x \mid x \leqslant -5\}$.

(2) 由原不等式组可得

$$\begin{cases} 2x \leqslant -2 \\ \dfrac{1}{6}x > -2 \end{cases}$$

即



$$\begin{cases} x \leqslant -1 \\ x > -12 \end{cases}$$

所以 $-12 < x \leqslant -1$.

即原不等式组的解集为 $\{x \mid -12 < x \leqslant -1\}$，即 $(-12, -1]$.

由上面的两个例子，我们把解一元一次不等式组的步骤归纳如下：

> S1 求这个不等式组中各个不等式的解集；
>
> S2 求出这些不等式的解集的公共部分，即求出了这个不等式组的解集.

练习

A 组

1. 解下列不等式：

(1) $3x+2x \geqslant 5$；　　(2) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}x \leqslant 10$；

(3) $x+3x \leqslant 6x+1$；　　(4) $2x-6x+1 < 4\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{4}x\right)$.

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x \geqslant 1 \\ 3x \geqslant 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -2\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{4}x\right)+1 \leqslant x \\ -3x+\dfrac{1}{2} > x+\dfrac{3}{2}x-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases}5x\leqslant -1\\ \dfrac{x}{3}-x\geqslant 0\end{cases}$　　　(4) $\begin{cases}\dfrac{1}{5}x-2x\leqslant x+3\\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}x<\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}\end{cases}$

B 组

1. 光华职业学校在学生技能操作竞赛中，评出一等奖 5 人，二等奖 12 人，三等奖 30 人，学校决定给每个获奖学生发奖金. 如果每个获奖者的奖金金额一等奖是二等奖的 2 倍，二等奖是三等奖的 2 倍，且总金额不超过 1 500 元，各类获奖学生最高能领到多少奖金（精确到 1 元）.

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}x+2>0\\ x-4>0\\ x-6<0\end{cases}$　　　(2) $\begin{cases}3+x<4+2x\\ 5x-3<4x-1\\ 7+2x>6+3x\end{cases}$

2.2.3 一元二次不等式的解法

问题 一家旅社有客房 300 间，每间房租为 30 元时，天天都客满，如果每间房租每增加 2 元，每天客房出租数会减少 10 间. 不考虑其他因素时，旅社将房间租金定为多少时，可以保证每天客房的总租金不少于 10 000元.

分析 每间房租增加 x 个 2 元时，每天客房租出会减少 $10x$ 间. 由

每天客房的租金收入＝每间房租×每天客房出租数，

即可计算出每天客房的租金收入，从而列出不等式.

解 设每间房租增加 x 个 2 元，则每间房租为 $30+2x$元，这时将有 $300-10x$ 间客房租出，由客房租金收入不少于 10 000 元可得

$$(30+2x)(300-10x)\geqslant 10\ 000,$$
$$-20x^2+600x-300x+9\ 000\geqslant 10\ 000,$$

$$x^2-15x+50\leqslant 0,$$
$$(x-5)(x-10)\leqslant 0.$$

我们知道，两数乘积小于 0 时，相乘的两数异号，所以解上述不等式，相当于解下面两个不等式组：

$$(\text{I})\begin{cases}x-5\geqslant 0\\x-10\leqslant 0\end{cases}$$

或

$$(\text{II})\begin{cases}x-5\leqslant 0\\x-10\geqslant 0\end{cases}$$

解不等式组(I)，得

$$5\leqslant x\leqslant 10.$$

解不等式组(II). 可以看出同时满足(II)中的不等式的未知数不存在. 考虑到 $300-10x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 30$. 综上，问题中的未知数 x 的取值范围是

$$5\leqslant x\leqslant 10.$$

所以当每间客房租金数取大于等于 40 且小于等于 50 的偶数时，每天租金的收入不少于 10 000 元.

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做**一元二次不等式**. 满足一元二次不等式的未知数的取值范围，通常叫做这个不等式的解集.

下面我们再通过几个例子，进一步学习一元二次不等式的解法.

例1 解下列不等式：

(1) $x^2-x-12>0$；　　(2) $x^2-x-12<0$.

分析　方程 $x^2-x-12=0$ 的判别式

$$\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-12)=49>0,$$

于是可求出它的两个根为 -3，4.

把二次三项式 x^2-x-12 进行因式分解，得

$$x^2-x-12=(x+3)(x-4).$$

我们把 $(x+3)$ 和 $(x-4)$ 看成两个数，根据两个实数相乘的运算法则，两数的积大于 0 时，它们同号（同为正或同为负）；两数的积小于 0 时，它们异号. 因此，解原不等式(1)就可转化为解下列两个不等式组：

$$\begin{cases}x+3>0\\x-4>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+3<0\\x-4<0\end{cases}$$

解原不等式(2)就可转化为解下列两个不等式组：

$$\begin{cases}x+3>0\\x-4<0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+3<0\\x-4>0\end{cases}$$

解 (1) 将所给不等式转化为解不等式组：

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x+3>0\\x-4>0\end{cases} \text{或} (\mathrm{II})\begin{cases}x+3<0\\x-4<0\end{cases}$$

(Ⅰ)的解集是 $\{x \mid x>4\}$，(Ⅱ)的解集是 $\{x \mid x<-3\}$.

所以原不等式的解集为 $\{x \mid x>4$ 或 $x<-3\}$，即

$$(-\infty, -3)\cup(4, +\infty).$$

(2) 将所给不等式转化为解下面两个不等式组：

$$(\mathrm{III})\begin{cases}x+3>0\\x-4<0\end{cases} \text{或} (\mathrm{IV})\begin{cases}x+3<0\\x-4>0\end{cases}$$

(Ⅲ)的解集是 $\{x \mid -3<x<4\}$，(Ⅳ)的解集是$\varnothing$.

所以原不等式的解集为$\{x|-3<x<4\}$，即

$$(-3, 4).$$

从上例，我们可看到，某些一元二次不等式可转化为一次不等式组求解. 另外，对于一些特殊的一元二次不等式，要根据具体情况灵活解题.

例2 解下列不等式：

(1) $x^2-4x+4>0$；　　(2) $x^2-4x+4<0$.

分析 方程 $x^2-4x+4=0$ 的判别式

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times4=0,$$

即方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个相等的根 $x=2$. 用配方法，(1)和(2)中的不等式可分别转化为

$$(x-2)^2>0, (x-2)^2<0.$$

解 (1) 因为任何一个实数的平方大于等于 0，所以当$x\neq2$时，都有

$$(x-2)^2>0,$$

所以原不等式的解集是$\{x\in\mathbf{R} \mid x\neq2\}$，即$(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$；

(2) 由(1)可知，没有一个实数 x 使得不等式

$$(x-2)^2<0$$
成立，所以原不等式的解集是$\varnothing$.

例3 解下列不等式：

(1) $x^2-2x+3>0$； (2) $x^2-2x+3<0$.

分析 方程 $x^2-2x+3=0$ 的判别式
$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0,$$
方程 $x^2-2x+3=0$ 无解. 用配方法原不等式分别可转化为
$$(x-1)^2+2>0,\ (x-1)^2+2<0.$$

解 (1) 对于任意一个实数 x，都有
$$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0,$$
即不等式对任何实数都成立，所以原不等式的解集是 $\mathbf{R}$；

(2) 对于任意一个实数 x，不等式
$$(x-1)^2+2<0$$
都不成立，所以原不等式的解集是$\varnothing$.

一元二次不等式的一般形式是
$$ax^2+bx+c>0$$
或
$$ax^2+bx+c<0\ (a\neq0).$$

由上面的例子，我们把解一元二次不等式
$$ax^2+bx+c>0 \quad 或 \quad ax^2+bx+c<0\ (a>0)$$
的步骤归纳如下：

S1 求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值.

S2 (1) $\Delta>0$，则二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 有两个不等的根 x_1，x_2(设 $x_1<x_2$)，则
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$
不等式 $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ 的解集是
$$(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty);$$
不等式 $a(x-x_1)(x-x_2)<0$ 的解集是
$$(x_1,\ x_2).$$

(2) $\Delta=0$，通过配方得
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

由此可知，$ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$；$ax^2+bx+c<0$ 的解集是$\varnothing$.

(3) $\Delta<0$，通过配方得

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\left(\frac{4ac-b^2}{4a}>0\right).$$

由此可知，$ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$；$ax^2+bx+c<0$ 的解集是$\varnothing$.

对于 $a<0$ 的情况，通过在已知不等式两端乘上 -1，可化为 $a>0$ 的情况求解.

练习

A 组

1. 解下列不等式：

(1) $(x+1)(x-2)<0$；　　(2) $(x+2)(x-3)>0$；

(3) $x^2-2x-3>0$；　　(4) $x^2-2x-3<0$.

2. 解下列不等式：

(1) $4x^2+4x-3<0$；　　(2) $3x\geqslant 5-2x^2$；

(3) $9x^2-\sqrt{3}x-4\leqslant 0$；　　(4) $x^2-4x+5>0$.

3. 解下列不等式：

(1) $x^2+2x<15$；　　(2) $6x^2\geqslant x+2$；

(3) $-12x^2>3-13x$；　　(4) $-4x^2+\sqrt{2}x+3<0$.

B 组

1. 为民商店如果以每件 25 元的单价出售某商品，每月可售出 800 件，若该商品的单价每提高 1 元，则销售量就减少 20 件. 如果要使该商品的销售金额不少于 20 000 元，求该商品的最高单价.

2. m 是什么实数时，一元二次方程 $mx^2-(1-m)x+m=0$ 没有实数根.

2.2.4 含有绝对值的不等式

我们知道，在实数集中，对任意实数 a，

$$|a|=\begin{cases}a\ (\text{当 } a>0 \text{ 时})\\0\ (\text{当 } a=0 \text{ 时})\\-a\ (\text{当 } a<0 \text{ 时})\end{cases}$$

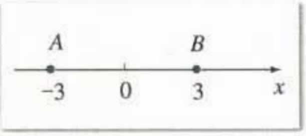


图 2-6

实数 a 的绝对值 $|a|$，在数轴上等于对应实数 a 的点到原点的距离. 如图 2-6 所示，$|-3|$ 和 $|3|$ 在数轴上分别等于点 A、点 B 到原点的距离.

由 $|a|$ 的这一几何意义可知，不等式

$$|x|\leqslant 3$$

的解集是，与原点的距离小于 3 或等于 3 的所有点所对应的实数全体构成的集合，即

$$\{x\,|\,|x|\leqslant 3\}=\{x\,|\,x\geqslant -3, \text{且 } x\leqslant 3\}, \text{或}[-3,3].$$

不等式

$$|x|>3$$

的解集是，与原点距离大于 3 的所有点所对应的实数全体构成的集合，如图 2-7 所示：

图 2-7

即 $\{x\,|\,x<-3 \text{ 或 } x>3\}$，

即 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

一般地，如果 $a>0$，则

$$|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a;$$

$$|x|>a \Leftrightarrow x<-a \text{ 或 } x>a.$$

这个结果如图 2-8 所示.

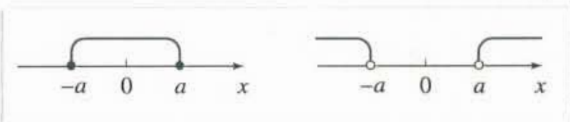


图 2-8

例1 解不等式$|2x-3|<5$.

解　这个不等式等价于

$$-5<2x-3<5,$$

$$-5+3<2x-3+3<5+3,$$

$$-2<2x<8,$$

$$-2\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<8\times\frac{1}{2},$$

$$-1<x<4.$$

因此，原不等式的解集是$(-1, 4)$.

例2 解不等式$|2x-3|\geqslant 5$.

解　原不等式等价于

$$2x-3\geqslant 5, \quad ①$$

或

$$2x-3\leqslant -5. \quad ②$$

①的解集是$[4, +\infty)$，②的解集是$(-\infty, -1]$.

所以原不等式的解集是$(-\infty, -1]\cup[4, +\infty)$.

练习

A组

1. 下列各式是否对任意实数都成立？如果不成立，举反例说明：

(1) $|-a|=a$;　　(2) $\sqrt{(-a)^2}=-|a|$;

(3) $|b-a|=|a-b|$;　　(4) $\sqrt{a^2}=|a|$.

2. 解下列不等式，并在数轴上表示它的解集：

(1) $|x|<5$;　　(2) $|x-2|\leqslant 5$;

(3) $|2x+3|\geqslant 1$;　　(4) $|2x-3|<1$.

B组

1. 解下列不等式：

(1) $|x-1|\leqslant 0.01$;　　(2) $|x+1|\leqslant 0.5$;

(3) $|5x-2|\geqslant 1$;　　(4) $|3x+8|\geqslant 2$.

2. 解不等式：$x+|x-1|<2$.

习题

1. 解下列不等式：

(1) $3-2x>1$；

(2) $\frac{2x}{3}-1<1$；

(3) $\frac{x+3}{2}>0$；

(4) $\frac{3(1-2x)}{5}<0$.

2. 解下列不等式：

(1) $12x^2-31x+20>0$；

(2) $2x^2-4x+7<0$；

(3) $x^2(x-2)>0$；

(4) $x^2(x^2-6x+8)<0$.

3. 解下列不等式：

(1) $|x|-3<1$；

(2) $2|x|+1>5$；

(3) $|1-2x|<3$；

(4) $|3-2x|>5$.

4. 解下列不等式：

(1) $(2x-1)^2-7<(x+1)^2+6+3x+3x^2$；

(2) $\frac{5x+7}{5}-\frac{x+7}{5}>\frac{3x+2}{3}-\frac{2x}{7}$.

5. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x+3(4-x)>4 \\ x-3>\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x^2+1)(x-3)<0 \\ 3x+4<5x-6 \end{cases}$

（提示：$(x^2+1)(x-3)<0$ 与 $x-3<0$ 同解.）

6. 解下列不等式：

(1) $x(x+3)>0$；

(2) $2x^2-x-3\geqslant 0$.

7. 求下列不等式在正整数集中的解集：

(1) $|2x-5|<15$；

(2) $\left|\frac{1}{2}x+1\right|<3$.

8. 已知 $|x-a|<b$ 的解集是 $\{x|-3<x<9\}$，求 a，b.

2.3 不等式的应用

在许多问题中，需要设未知数，列不等式求解．下面举例说明．

例1 某工厂生产的产品每件单价是 80 元，直接生产成本是 60 元．该工厂每月其他开支是 50 000 元．如果该工厂计划每月至少获得 200 000 元的利润，假定生产的全部产品都能卖出，问每月的产量至少是多少？

解 设每月生产 x 件产品，则

总收入为 $80x$；

直接生产成本为 $60x$；

每月利润为 $80x-60x-50\,000=20x-50\,000$．

依题意，x 应满足不等式

$$20x-50\,000\geqslant 200\,000.$$

解得

$$x\geqslant 12\,500.$$

所以，该工厂每月至少要生产 12 500 件产品．

例2 某公司计划下一年度生产一种新型计算机．下面是各部门提供的数据信息：

人事部：明年生产工人不多于 80 人，每人每年按 2 400工时计算；

市场部：预测明年销售量至少 10 000 台；

技术部：生产一台计算机，平均要用 12 个工时，每台机器需要安装某种主要部件5 个；

供应部：今年年终将库存这种主要部件 2 000 件，明年能采购到的这种主要部件为80 000 件．

根据上述信息，明年公司的生产量可能是多少？

解　设明年生产量为 x 台，则依题意得到

$$\begin{cases}12x\leqslant 80\times 2\ 400\\5x\leqslant 2\ 000+80\ 000\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\leqslant 16\ 000\\x\leqslant 16\ 400\end{cases}$$

这个不等式组的解是 $x\leqslant 16\ 000$. 考虑到明年的销售量至少是 10 000 台，我们可得到明年这个公司的产量可在 10 000～16 000 台之间.

知识延伸

均值定理　若 a，b 是正数，则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. 上式的几何说明是

$$S_{\triangle ABF}+S_{\triangle ADE}\geqslant S_{矩形ABCD}\ (图\ 2\text{-}9).$$

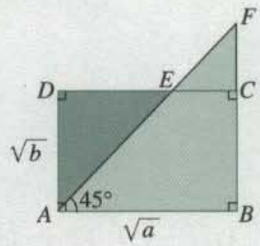


图 2-9

例3　已知一条长 100 m 的绳子，用它围成一个矩形，问长、宽各等于多少时，围出来的矩形面积最大？

解　设矩形的长为 x m，宽为 y m，面积为 S m^2（图 2-10）. 根据题设条件，有

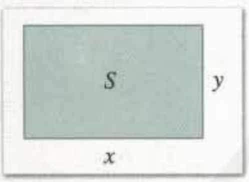


图 2-10

$$x+y=50,\ 且\ x>0,\ y>0,$$

$$xy=S.$$

于是问题转化为当 $x+y=50$ 时，求 xy 的最大值. 根据均值定理，得

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=25.$$

所以，$xy\leqslant 625$，当且仅当 $x=y=25$ 时，等号成立.

因此，当 $x=y=25$ 时，S 取最大值 625.

所以，用 100 m 的绳子围成长和宽都是 25 m 的矩

形（即正方形）时，所围成的面积最大.

知识延伸

等周问题

如果在上例中取消围成矩形的限制，问用100 m的绳子，围成怎样的形状，围出的面积最大，那么答案就不是正方形了．正确的答案是圆形（圆面积约为 795.8 m^2），证明这个结论，需要高等数学知识，这里从略．这类问题，叫做**等周问题**．对等周问题的研究，产生了许多新的数学理论和方法．

习　题

1. 用长为 20 m 的绳子围成一矩形，问长、宽各等于多少时，围成的矩形面积最大.

2. 在面积为 625 m^2 的所有矩形中，最短周长是多少？

3. 求证：在直径为 d 的圆的内接矩形中，面积最大的是正方形，它的面积等于$\frac{1}{2}d^2$.

4. 某工厂生产一类产品，每月固定成本是 12 万元，每件产品变动成本是 20 元，而单价是 50 元．如每月要求获得的最低利润是 2 万元，问每月最少需要销售多少件产品？

5. 某种商品的销售量 x 与它的销售单价 p（元）之间的关系是 $p=275-3x$，与总成本 q 之间的关系式是 $q=500+5x$．问每月要获得的最低利润是 5 500 元，至少要销售多少件商品？

6. 某出版社出版一种书，固定成本是 50 000 元，每本的变动成本是 0.50 元，售价为 3.50 元，出版社要盈利，最低发行量是多少？

7. 某出版社，如果以每本 2.50 元的价格发行一种图书，可发行 80 000 本．如果一本书的定价每升高 0.1 元，发行量就减少 2 000 本，如果要使收入不低于 200 000 元，求这种图书的最高定价.

8. 某种牌号的汽车在一种路面上的刹车距离 s(m)与汽车车速 x(km/h)的数值之间有如下关系：

$$s=0.05x+\frac{x^2}{180}.$$

在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离大于 12 m，问这辆汽车刹车前的车速至少是多少千米每小时？(精确到千米)

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 在数轴上如何比较两个实数的大小？
2. 实数大小的基本性质是什么？
3. 不等式有哪些基本性质？
4. 解一元一次不等式（组）的步骤是什么？
5. 解一元二次不等式的步骤是什么？
6. 举例说明，如何应用不等式的基本性质解不等式？
7. $|x|<a$，$|x|>a(a>0)$，在数轴上的几何意义是什么？
8. 举例说明不等式的应用.

阅读材料

聪明在于学习，天才由于积累

华罗庚是国际著名的数学家，又是一位伟大的爱国主义者. 1950 年，他响应祖国的召唤，毅然从美国回到北京，投身于社会主义建设事业并作出了重大贡献. 1979 年他光荣加入了中国共产党. 1985 年 6 月 12 日在访日做学术报告的讲台上，不幸逝世. 党和国家对他的一生作了高度的评价.

华罗庚1910年11月12日出生于江苏省金坛一个贫苦家庭. 1924年，他初中毕业，因家境贫寒而离开了学校. 为学点本事养家糊口，考取了上海中华职业学校学习会计. 后因交不起学费，只上了一年就离开了学校，在其父亲经营的小杂货铺里帮工当学徒. 渴望学习的他，只能利用业余时间刻苦自学数学. 1929年，他在金坛中学任庶务主任，并开始在上海《科学》杂志发表论文. 1930年他写的论文《苏家驹之代数五次方程式解法不能成立的理由》一文，受到清华大学数学系主任熊庆来先生的赞赏，并邀他到清华大学边工作边进修. 到清华大学后，他更加勤奋，四年中打下了坚实的数学基础，自学了英文、法文和德文. 同期，他仅数论这一分支就写了十几篇高水平的论文，成为一名优秀的青年数学家，同时从管理员升为助教，再晋升为讲师. 1936～1938年他作为访问学者，到英国剑桥大学工作并深造，1938年回国. 因成绩卓著，于1938～1946年受聘为昆明西南联合大学教授. 在当时，生活条件极为艰苦，他白天教学，晚上在菜油灯下孜孜不倦地从事研究工作，著名的《堆垒素数论》就是在这样的条件下写成的. 1945年，他应苏联科学院邀请赴苏旅行和讲学，受到热烈欢迎. 1946年，他应美国普林斯顿高等研究院邀请任研究员，并在普林斯顿大学执教，后被伊利诺伊大学聘任为终身教授. 1950年回国后，他担任我国科学界诸多重要职务.

华罗庚从不迷信天才，他说："聪明在于学习，天才由于积累." 他就靠刻苦自学、靠勤奋的钻研，给人类留下了近300篇学术论文和多种学术专著，还写了10多种科普读物. 他在晚年已有很高的声望和地位，但仍手不释卷，顽强地读和写，他说："树老易空，人老易松，科学之道，戒之以空，戒之以松，我愿一辈子从实而终." "发白才知智叟呆，埋头苦干向未来；勤能补拙是良训，一分辛苦一分才." 这是华罗庚留给我们的多么宝贵的精神财富啊！

第三章 函 数

3.1 函数

3.2 一次函数和二次函数

3.3 函数的应用

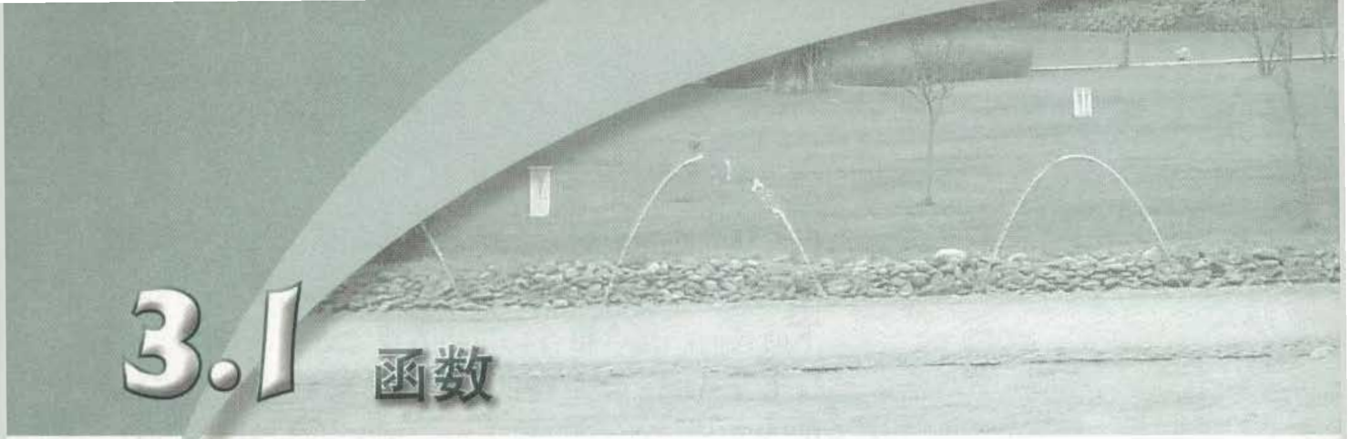
王华的网上店铺正在销售一种简易计算器，如果单台利润为0，每月可售出50台；单台利润每增加1元，每月将少售出计算器5台. 下面是王华列出的售出台数与单台利润之间的关系.

单台利润/元	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
售出数/台	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

在上面的数据表中，我们可以看出，对于每一个单台利润，都有唯一一个售出台数与之相对应. 这张表反映了售出台数与单台利润的某种关系，这种关系就是我们要学习的一种函数关系.

这一章我们将以一次函数和二次函数为例，学习函数概念和研究函数的方法. 我们将在初中学过的函数知识基础上，用集合的观点重新审视函数概念，给函数下一个较为确切的定义，并研究函数的一些性质. 在研究函数时，我们还特别强调函数图象的作用，以培养同学们利用数形结合研究函数的能力.

我们还要学习如何应用函数知识来解决一些实际问题. 例如，在上面的销售问题中，如何确定单台利润，才能使王华每月销售这种计算器能获得最大的收益?



3.1 函数

3.1.1 函数的概念

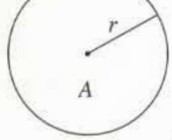
问题 一辆汽车在一段平坦的道路上以 100 km/h 的速度匀速行驶 2 h，如何用数学符号表示行驶的路程与行驶时间的关系？

汽车在行驶中，速度是一个常数，而时间和路程都在变化. 这种变化的量，在数学中叫做**变量**，而速度保持不变，这种保持不变的量叫做**常量**.

在数学中通常使用英文字母表示变量. 如果路程用 s (km)表示，时间用 t (h)表示，则问题中的路程、速度、时间三个量之间的关系可表述为

$$s=100t \quad (0\leqslant t\leqslant 2), \qquad ①$$

在①式中给出时间 t，就可算出行驶的路程 s.



$A=\pi r^2$

如果一个圆的半径用 r 表示，它的面积用 A 表示，则

$$A=\pi r^2 \quad (r>0). \qquad ②$$

在②式中，只要给定一个半径 r，就可以算出圆的面积 A.

在①式中，我们可以认为距离 s 随着时间 t 的变化而变化，在②式中，也可以认为面积 A 随着半径 r 的变化而变化. 这时就说，变量 t 和 r 是**自变量**，而距离 s 和面积 A 是**因变量**.

从以上两例，可以看到两个重要的事实：

(1) 在每个例子中都指出了自变量的取值集合；

(2) 都给出了对应法则. 对自变量的一个值，都有

唯一的一个因变量值与之对应.

由上述分析可以看到，函数关系实质上是两个数集的元素之间按照某种法则确定的一种对应关系.

下面我们用集合语言，对函数概念进行描述.

设集合 A 是一个非空的实数集，对 A 内任意实数 x，按照某个确定的法则 f，有唯一确定的实数值 y 与它对应，则称这种对应关系为集合 A 上的一个**函数**. 记作

$$y=f(x).$$

上式中 x 为自变量，y 为因变量. 自变量 x 的取值集合叫做函数的**定义域**，对应的因变量值 y 的集合叫做函数的**值域**.

结合课件 301 研究函数的定义域问题.

函数 $y=f(x)$，在 $x=a$ 对应的因变量值 y，记作

$$y=f(a).$$

$f(a)$ 叫做函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的**函数值**.

例如，函数

$$f(x)=\frac{1}{2x+1},\ x\neq-\frac{1}{2},$$

它在 $x=0$，1，-2，a 处的函数值，可以分别求得：

$$f(0)=\frac{1}{2\times0+1}=1,$$

$$f(1)=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3},$$

$$f(-2)=\frac{1}{2\times(-2)+1}=-\frac{1}{3},$$

$$f(a)=\frac{1}{2a+1}.$$

函数 $y=f(x)$ 也经常写作函数 $f(x)$ 或函数 f.

由于函数的值域被函数的定义域和对应法则完全确定，这样函数就只有两个要素：定义域和对应法则.

函数的两要素是：定义域和对应法则.

根据以上定义，我们要检验给定两个变量之间的关系是不是函数，只要检验：

(1) 定义域是否给出；

(2) 对应法则是否给出，并且根据这个对应法则，能否由自变量 x 的每一个值，确定唯一的函数值 y.

如果不特别指明一个函数的定义域，在本书中就约定这个函数的定义域是使函数有意义的实数所构成的集合. 例如，函数

$$y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$$

的定义域就是 $\{x \mid x \geqslant -3, x \neq 0\}$，即

$$[-3, 0) \cup (0, +\infty).$$

练习

A组

1. 写出下列函数的关系式，并指出式中的常量与变量，自变量与函数.

(1) 某种茶杯的单价为 3.5 元，求买茶杯个数和需要付款金额的关系式；

(2) 某种产品每吨售价 200 元，问这种产品销售总收入 y(元)与销售量 x(吨)的关系.

2. 求下列函数的值：

(1) 已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{|x-2|}$，求 $f(0)$，$f(3)$，$f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$；

(2) 已知 $f(x)=x^2-2x$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(3)$；

(3) 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，求 $f(a)$，$f(a+1)$，$f(x+1)$.

B组

1. 设函数 $f(x)=-x^2+2x+3$，在下表的第二行内填写相应的函数值：

x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…							…

2. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$；

(2) $f(x)=\sqrt{4x+8}$；

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-3}$.

3.1.2 函数的表示方法

问题

可以用哪些方法来表示函数呢?

函数的表示方法有很多，常用的有列表法、图象法、解析法等. 在上节的问题中，①式用等式

$$s=100t \quad (0\leqslant t\leqslant 2)$$

给出了函数的自变量 t 和因变量 s 的关系，这种表示函数的方法，我们把它叫做**解析法**（也叫**公式法**），并且这个等式叫做函数的**解析式**.

把函数的自变量和对应的因变量的值列成表格来表示函数，这种方法叫做**列表法**.

例如，我国 2004～2008 年年末国家外汇储备如表 3.1 所示.

表 3.1

年份	2004	2005	2006	2007	2008
外汇储备/亿美元	6 099	8 189	10 663	15 282	19 460

表 3.1 表示了年份与对应年份年末国家外汇储备值的函数关系. 给定 2004～2008 年中的任一个年份，就可从表中查出该年年末国家外汇储备值.

我们还可以用“图形”来表示函数的图象. 这种方法叫做**图象法**.

常用的表示函数的方法有解析法、列表法、图象法.

例如，北京市 2009 年 3 月 31 日气温随时间的变化如图 3-1 所示.

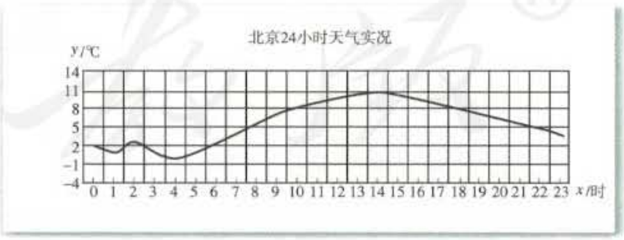


图 3-1

给定任一时刻，就可以从图中查到该时刻对应的天气温度.

问题 由 3.1.1 节问题中①式所给的函数的解析式

$$s = 100t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2)$$

作出函数的图象.

由于每一个有序数对（t，s），都可在平面直角坐标系中唯一确定一点，因此我们可在直角坐标系中，直观地表述行驶路程与行驶时间的关系.

通过列表、描点作出函数图象如下.

列表：

t/h	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
s/km	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200

画图：

结合课件 302 学习作函数的图象.

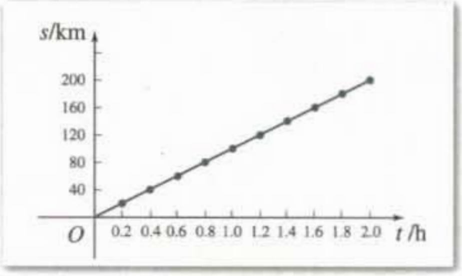


图 3-2

如果给更多的 t 值，就可以画出更多的点. 容易看出这些点都位于一条直线上.

探索与研究

如何由函数的解析式作函数 $y = f(x)$ 的图象？

我们已看到一个函数能够借助图象进行几何表示. 为了画出某个函数 $y = f(x)$ 的图象，首先要建立直角坐标系 xOy.

当 $x = a$ 时，对应的 y 值是 $f(a) = b$，由数 a 和 b 构成的有序数对(a, b)表示坐标平面上一个点的坐标.

用这种方法，我们就可对函数定义域内的所有 x 值，求出它的函数值 $f(x)$，再作出以数对$(x, f(x))$为坐标的点，这样得到所有点的集合就是这个函数的图象.

因此，一个函数的图象是由点构成的，点的横坐标是自变量的值 x，纵坐标是对应的函数值 y.

例1 作函数 $y=x^3$ 的图象.

分析 由所给的函数关系可知，这个函数的定义域是实数集，值域也是实数集. 当 $x>0$ 时，$y>0$，这时函数的图象在第一象限，y 的值随着 x 的值增大而增大；当 $x<0$ 时，$y<0$，这时函数的图象在第三象限，y 的值随着 x 的值减小而减小.

由此分析，我们以坐标原点(0，0)为中心，取 x 适当多的值，列出这个函数的对应值表，作图.

解 我们以坐标原点(0，0)为中心，取 x 适当多的值，列出这个函数的对应值表(精确到 0.01)：

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	-0.2	0.0	0.2	0.5	1	1.5	2	…
y	…	-8	-3.38	-1	-0.13	-0.01	0.0	0.01	0.13	1	3.38	8	…

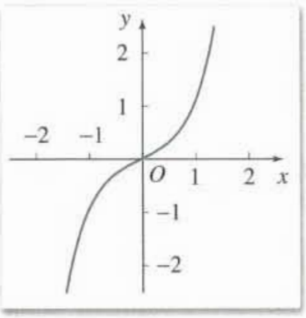


图 3-3

在直角坐标系中，描点、连成光滑曲线. 这个函数的图象如图 3-3 所示.

注 例 1 中的作图，我们只取了有限个点，实际该图象上有无穷多个点，我们取的点越多图象画得就越准确. 如何取点，取多少点，要根据具体函数进行分析.

例2 作函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的图象.

解 已知函数的定义域是 $x\neq 0$ 的实数集，即

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 0\}.$$

由函数的解析式可以推知，对任意的 x 值，对应的函数值 $y>0$，函数的图形在 x 轴的上方；并且函数的图象在 $x=0$ 处断开，函数的图象被分为两部分，当 x 的绝对值变小时，函数值增大得非常快，当 x 的绝对值变大时，函数的图象沿 x 轴的两个方向上靠近 x 轴.

由以上分析，以 $x=0$ 为中心，在 x 轴的两个方向上选取若干自变量的值，计算出对应的 y 值，列出 x，y 的对应值表：

x	…	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	…	0	…	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	…	不存在	…	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	…

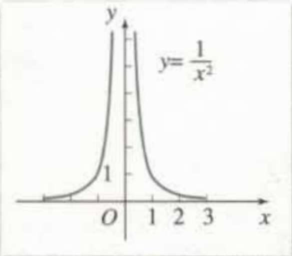


图 3-4

在直角坐标系中，描点、连成光滑曲线，就是这个函数的图象，如图 3-4 所示.

函数的图象有利于我们全面了解函数的性质. 特别是现在我们可使用计算机技术，根据公式和数据作出函数的图象，很容易发现函数的性质.

“数形结合”是我们今后研究函数的重要方法. 同学们要养成习惯，使用图象来理解各种各样函数表达式的意义.

练习

A 组

1. 作出函数 $f(x)=-3$ 的图象（这类函数通常叫做常值函数），并求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(10)$.

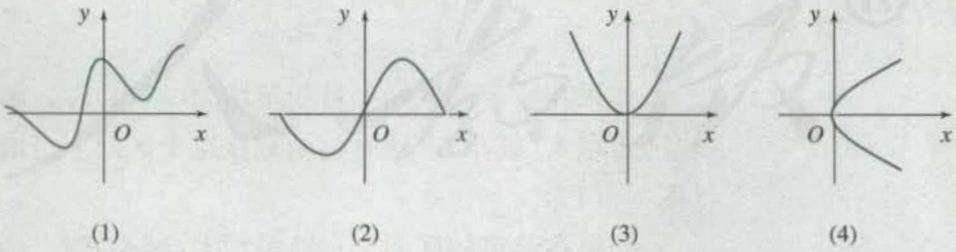
2. 在同一坐标系中画出下列函数的图象：

(1) $y=x$；　　(2) $y=x+5$；

(3) $y=2x$；　　(4) $y=2x-5$.

3. 某商店有游戏机 12 台，每台售价 200 元，试求售出台数与收款总数之间的函数关系（用解析法表示），并画出函数的图象.

4. 下列图象，哪些是以 x 为自变量的函数的图象？



（第 4 题）

B 组

1. 作函数 $y=|x|+1$ 的图象.

2. 作函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0) \\ 2, & x\in[0,1]\end{cases}$ 的图象.

3. 作下列函数的图象：

(1) $y=-x^3$；　(2) $y=(x-2)^3$；

(3) $y=\sqrt{x}$；　(4) $y=\sqrt{x+1}$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

4. 在同一坐标系中分别作下列各组中函数的图象：

(1) $y=2x^2$，$y=x^2$，$y=0.5x^2$，$y=-0.5x^2$；

(2) $y=x^2$，$y=(x+1)^2$，$y=(x-1)^2$.

3.1.3 函数的单调性

思考与讨论

图 3-5 中函数的曲线有怎样的上升、下降变化？

请观察图 3-5 中函数 $y=f(x)$ 的图象：

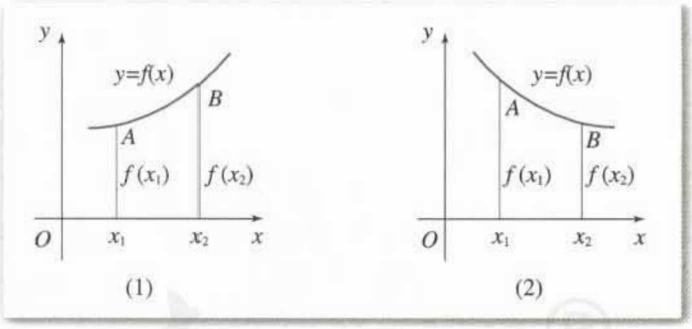


图 3-5

如果在给定的区间上自变量增大(减小)时，函数值也随着增大(减小)，这时称函数在这个区间上是**增函数**(图 3-5(1)).

如果在给定的区间上自变量增大(减小)时，函数值反而随着减小(增大)，这时称函数在这个区间上是**减函数**（图3-5(2)).

画出一个函数的图象，我们很容易判断这个函数在

某个区间上的增减性.

下面我们来讨论，如何由一个函数的解析式来判断这个函数是增函数还是减函数.

已知函数 $y=f(x)$，在给定的区间上，它的图象如图3-5所示，在此图象上任意选取两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，记

$$\Delta x=x_2-x_1,\ \Delta y=f(x_2)-f(x_1)=y_2-y_1.\text{❶}$$

❶ Δ 为希腊字母，读作"delta".

Δx 表示自变量 x 的增量，Δy 表示函数 y 的增量.

这时，对于属于这个区间的任意两个不相等的值 x_1，x_2：

这个函数是增函数的充要条件是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$；

这个函数是减函数的充要条件是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$.

由此我们得到，由一个函数的解析式判断一个函数是增函数还是减函数的步骤：

S1　计算 Δx 和 Δy；

S2　计算 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，

当 $k>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是增函数（图 3-5（1））；

当 $k<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是减函数（图 3-5（2））.

如果一个函数在某个区间上是增函数或是减函数，就说这个函数在这个区间上具有（严格的）**单调性**.

结合课件 303 学习函数的单调性.

例1　给出函数 $y=f(x)$ 的图象，如图 3-6 所示. 根据图象说出这个函数在哪些区间上是增函数？哪些区间上是减函数？

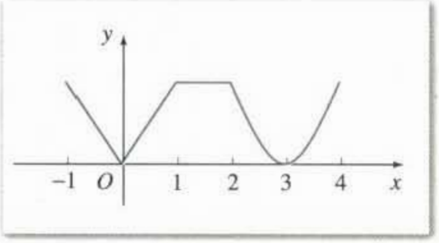


图 3-6

> 函数的单调区间，一般是指保持函数单调性的最大区间.

解　在区间$[-1, 0]$和$[2, 3]$上是减函数，在区间$[0, 1]$和$[3, 4]$上是增函数.

例2　证明函数 $f(x)=3x+2$ 在$(-\infty, +\infty)$上是增函数.

证明　设 x_1，x_2 是任意两个不相等的实数，则

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\begin{aligned}\Delta y = f(x_2)-f(x_1) &= (3x_2+2)-(3x_1+2)\\ &= 3(x_2-x_1),\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=3>0.$$

因此，函数 $f(x)=3x+2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$上是增函数.

例3　证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$(0, +\infty)$上是减函数.

证明　设 x_1, x_2 是$(0, +\infty)$内的任意两个不相等的正实数，则

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_2)-f(x_1)\\ &= \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=-\frac{x_2-x_1}{x_1x_2},\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_1x_2}<0.$$

因此，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$(0, +\infty)$上是减函数.

练习

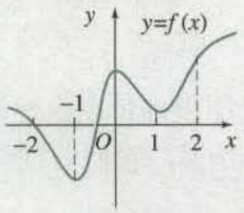
A组

1. 下列函数在指定区间上是增函数还是减函数：

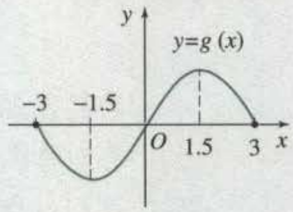
(1) $f(x)=x^2+1$，$x\in(0,+\infty)$；

(2) $f(x)=\dfrac{3}{x}$，$x\in(-\infty,0)$.

2. 如图，已知函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象，根据图象说出函数的单调区间，以及在每一个区间上，函数是增函数还是减函数.



(1)



(2)

(第2题)

B组

1. 证明函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是增函数.

2. 证明函数 $f(x)=\dfrac{3}{x}$ 在区间$(-\infty,0)$上是减函数.

3.1.4 函数的奇偶性

考察两个函数

$$f(x)=2x,\quad g(x)=\frac{1}{4}x^3$$

在 x 和 $-x$ 的函数值：

$$f(x)=2x,\qquad f(-x)=2(-x)=-2x;$$

$$g(x)=\frac{1}{4}x^3,\quad g(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3=-\frac{1}{4}x^3.$$

我们发现，它们在 x 的函数值与在 $-x$ 的函数值互为相反数，即

$$f(-x)=-f(x),\quad g(-x)=-g(x).$$

再观察这两个函数的图象（图 3-7）：

> **思考与讨论**
>
> 图 3-7 中函数的图象具有怎样的对称性？

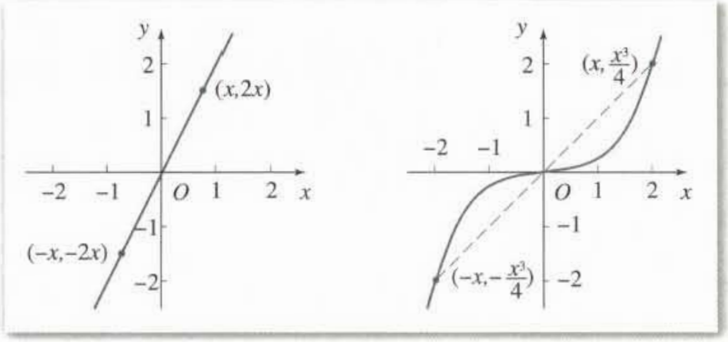


图 3-7

容易发现，这两个图形都是以坐标原点为对称中心的中心对称图形. 这就是说，它们分别绕原点旋转 180° 后，都与自身重合.

由以上两例，我们引出奇函数的定义：

如果对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 A 内的任意一个值 x，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则这个函数叫做**奇函数**.

由奇函数的定义可知，$x\in A$，则 $-x\in A$，于是函数的定义域关于原点对称是奇函数的必要条件.

设 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，点 $(x,\ f(x))$ 与点 $(-x,\ -f(x))$ 都在这个函数的图象上，由于这两点关于坐标原点对称，所以它的图象关于坐标原点对称；反之亦然.

> **思考与讨论**
>
> 判断一个函数是奇函数的方法有哪些？

于是我们得到：

一个函数是奇函数的充要条件是，它的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形.

例1 判断下列函数是不是奇函数：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；

(2) $f(x)=-x^3$；

(3) $f(x)=x+1$；

(4) $f(x)=x+x^3+x^5+x^7$.

解 (1) 因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的定义域

$$A=\{x\mid x\neq 0\},$$

所以当 $x\in A$ 时，$-x\in A$.

因为 $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数.

(2) $f(x)=-x^3$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$.

因为 $f(-x)=-(-x)^3=-(-x^3)=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=-x^3$ 是奇函数.

(3) 函数 $f(x)=x+1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，但 $f(-x)=-x+1=-(x-1)$，

$$-f(x)=-(x+1),$$

所以 $f(-x)\neq -f(x)\ (x\in\mathbf{R})$.

所以函数 $f(x)=x+1$ 不是奇函数.

(4) 函数 $f(x)=x+x^3+x^5+x^7$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$.

因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=-x-x^3-x^5-x^7\\&=-(x+x^3+x^5+x^7)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)=x+x^3+x^5+x^7$ 是奇函数.

再来考察函数

$$f(x)=x^2$$

在 x 与 $-x$ 的函数值：

$$f(x)=x^2,\ f(-x)=(-x)^2=x^2.$$

我们发现它在 x 的函数值与在 $-x$ 的函数值相等. 即

$$f(-x)=f(x).$$

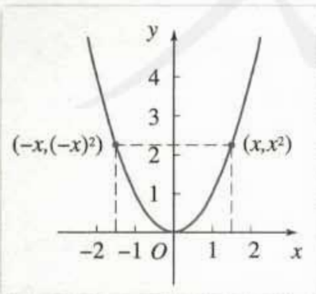


图 3-8

观察它的图象(图 3-8)，可以看到，对任意实数 x，图象上的点 $(x,\ x^2)$ 与 $(-x,\ (-x)^2)$ 关于 y 轴对称，这就是说，它的图象关于 y 轴是轴对称图形.

由上例，我们引出偶函数的定义：

如果对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 A 内的任意一个值 x，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则这个函数叫做**偶函数**.

由偶函数的定义可知，$x\in A$，则 $-x\in A$，于是函数的定义域关于原点对称也是函数为偶函数的必要条件.

设 $y=f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，点 $(x, f(x))$ 与 $(-x, f(-x))$ 都在 $y=f(x)$ 的图象上，这两点关于 y 轴对称；反之，如果函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 $f(x)=f(-x)$，$y=f(x)$ 是偶函数.

于是我们得到：

一个函数是偶函数的充要条件是，它的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

思考与讨论

判断一个函数是偶函数的方法有哪些？

例2 判断下列函数是不是偶函数：

(1) $f(x)=x^2+x^4$；

(2) $f(x)=x^2+1$；

(3) $f(x)=x^2+x^3$；

(4) $f(x)=x^2+1$，$x\in[-1,3]$.

解 由于(1)(2)(3)的函数的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，有 $-x\in\mathbf{R}$，所以只要验证 $f(-x)=f(x)$ 即可.

(1) 因为 $f(-x)=(-x)^2+(-x)^4=x^2+x^4=f(x)$，所以函数 $f(x)=x^2+x^4$ 是偶函数；

(2) 因为 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$，所以函数 $f(x)=x^2+1$ 是偶函数；

(3) 因为 $f(-x)=(-x)^2+(-x)^3=x^2-x^3$，所以当 $x\neq 0$ 时，$f(-x)\neq f(x)$，函数 $f(x)=x^2+x^3$ 不是偶函数；

(4) 因为 $2\in[-1, 3]$，而 $-2\notin[-1, 3]$，所以函数 $f(x)=x^2+1$，$x\in[-1, 3]$ 不是偶函数.

注 在奇函数和偶函数的定义中，都要求函数的定义域对应的区间关于坐标原点对称，如果一个函数的定

结合课件 304 学习函数的奇偶性.

义域对应的区间关于坐标原点不对称，这就失去了函数是奇函数或是偶函数的前提条件，函数也就无奇偶性可言.

由此我们得到判断一个函数 $y=f(x)$ $(x\in A)$ 的奇偶性的步骤如下：

S1 判断定义域是否关于原点对称，即当 $x\in A$ 时，是否有 $-x\in A$；

S2 当 S1 成立时，对于任意一个 $x\in A$，若

$$f(-x)=-f(x),$$

则函数 $y=f(x)$ 是奇函数；若

$$f(-x)=f(x),$$

则函数 $y=f(x)$ 是偶函数.

练习

A 组

1. 判断下列函数是否是奇函数：

(1) $f(x)=5x+x^3$； (2) $f(x)=2x+\sqrt[3]{x}$；

(3) $f(x)=x^3+1$； (4) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

2. 判断下列函数是否是偶函数：

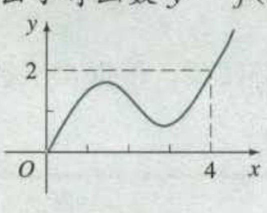
(1) $f(x)=-x^2$； (2) $f(x)=(x+1)(x-1)$；

(3) $f(x)=x^2+x$； (4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

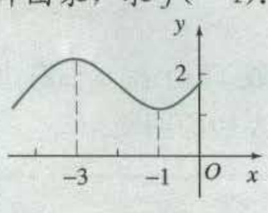
3. 如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 为定义域相同的偶函数，试问在这个定义域上 $F(x)=f(x)+g(x)$ 是不是偶函数？是不是奇函数？为什么？

B 组

1. 如图，给出了奇函数 $y=f(x)$ 的局部图象，求 $f(-4)$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，给出了偶函数 $y=f(x)$ 的局部图象，试比较 $f(1)$ 与 $f(3)$ 的大小.

习 题

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{6}{x^2-3x+2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}}$.

2. 说明函数 $y=kx$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是否具有单调性，如果有，是增函数还是减函数？

(1) 当 $k>0$ 时；　　(2) 当 $k<0$ 时.

3. 画出下列函数的图象，并根据函数的图象指出 $f(x)$ 的单调区间：

(1) $f(x)=x^2$；　　(2) $f(x)=-2x^2$.

4. 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

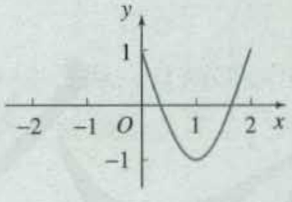
5. 下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？

(1) $f(x)=5x+3$；　　(2) $f(x)=5x$；

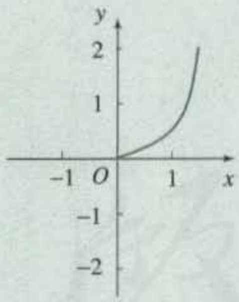
(3) $f(x)=x^2+1$；　　(4) $f(x)=x^2+2x+1$；

(5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+2x^4$；　　(6) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^3}$.

6. 已知偶函数 $f(x)$ 在 y 轴右边的一部分图象，根据偶函数的性质，画出它在 y 轴左边的图象.



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 已知奇函数 $f(x)$ 在 y 轴右边的一部分图象，根据奇函数的性质，画出它在 y 轴左边的图象.

3.2 一次函数和二次函数

3.2.1 一次、二次问题

问题 用长为 20 m 的绳子围成一个矩形，写出两边长之间的函数关系. 想想看，两边长各是多少时，围成的矩形面积最大？

我们先通过列表计算与画图来研究这个问题.

由已知条件，可列出函数表如下：

一边长/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
另一边长/m	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
矩形面积/m^2	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

从表中我们可看到，矩形的另一边长和矩形面积都是矩形一边长的函数. 用 x 表示自变量，y 表示对应的函数值. 根据函数表，画出这两个函数的图象（图 3-9）.

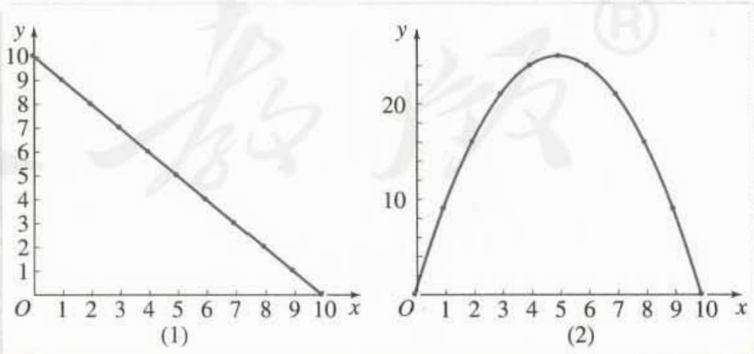


图 3-9

从函数表和图 3-9(1)，可以看到，矩形的一边越

长，另一边越短．从函数表和图 3-9(2)可以看到，当矩形的一边小于 5 m 时，函数值随边长增加而增加，当矩形的一边长为 5 m 时，矩形面积获得最大值．然后函数值又随着边长的增加而减小．

下面我们考虑，上述两个函数能否用解析式来表达．

设一边长为 x，另一边长为 y，依题意，它们的函数关系可用解析式表述为

$$y = 10 - x \quad (0 \leqslant x \leqslant 10).$$

进而，可得矩形面积为 $x(10-x)$．

如果设矩形的面积为 y，于是矩形面积与矩形一边长的函数关系为

$$y = x(10-x).$$

如何用列出的解析式来解答这个问题呢？

人们已找到研究二次函数的一般方法：**配方法**．

对上面得到的解析式进行如下变形：

$$\begin{aligned} y = f(x) = x(10-x) &= -x^2 + 10x \\ &= -[(x-5)^2 - 25] \\ &= -(x-5)^2 + 25. \end{aligned}$$

由上式，我们就可得到当 $x=5$ 时，函数取得最大值 25．

上面变形的方法就是配方法．我们在解二次方程时已用到它．

配方法对研究所有的二次函数都适用．它是解决二次函数问题的通用方法．

以上得到的两个函数分别是一次函数和二次函数．在生产和科学研究中，许多变量之间具有一次或二次函数关系．下面两节，我们将分别对这两个函数模型作一般性的讨论．

思考与讨论

对于函数 $y=ax^2+bx+c$，你能把它配成完全平方形式吗？

练习

A组

1. 求下列二次函数的自变量 x 为何值时，函数取得最大值或最小值：

(1) $f(x)=-x^2+3$；　　(2) $f(x)=-x^2-8$；

(3) $f(x)=x^2-5$；　　(4) $f(x)=(x-5)^2-3$.

2. 用配方法求下列二次函数的自变量 x 为何值时，函数取得最大值或最小值：

(1) $f(x)=x^2-2x-3$；　(2) $f(x)=-x^2+4x-8$.

3. 求下列二次函数的自变量 x 为何值时，函数取得最大值或最小值：

(1) $f(x)=-(x+3)^2-3$；

(2) $f(x)=-(x+5)^2-11$；

(3) $f(x)=(x+2)^2-6$；

(4) $f(x)=(x+3)^2-3$.

B组

1. 用配方法求下列二次函数的自变量 x 为何值时，函数取得最大值或最小值：

(1) $f(x)=2x^2-6x-3$；

(2) $f(x)=-3x^2+4x-8$.

2. 某商店销售一种水杯，如果每个的利润为 0，这个商店每月可售出 30 个，每个水杯销售利润每增加 1 元，每月少售出 3 个. 用列表、画图或公式表示售出个数与每个销售利润之间的函数关系. 如何确定每个水杯的销售利润，才能使商店获取最大的收益？

3.2.2 一次函数模型

函数

$$y=kx+b\ (k\neq 0,\ x\in\mathbf{R})\qquad ①$$

叫做**一次函数**.

我们已作过一些一次函数的图象，知道一次函数的图

象是一条直线. 这里对一次函数的图象再作进一步的分析.

在一次函数表达式①中，令 $b=0$，则函数

$$y=kx \qquad ②$$

叫做正比例函数. 我们先来看看正比例函数的图象是什么形状.

在②中，令 $x=0$，则 $y=0$.

所以②的图象经过原点 (0, 0).

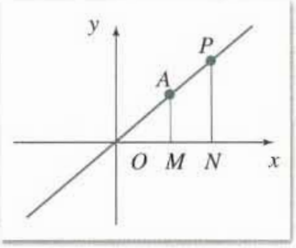


图 3-10

设 x_1，y_1 是方程②的任意一组解，作点 $A(x_1, y_1)$(图 3-10)，因为

$$y_1=kx_1,$$

所以点 A 在正比例函数 $y=kx$ 的图象上.

过点 O 和点 A 作直线 OA.

我们来说明直线 OA 是一次函数 $y=kx$ 的图象.

设 $P(x, y)$ 为直线 OA 上任一点，过点 A 和点 P 分别作 x 轴的垂线，垂足为 M, N，则

$$\triangle OAM \backsim \triangle OPN.$$

由相似三角形的对应边成比例，可推出

$$\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}=k.$$

这说明直线 OA 上的所有点的坐标都满足函数关系式

$$y=kx.$$

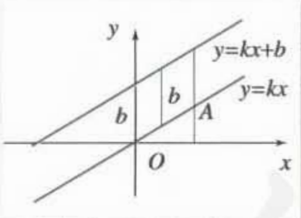


图 3-11

反之，如果点 P 的坐标 (x, y) 满足 $y=kx$，则点 P 一定在直线 OA 上.

综合以上两点说明，就可得到结论：

函数 $y=kx$ 的图象是一条过原点和点 A 的直线 OA.

我们再来看一般一次函数的图象（图 3-11).

从函数式 $y=kx$ 与 $y=kx+b$，我们可以看出，对于自变量相同的值 $y=kx+b$，总可以由正比例函数 $y=kx$ 的对应值加上 b 得到，这表示 $y=kx+b$ 的图象是由 $y=kx$ 的图象沿 y 轴方向平移 b 个单位得到.❶

❶ $b>0$ 时，沿 y 轴正向平移 b 个单位得到；$b<0$ 时，沿 y 轴负向平移 $|b|$ 个单位得到.

当 $x=0$ 时，$y=b$；当 $y=0$ 时，$x=\left(-\frac{b}{k}\right)$. 所以一次函数的图象是通过点 (0, b) 和点 $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ 的一

条直线.

结合课件 305 学习一次函数的性质与图象.

一次函数具有下面一些主要性质：

(1) 函数值的改变量与相应自变量改变量成正比.

设 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 是方程①的两组解，则

$$y_1 = kx_1 + b; \tag{3}$$

$$y_2 = kx_2 + b. \tag{4}$$

④－③，整理得

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

令 $\Delta y = y_2 - y_1$，$\Delta x = x_2 - x_1$，则

$$\Delta y = k\Delta x.$$

这就是说，**函数值的改变量与相应自变量的改变量成正比.**

(2) 当 $k > 0$ 时，一次函数是增函数；当 $k < 0$ 时，一次函数是减函数.

练习

A 组

1. 在下列函数中哪些是正比例函数？哪些不是？

(1) $y = -8x$；　　(2) $y = \sqrt{2}x$；

(3) $y = \frac{1}{3}x$；　　(4) $y = 2(x-1)$.

2. 在同一坐标系中画出下列函数的图象：

(1) $y = x$；　　(2) $y = \frac{1}{2}x$；

(3) $y = -x$；　　(4) $y = -\frac{1}{2}x$.

B 组

1. 正比例函数与一次函数有什么关系？

2. 已知点 $A(1, 3)$，$B(3, y)$ 是正比例函数 $y = kx$ 图象上的两点，求点 B 的纵坐标 y.

3. 已知直线 $y = x - 3$ 和直线 $y = -x - 5$，求这两条直线的交点 A，以及它们分别与 x 轴的交点 B，C 的坐标.

3.2.3 二次函数模型

一般地，函数

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \qquad ⑤$$

叫做**二次函数**. 它的定义域是 $\mathbf{R}$.

如果 $b = c = 0$，则⑤式变为

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0),$$

它的图象是一条顶点为原点的抛物线（图 3-12）. 当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下. 这个函数为偶函数，y 轴为它的图象的对称轴.

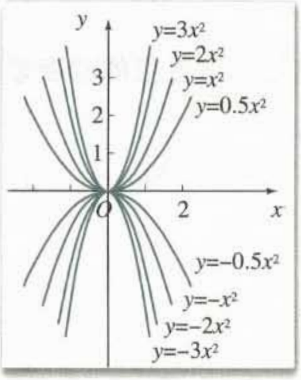


图 3-12

在同一坐标系中（图 3-12），作出

$y = -3x^2$，$y = -2x^2$，$y = -x^2$，$y = -0.5x^2$，

$y = 0.5x^2$，$y = x^2$，$y = 2x^2$，$y = 3x^2$.

可以看出，函数 $y = ax^2$ 中的系数 a 对函数图形的影响. 当 a 从 -3 逐渐变化到 0 时，抛物线开口向下并逐渐变大；当 $a = 0$ 时，$y = 0$，抛物线变为 x 轴；当 a 从 0 变化到 3 时，抛物线开口向上并逐渐变小.

下面再举例说明，如何用配方法研究二次函数的性质和图象.

例1 研讨二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ 的性质与图象.

解 (1) 配方.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 12) \\ &= \frac{1}{2}[(x+4)^2 - 16 + 12] \\ &= \frac{1}{2}[(x+4)^2 - 4] = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2. \end{aligned}$$

由于对任意实数 x，都有 $\frac{1}{2}(x+4)^2 \geqslant 0$，所以

$$f(x) \geqslant -2.$$

上式当 $x = -4$ 时取等号，即 $f(-4) = -2$，这说明该函数在 $x = -4$ 时，取得最小值 -2，记为 $y_{\min} = -2$.

点 $(-4, -2)$ 是这个图象的顶点.

(2) 求函数的图象与 x 轴的交点. 令 $y=0$，即

$$\frac{1}{2}x^2+4x+6=0,$$

$$x^2+8x+12=0.$$

解此一元二次方程，得 $x_1=-6$ 或 $x_2=-2$，这说明该函数的图象与 x 轴相交于两点 $(-6, 0)$，$(-2, 0)$.

(3) 列表作图. 以 $x=-4$ 为中间值，取 x 的一些值（包括使 $y=0$ 的 x 值），列出这个函数的对应值表：

x	…	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	…
y	…	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	…

在直角坐标系内描点画图（图 3-13）.

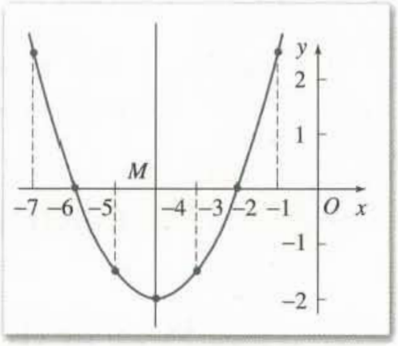


图 3-13

从上表和函数的图象容易推测，该函数的图象是以过点 $M(-4, 0)$ 且平行于 y 轴的直线（即直线 $x=-4$）为对称轴的轴对称图形. 下面我们来证明这个事实.

在 $x=-4$ 的两边取两个关于直线 $x=-4$ 对称的 x 值：

$$-4-h, -4+h \quad (h>0).$$

可以证明在这两点的函数值相等.

事实上，

$$f(-4-h)=\frac{1}{2}(-4-h)^2+4(-4-h)+6=\frac{1}{2}h^2-2,$$

$$f(-4+h)=\frac{1}{2}(-4+h)^2+4(-4+h)+6=\frac{1}{2}h^2-2.$$

所以 $f(-4-h)=f(-4+h)$.

对于上述结论，可简单地说成二次函数的图象关于直线 $x=-4$ 对称.

我们观察这个函数的图象，还可以发现，函数在区间 $(-\infty,-4]$ 上是减函数，在区间 $[-4,+\infty)$ 是增函数.

下面我们再来研究 $a<0$ 的例子.

例2 研讨二次函数 $y=-x^2-4x+3$ 的性质和图象.

解 (1) 配方.
$$\begin{aligned}y=f(x)&=-x^2-4x+3\\&=-(x^2+4x-3)\\&=-[(x+2)^2-7]\\&=-(x+2)^2+7.\end{aligned}$$

由 $-(x+2)^2\leqslant 0$ 得，该函数对任意实数 x 都有
$$f(x)\leqslant 7,$$
且当 $x=-2$ 时取等号，即 $f(-2)=7$，说明函数在 $x=-2$ 时取得最大值 7. 记作 $y_{\max}=7$. 函数图象的顶点是 $(-2,7)$.

(2) 求函数的图象与 x 轴的交点. 令方程
$$-x^2-4x+3=0.$$

解此方程，得 $x_1=-2+\sqrt{7}$，$x_2=-2-\sqrt{7}$.

这说明该函数的图象与 x 轴相交于两点 $(-2-\sqrt{7},0)$，$(-2+\sqrt{7},0)$.

(3) 列表作图. 以 $x=-2$ 为中间值，取 x 的一些值，列出这个函数的对应值表：

x	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	…
y	…	-2	3	6	7	6	3	-2	…

在直角坐标系内描点画图（图 3-14）.

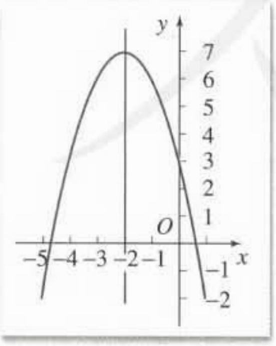


图 3-14

(4) 类似例 1 的分析，我们可得到，函数
$$y=-x^2-4x+3$$
关于直线 $x=-2$ 成轴对称图形. 在区间 $(-\infty,-2]$ 上是增函数，在区间 $[-2,+\infty)$ 上是减函数.

从以上两例，我们可以看到，为了比较准确地画出

一元二次函数的图象，我们首先需要分析函数的对称轴、顶点、单调区间，根据这些分析再做出函数的图象.

结合课件 306 学习二次函数的性质与图象.

对任何二次函数

$$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0),$$

都可通过配方，化为：

$$\begin{aligned}y&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\\&=a(x+h)^2+k.\qquad(*)\end{aligned}$$

其中，$h=\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

从(＊)式，我们就可得到二次函数有如下性质：

(1) 函数的图象是一条抛物线，抛物线顶点的坐标是 $(-h,k)$，抛物线的对称轴是直线 $x=-h$；

(2) 当 $a>0$ 时，函数在 $x=-h$ 处取最小值 $k=f(-h)$；在区间 $(-\infty,-h]$ 上是减函数，在 $[-h,+\infty)$ 上是增函数；

(3) 当 $a<0$ 时，函数在 $x=-h$ 处取最大值 $k=f(-h)$；在区间 $(-\infty,-h]$ 上是增函数，在 $[-h,+\infty)$ 上是减函数.

我们已看到，“配方法”是研究二次函数的主要方法. 熟练地掌握配方法是掌握二次函数性质的关键.

例3 求函数 $y=3x^2+2x+1$ 的最小值和图象的对称轴，并说出它在哪个区间上是增函数，在哪个区间上是减函数.

解 因为

$$\begin{aligned}y&=3x^2+2x+1\\&=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3},\end{aligned}$$

所以 $$y_{\min}=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

函数图象的对称轴是直线 $x=-\dfrac{1}{3}$，它在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$ 上是减函数，在区间 $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ 上是增函数.

例4 已知二次函数 $y=x^2-x-6$，说出：

(1) x 取哪些值时，$y=0$；

(2) x 取哪些值时，$y>0$，x 取哪些值时，$y<0$.

解 (1) 求使 $y=0$ 的 x 值，即求二次方程 $x^2-x-6=0$ 的所有根. 方程的判别式

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=25>0.$$

解得 $x_1=-2$，$x_2=3$.

这就是说，当 $x=-2$ 或 $x=3$ 时，函数值 $y=0$.

(2) 画出简图（图 3-15），函数的开口向上. 从图象上可以看出，它与 x 轴相交于两点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$，这两点把 x 轴分成 3 段，当 $x\in(-2,\ 3)$ 时，$y<0$，当 $x\in(-\infty,\ -2)\cup(3,\ +\infty)$ 时，$y>0$.

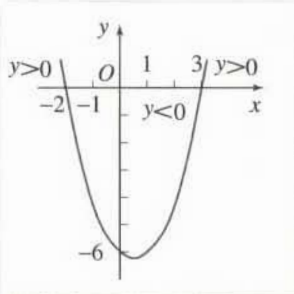


图 3-15

从上例我们可以看到，一元二次方程、一元二次不等式与二次函数有着密切的关系：

求二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，就是求二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的根；

求不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集，就是求使二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值小于 0 的自变量的取值范围；

求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，就是求使二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值大于 0 的自变量的取值范围.

练习

A 组

1. 用配方法，求下列函数的最大值或最小值：

(1) $f(x)=x^2+8x+3$；　　(2) $f(x)=5x^2-4x-3$；

(3) $f(x)=-x^2+x+1$；　　(4) $f(x)=-3x^2+5x-8$.

2. 求出下列函数图象的对称轴和顶点的坐标，并画出图象：

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2-5x+1$；　　(2) $y=-2x^2+x-1$.

B组

1. 已知函数 $f(x)=x^2-2x-3$，不直接计算函数值，试比较 $f(-2)$ 和 $f(4)$，$f(-3)$ 和 $f(3)$ 的大小.

2. 用配方法求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+9}$； (2) $y=\sqrt{-2x^2+12x-18}$.

习　题

1. 已知 y 是 x 的正比例函数，当 $x=8$ 时，$y=6$，求当 $x=3$ 和 $x=9$ 时，相应的函数值.

2. 作函数 $y=3x+12$ 的图象，并求：

(1) 该图象与两条坐标轴交点的坐标，及两交点间的距离；

(2) 不等式 $3x+12>0$ 的解集；

(3) 当 y 的取值限定在区间 $(-6, 6)$ 内时，x 允许的取值范围.

3. 求下列函数图象顶点的坐标、函数的最大值或最小值：

(1) $y=2x^2-8x+1$； (2) $y=-x^2+2x+4$.

4. 求函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴的交点及顶点的坐标.

5. 已知二次函数 $f(x)=-x^2+4x-3$：

(1) 指出函数图象的开口方向；

(2) x 为何值时 $f(x)=0$；

(3) 求函数图象顶点的坐标和对称轴.

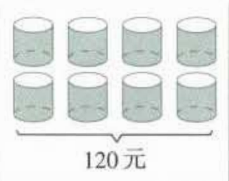
6. k 为何值时，函数 $f(x)=-3x^2+2x-k+1$ 的图象与 x 轴不相交.

7. 当 m 在什么范围内取值时，方程 $x^2+2(m-1)x+3m^2-11=0$：

(1) 有实数根； (2) 没有实数根.

3.3 函数的应用

我们在这一节学习几个函数应用的例子.



例1 一种商品，如果单价不变，购买 8 件商品需付 120 元，写出这种商品件数 x 和总价格 y 之间的函数关系.

解 因为 y 与 x 的关系是正比例关系，所以

$$y = kx,\ x \in \mathbf{N},$$

其中常数 k 待求.

把 $x = 8$，$y = 120$ 代入上式，得

$$k = \frac{y}{x} = \frac{120}{8} = 15.$$

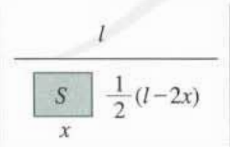
因此总价格 y 与件数 x 的函数关系是

$$y = 15x,\ x \in \mathbf{N}.$$

例2 火车从北京站开出 12 km 后，以 80 km/h 匀速行驶. 试写出火车运行总路程 s 与作匀速运动的时间 t 之间的关系.

解 因为火车匀速运动 t 小时后，运行的路程为 $80t$ km，所以，火车运行总路程 s 与作匀速运动的时间 t 之间的关系是

$$s = 12 + 80t\ (t \geqslant 0).$$



例3 某单位计划建筑一矩形围墙，现有材料可筑墙的总长度为 l，如果要使墙围出的面积最大，问矩形的长、宽各等于多少?

解 设矩形的长为 x，则宽为 $\frac{1}{2}(l-2x)$，得矩形的面积为

$$
\begin{aligned}
S &= x\,\frac{(l-2x)}{2} \\
&= -x^2+\frac{l}{2}x \\
&= -\left[x^2-\frac{l}{2}x+\left(\frac{l}{4}\right)^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2\right] \\
&= -\left(x-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{l^2}{16}.
\end{aligned}
$$

由此可得，该函数在 $x=\frac{l}{4}$ 时取最大值，且 $S_{\max}=\frac{l^2}{16}$. 这时宽为 $\frac{l-2x}{2}=\frac{l}{4}$，即这个矩形是边长等于 $\frac{l}{4}$ 的正方形时，所围出的面积最大.

例4 一家旅社有客房 300 间，每间房租 20 元，每天都客满. 旅社欲提高档次，并提高租金. 如果每间房租每增加 2 元，客房出租数会减少 10 间. 不考虑其他因素时，旅社将房间租金提高到多少时，每天客房的租金总收入最高.

解 设提高 x 个 2 元，则将有 $10x$ 间客房空出，则客房租金总收入为

$$
\begin{aligned}
y &= (20+2x)(300-10x) \\
&= -20x^2+600x-200x+6\,000 \\
&= -20(x^2-20x+100-100)+6\,000 \\
&= -20(x-10)^2+8\,000.
\end{aligned}
$$

由此得到，当 $x=10$ 时，$y_{\max}=8\,000$，即每间租金为 $20+10\times 2=40$（元）时，每天租金的总收入最高，为 8 000 元.

习　题

1. 一辆汽车匀速行驶 1.5 h，行驶的路程为 90 km，求这辆汽车行驶路程与时间之间的函数关系，以及汽车行驶 5 h 所行驶的路程.

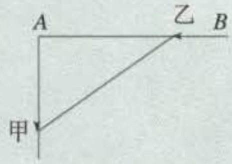
2. 已知某食品 5 kg 价格为 40 元，求该食品价格与质量之间的函数关系，并求 8 kg 食品的价格是多少元.

3. 某种产品每件 80 元每天可售出 30 件. 如果每件定价 120 元，则每天可售出 20 件. 如果售出件数是定价的一次函数，求这个函数.

4. 某个弹簧的长度 l 与悬挂在它下面的物体所受的重力 G 之间是一次函数关系. 已知 $G=0.02$ N 时，$l=8.9$ cm，$G=0.04$ N 时，$l=10.1$ cm，求这个函数.

5. 有 300 m 长的篱笆材料，如果利用已有的一面墙（设长度够用）作为一边，围成一块矩形菜地，问矩形的长、宽各为多少时，这块菜地的面积最大？

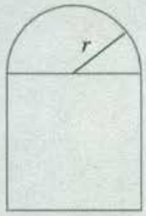
6. 如图甲、乙两船分别沿着箭头方向，从 A，B 两地同时开出. 已知 $AB=10$ n mile，甲乙两船的速度分别为 16 n mile/h 和12 n mile/h，求多少时间后，两船距离最近，最近距离是多少？（n mile 表示海里，1n mile=1.852 km）



（第 6 题）

7. 窗户的形状如图，它的上部是半圆形，下部是矩形. 如果窗框的外沿的周长固定为6 m，半圆的半径是多长时，窗户的透光面积最大.

8. 某类产品按质量共分 10 个档次，生产最低档次每件利润为 8 元. 如果产品每提高一个档次，则利润增加 2 元. 用同样的工时，每天可生产 60 件最低档次产品，提高一个档次将减少 3 件，求生产何种档次的产品所获利润最大.



（第 7 题）

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 什么是函数？函数包含哪些要素？
2. 表示函数主要有几种方法？各有什么特点？

3. 什么是函数的增量？什么是增函数？什么是减函数？什么是函数的单调性？它们的图象各有什么特点？

4. 什么是奇函数？什么是偶函数？它们的图象各有什么特点？

5. 一元一次和一元二次函数分别具有哪些性质？

6. 如何通过配方把一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 写成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，并对这个表达式进行分析，得出一元二次函数的性质和图象？

7. 如何求二次函数的最大值或最小值、顶点坐标和对称轴？

8. 举例说明一元二次函数、一元二次方程与一元二次不等式间的关系.

阅读材料

秦九韶和《数书九章》简介

我国古代数学的成就，在世界数学史上占有非常重要的地位. 远在中世纪，中国数学家就已经能进行任意高次幂的开方运算了.

南宋时期数学家秦九韶（约 1202—1261）创造了用“增乘开方法”进行高次方程的数值解法，所列的等式相当于求解方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的正实数根的问题，并且对系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 已没有任何正负的限制了.

例如“梯田求积”题，列出了方程 $-x^4+763\ 200x^2-40\ 642\ 560\ 000=0$，并解出 $x=840$；“遥度圆城”题出现了 $x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11\ 664x^2-34\ 992=0$ 的方程，解出 $x=3$. 这比英国数学家霍纳（William George Horner）1819 年发明的解数值方程式的类似方法要早 570 多年.

秦九韶所著《数书九章》（1247 年）是继著名的《九章算术》一书约1 200年之后，我国古代又一数学巨著. 形式上它继承了《九章算术》的传统，但内容上却超过古代数学经典著作的水平，成为我国古代数学的又一高峰.

《数书九章》主要的成就，除高次方程的数值解法之外，还记载了“大衍求一术”，它把“孙子算经”的方法推广到一般“一次同余式组问题”. 相同的方法，西方直到十八九世纪，才由著名的瑞士数学家欧拉（Léonhard Euler，

1707—1783）和德国数学家高斯（Carl Friedrich Gauss，1777—1855）分别研究出来. 所以谈到一次同余式组求解的“大衍求一术”时，外国数学家都把它叫做“中国剩余定理”.

秦九韶集前人之大成，充分发挥我国筹算模式化、程序化的特点和变换自如的优越性. 大衍术所包含的计算程序的许多基本方法和技能，同现代电子计算机的程序设计在原理上都是相同的.

秦九韶在级数理论的研究方面也超过了前人. 他还改进了联立一次方程组的解法，与现代人普遍应用的方法完全一致.

此外，他还提出关于已知三边之长求面积的“三斜求积式”，相当于著名的海伦公式. 他的成就还很多，难怪著名的科学史家萨顿赞扬秦九韶是“他那个民族，他那个时代，并且确实也是所有的时代最伟大的数学家之一”.

《数书九章》反映了我国南宋时期的社会情况. 全书共八十一题. 分为九类：大衍类、天时类、营建类、田域类、测望类、赋役类、钱谷类、军旅类、市易类. 这说明，数学的产生和发展是与人们的社会生产和生活密不可分的.

第四章 指数函数与对数函数

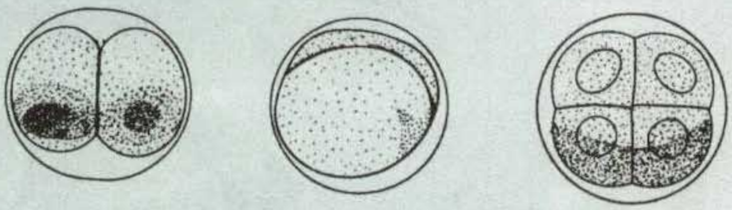
4.1 指数与指数函数

4.2 对数与对数函数

4.3 指数、对数函数的应用

在生物科学中，常常要研究某种细胞的分裂问题：

某个细胞第 1 次分裂，1 个分裂为 2 个，第 2 次分裂，2 个再分裂为 4 个……这样下去，问第 8 次分裂后共有多少个细胞？



容易知道，这时共有 2^8 个细胞. 求 2 的 8 次方的运算称为指数运算. 这里的指数为整数，在实际问题中，我们还要研究幂值与幂指数变化的规律，这时幂指数还会出现负数、分数甚至是无理数的情况. 所以我们必须进一步地研究指数运算.

在实际问题与科学研究中，有时还要求解上述问题的逆问题：经过多少次分裂，细胞总数为 4 096 个？

这样我们就要研究指数运算的逆运算：对数运算. 在此基础上再从实际问题中抽象出指数函数和对数函数模型，并分别研究它们的性质.

指数函数和对数函数在工程、生物、社会科学中有着重要的应用.

4.1 指数与指数函数

4.1.1 有理指数

1. 整数指数

问题 在一个国际象棋棋盘（图 4-1）上放一些米粒，第 1 格放 1 粒米，第 2 格放 2 粒米，第 3 格放 4 粒米……一直到第 64 格（后面一格的米粒数是前面一格的两倍）. 那么第 64 格应放多少粒米？

图 4-1

解　第 1 格放的米粒数是 1；

第 2 格放的米粒数是 2；

第 3 格放的米粒数是 $\underbrace{2\times 2}_{2\text{个}2}$；

第 4 格放的米粒数是 $\underbrace{2\times 2\times 2}_{3\text{个}2}$；

第 5 格放的米粒数是 $\underbrace{2\times 2\times 2\times 2}_{4\text{个}2}$；

……

第 64 格放的米粒数是 $\underbrace{2\times 2\times \cdots\times 2}_{63\text{个}2}$.

在初中我们学习了整数指数. 我们知道：

$a^2=a\times a$，

$a^3=a\times a\times a$，

……

$a^n=a\times a\times\cdots\times a$（$n$ 个 a 连乘）.

也就是说，a^n 是 n 个相同因子 a 的连乘积的缩写. 所以第 64 格应放的米粒数可以记作 2^{63}.

一般地，a^n（$n\in\mathbf{N}_+$）叫做 a 的 n **次幂**，a 叫做幂的**底数**，n 叫做幂的**指数**. 并且规定

$$a^1=a.$$

在上述定义中，n 必须是正整数，所以这样的幂叫做**正整指数幂**. 容易验证，正整指数幂的运算满足如下法则：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$；

(3) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $(m>n,\ a\neq 0)$；

(4) $(ab)^m=a^mb^m$.

在法则 (3) 中，我们作了 $m>n$ 的限制. 如果取消这种限制，则正整指数幂可以推广到整数指数幂. 例如，当 $a\neq 0$ 时，

$$\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0;$$

$$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}.$$

这些结果不能用正整指数幂的定义来解释. 但我们知道，

$$\frac{a^3}{a^3}=1,\ \frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2}.$$

这就启示我们，如果规定

$$a^0=1,\ a^{-2}=\frac{1}{a^2},$$

则上述运算就合理了. 于是我们规定：

$$a^0=1\ (a\neq 0);$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0,\ n\in\mathbf{N}_+).$$

由上面规定的零指数幂和负整指数幂的意义，我们就把正整指数幂推广到整数指数幂，并且正整指数幂的运算法则，对整数指数幂运算仍然成立. 例如：

$8^0=1,\ (-0.8)^0=1,\ (a-b)^0=1\ (a\neq b)$；

$10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=0.001$；

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}}=\frac{1}{-\frac{1}{32}}=-32;$$

对于零指数和负整指数，底数不能为0.

$$(2x)^{-3}=2^{-3}x^{-3}=\frac{1}{8x^{3}}\ (x\neq 0);$$

$$\left(\frac{x^{3}}{r^{2}}\right)^{-2}=\frac{x^{-6}}{r^{-4}}=\frac{r^{4}}{x^{6}};$$

$$0.000\ 1=10^{-4};$$

$$\frac{a^{2}}{b^{2}c}=a^{2}b^{-2}c^{-1}.$$

2. 分数指数

在初中我们还学习了方根的概念. 如果

$$x^{n}=a\ (n>1,\ n\in \mathbf{N}),$$

则 x 叫做 a 的 n **次方根**. 在实数范围内，正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，分别表示为 $\sqrt[n]{a}$，$-\sqrt[n]{a}$ (n 为偶数)；负数的偶次方根没有意义. 正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数，都表示为 $\sqrt[n]{a}$ (n 为奇数).

正数 a 的正 n 次方根叫做 a 的 n **次算术根**.

当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义的时候，$\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式**，n 叫做**根指数**. 根据 n 次方根的定义，根式具有性质：

(1) $(\sqrt[n]{a})^{n}=a$；

(2) 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^{n}}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^{n}}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

例如：

$(\sqrt[4]{5})^{4}=5$，$(\sqrt[3]{-5})^{3}=-5$，$(\sqrt[5]{2^{3}})^{5}=2^{3}=8$；

$\sqrt{5^{2}}=5$，$\sqrt[4]{(-3)^{4}}=|-3|=3$.

我们还可以把整数指数幂推广到正分数指数幂.

在法则 (2) 中，若幂指数取正分数，例如：

$$(a^{\frac{1}{3}})^{3}=a^{\frac{1}{3}\cdot 3}=a; \quad ①$$

$$(a^{\frac{2}{3}})^{3}=a^{\frac{2}{3}\cdot 3}=a^{2}. \quad ②$$

①②式的运算虽然无法用整数指数幂的定义来解释，但

是，①式含义是 $a^{\frac{1}{3}}$ 连乘 3 次得到 a，所以，$a^{\frac{1}{3}}$ 可以看作是 a 的 3 次方根；②式含义是 $a^{\frac{2}{3}}$ 连乘 3 次得到 a^2，所以，$a^{\frac{2}{3}}$ 可以看作是 a^2 的 3 次方根. 所以，规定

$$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a},\ a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$$

是合理的. 这样，分数指数幂运算就能像整数指数幂那样运算了.

我们约定底数 $a>0$. 于是，当 $a>0$ 时，定义：

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a};$$

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\ (n,\ m\in \mathbf{N}_+,\text{且}\ \frac{m}{n}\ \text{为既约分数}).$$

负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相同，即 $a>0$ 时，定义：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ (n,\ m\in \mathbf{N}_+,\text{且}\ \frac{m}{n}\ \text{为既约分数}).$$

至此，我们把整数指数幂推广到**有理指数幂**. 有理指数幂还可推广到实数指数幂. 在 $a^{\alpha}(a>0)$ 中，α 可以为任意实数. 实数指数幂有如下三条运算法则：

α, β 为希腊字母，分别读作“alpha”，“beta”.

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta};$$
$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta};$$
$$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}.$$

其中 $a>0$，$b>0$，α，β 为任意实数.

例1 计算：

$8^{\frac{3}{5}}\times 8^{\frac{2}{5}}$，$8^{\frac{2}{3}}$，$3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}$，$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^3$.

解 $8^{\frac{3}{5}}\times 8^{\frac{2}{5}}=8^{\frac{3+2}{5}}=8^1=8$；

$8^{\frac{2}{3}}=(8^{\frac{1}{3}})^2=2^2=4$；

$3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^2=9$；

$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^3=(a^{\frac{2}{3}})^3\times(b^{\frac{1}{4}})^3=a^2b^{\frac{3}{4}}$.

例2 利用函数型计算器❶计算（精确到 0.001）：

(1) $0.2^{1.52}$； (2) 3.14^{-2}； (3) $3.1^{\frac{2}{3}}$.

❶本书以 PEP-220 型中学计算器为例介绍.

❶设定计算器显示的精确度为0.001. 数字1表示设定为四舍五入近似数模式，数字3表示设定精确度为小数点后3位数字.

解　按键 MODE MODE MODE 1　3[1]

(1)

按键	显示
0.2 ∧ 1.52 =	0.087

所以 $0.2^{1.52} \approx 0.087$.

(2)

按键	显示
3.14 ∧ (−) 2 =	0.101

所以 $3.14^{-2} \approx 0.101$.

(3)

按键	显示
3.1 ∧ (2 ab/c 3) =	2.126

所以 $3.1^{\frac{2}{3}} \approx 2.126$.

例3　利用函数计算器计算函数值. 已知 $f(x)=2.71^x$，求 $f(-3)$，$f(-2)$，$f(-1)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$（精确到0.001).

解　按键 MODE MODE MODE 1　3

按键	显示
2.71 ∧ (−) 3 =	0.050

所以 $f(-3) \approx 0.050$.

在输入行保持 2.71 ∧ 不变，依次把 -3 换为 -2（按等号键 =），-1（按等号键 =），1（按等号键 =），2（按等号键 =），3（按等号键 =），就可得到：

0.136，0.369，2.71，7.344，19.903.

所以 $f(-2) \approx 0.136$，$f(-1) \approx 0.369$，$f(1)=2.71$，$f(2) \approx 7.344$，$f(3) \approx 19.903$.

练习

A组

设下面各题中出现的字母都为正实数.

1. 计算:

(1) x^4x^3;　(2) $(-6x^2)^2$;　(3) $\left(-\frac{2}{3}x^3\right)^2$;

(4) $(-x^3)^5$;　(5) $(3x)^2(-2x)^3$;　(6) $\left(\frac{1}{5}x\right)^2(5x)^2$.

2. 用分数指数幂表示下列各式:

$\sqrt[3]{x^2}$;　$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$;　$\sqrt[4]{(a+b)^3}$;　$\sqrt[3]{m^2+n^2}$;　$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$.

3. 计算:

(1) $25^{\frac{1}{2}}$;　(2) $\left(\frac{81}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$;　(3) $27^{\frac{2}{3}}$;

(4) $10\ 000^{\frac{1}{4}}$;　(5) $4^{-\frac{1}{2}}$;　(6) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

B组

1. 计算:

(1) $a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{8}}$;　(2) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}$;

(3) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6$;　(4) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$.

2. 计算:

(1) $2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$;　(2) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$;

(3) $\sqrt[3]{\frac{3y}{x}}\cdot\sqrt{\frac{3x^2}{y}}$;　(4) $\sqrt[6]{\left(\frac{8a^3}{125b^3}\right)^4}$.

3. 利用函数型计算器计算下列各题（精确到小数点后5位）:

(1) $\sqrt[100]{2}$;　(2) $\sqrt[100]{3}$;

(3) $\sqrt[100]{5}$;　(4) $3^{\frac{8}{25}}$;

(5) $0.401\ 2^{-\frac{1}{4}}$;　(6) $1.414^{1.12}$;

(7) $0.030\ 1^{\frac{3}{4}}$;　(8) $0.618^{0.23}$.

4.1.2 幂函数举例

结合课件 403 学习幂函数.

我们已经学过函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$，这些函数均以幂的底为自变量，指数为常数. 一般地，形如

$$y=x^{\alpha}\ (\alpha\in\mathbf{R})$$

的函数叫做**幂函数**. 下面我们举例学习这类函数的一些性质.

例1 写出下列函数的定义域：

(1) $y=x^3$；　　(2) $y=x^{\frac{1}{2}}$；

(3) $y=x^{-2}$；　　(4) $y=x^{-\frac{3}{2}}$.

解 (1) 函数 $y=x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$；

(2) 函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$，即 $y=\sqrt{x}$，定义域为 $[0,+\infty)$；

(3) 函数 $y=x^{-2}$，即 $y=\frac{1}{x^2}$，定义域为

$$(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$$

(4) 函数 $y=x^{-\frac{3}{2}}$，即 $y=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$，其定义域为 $(0,+\infty)$.

例2 作出下列函数的图象：

(1) $y=x$；　　(2) $y=x^{\frac{1}{2}}$；

(3) $y=x^2$；　　(4) $y=x^{-1}$.

解 列出各函数的对应值表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^{\frac{1}{2}}$	…	/	/	/	0	1	1.41	1.73	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$y=x^{-1}$	…	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	/	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…

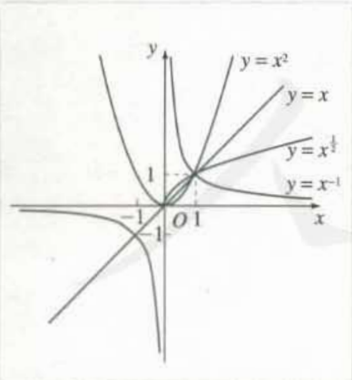


图 4-2

它们的图象如图 4-2 所示.

从上例我们可以看到，幂函数随着 α 的取值不同，它们的性质和图象也不尽相同，但也有一些共性，例如，所有的幂函数都通过点 (1,1) 等.

练习

A组

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}$；　　(2) $y=x^{-\frac{4}{5}}$；

(3) $y=x^{\frac{1}{3}}$；　　(4) $y=x^{-\frac{5}{4}}$.

2. 比较下列各组数值的大小：

(1) $5.23^{\frac{1}{2}}$，$5.24^{\frac{1}{2}}$；　　(2) 0.26^{-1}，0.27^{-1}.

B组

1. 使用计算软件画出函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的图象，并指出其奇偶性、单调性.

2. 画出函数 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图象，试问这两个函数各有什么性质？这两个函数及它们的图象有什么关系？

4.1.3 指数函数

问题 一种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年剩留的质量约是原来的84%. 试写出这种物质的剩留量随时间变化的函数解析式.

解 设最初的质量为1，经过 x 年，剩留量是 y. 则

经过1年，$y=1\times 84\%=0.84^1$；

经过2年，$y=1\times 0.84\times 0.84=0.84^2$.

一般地，经过 x 年，

$$y=0.84^x.$$

这一节，我们研究的函数，自变量出现在指数位置上，例如，

$$y=0.84^x$$

就是这样的函数.

结合课件401学习指数函数的图象.

一般地，函数

$$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1, x\in\mathbf{R})$$

叫做**指数函数**.

现在来研究指数函数的图象和性质，先画出一些指数函数的图象. 例如，$y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象. 列出 x，y 的对应值表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

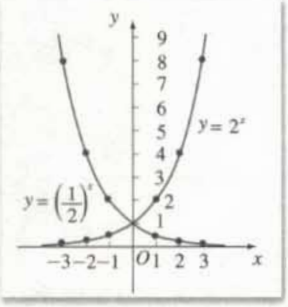


图 4-3

用描点法画出图象（图 4-3）：

从这个函数的对应值表和图象，可看到 $y=2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数. 这两个函数的任意函数值 y 都大于 0，且它们的图象都通过点 (0，1).

计算机上的练习

请在电子工作表❶中画出函数 $y=10^x$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象，考察这两个函数的单调性及图象具有哪些特征.

❶电子工作表是 OpenOffice 的一个组件，它是一种开放源码并可以免费下载使用的计算机软件，具体用法可参考本书附录 1.

一般地，指数函数

$$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

具有下列性质：

(1) 定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $(0,+\infty)$；

(2) 当 $x=0$ 时，$y=1$，即函数的图象都通过点 (0，1)；

(3) 当 $a>1$ 时，这个函数是增函数；

当 $0<a<1$ 时，这个函数是减函数.

例 用指数函数的单调性，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $1.7^{2.5}$ 和 1.7^3；　(2) $0.8^{-0.1}$ 和 $0.8^{-0.2}$.

解 (1) 考察函数 $y=1.7^x$，它在实数集上是增函数.

因为 $2.5<3$，

所以 $1.7^{2.5}<1.7^3$；

(2) 考察函数 $y=0.8^x$，它在实数集上是减函数.

因为 $-0.1>-0.2$，

所以 $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$.

计算机上的练习

用数学软件画出函数 $f(x)=2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.

练习

A 组

1. 在同一坐标系内，画出下列函数的图象，并说出每对函数相同和不同的性质：

(1) $y=3^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$； (2) $y=10^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$.

2. 利用指数函数的单调性，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $3^{0.8}$ 和 $3^{0.7}$； (2) $0.75^{-0.1}$ 和 $0.75^{0.1}$；

(3) 1.01^2 和 $1.01^{3.5}$； (4) 0.99^3 和 $0.99^{4.5}$.

B 组

1. 已知函数 $f(x)=2^x$，计算 $f(0)-f(-1)$，$f(2)-f(1)$，$f(4)-f(3)$，$f(6)-f(5)$.

2. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=2^x+3$； (2) $y=\sqrt{2^x}$.

习 题

1. 计算：

(1) $2^{-1}\times 64^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $0.2^{-2}\times 0.064^{\frac{1}{3}}$；

(3) $\left(\dfrac{8a^{-3}}{27b^{6}}\right)^{-\frac{1}{3}}$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{6}}$；

(5) $\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^{2}}}{x\sqrt[6]{x}}$；　　(6) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{2}$；

(7) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^{2}$；　　(8) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})^{3}$；

(9) $\left(\dfrac{b}{2a^{2}}\right)^{3}\div\left(\dfrac{2b^{2}}{3a}\right)^{0}\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{-3}$.

2. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=2^{x+1}$；　　(2) $y=\sqrt{1-2^{x}}$.

3. 已知 $f(x)=\dfrac{7}{3}x+1$，$g(x)=2^{x}$，在同一坐标系中画出这两个函数的图象：

(1) 求交点的坐标；

(2) 在哪个区间上，$f(x)$ 的值小于 $g(x)$ 的值？在哪个区间上，$f(x)$ 的值大于 $g(x)$ 的值？

4. 把下列各题中的三个数按从小到大的顺序用不等号连接起来：

(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$，$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$，$3^{\frac{2}{3}}$；

(2) $2^{2.5}$，2.5^{0}，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2.5}$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3^{x}-3}$；

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2^{x}}}$.

6. 化简：$\sqrt{a^{\frac{4}{3}}-2a+a^{\frac{2}{3}}}$ $(0<a<1)$.

4.2 对数与对数函数

4.2.1 对数

1. 对数概念

问题 在本章的章头语中提出了一个问题，某个细胞经过多少次分裂，细胞总数为 4 096 个.

设经过 b 次分裂，可以列出等式：

$$2^b = 4\ 096.$$

这是个已知底数和幂的值求指数的问题.

知识延伸

在指数函数 $y=a^x(a>0,且 a\neq 1)$ 中，对于 x 在实数集 $\mathbf{R}$ 内的每一个值，y 在正实数集内都有唯一确定的值和它对应；反之，对于 y 在正实数集内的每一个确定的值 N，x 在 $\mathbf{R}$ 内都有唯一确定的值 b 和它对应（图 4-4）.

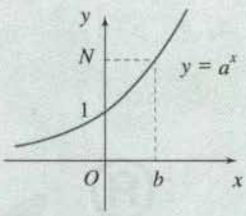


图 4-4

一般地，$a^b=N$ （$a>0$，且 $a\neq 1, N>0$），称幂指数 b 是以 a 为底 N 的**对数**. 例如：

因为 $4^2=16$，　　所以 2 是以 4 为底 16 的对数；
因为 $4^3=64$，　　所以 3 是以 4 为底 64 的对数；
因为 $4^1=4$，　　所以 1 是以 4 为底 4 的对数；
因为 $4^{\frac{1}{2}}=2$，　　所以 $\frac{1}{2}$ 是以 4 为底 2 的对数；

因为 $4^{-1}=\frac{1}{4}$，　所以 -1 是以 4 为底 $\frac{1}{4}$ 的对数；

因为 $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，　所以 $-\frac{1}{2}$ 是以 4 为底 $\frac{1}{2}$ 的对数.

我们常用符号“log”（拉丁文 logarithm 的缩写）表示对数. 2 是以 4 为底 16 的对数，就可写成

$$2=\log_4 16.$$

一般地，我们把“以 a 为底 N 的对数 b”记作：

$$b=\log_a N\ (a>0,\ 且\ a\neq 1).$$

其中，log 右下角的数 a 叫做**底数**，N 叫做**真数**，b 是以 a 为底 N 的**对数**.

实质上，上述对数式，不过是指数式的另一种表达形式而已. 例如，

$$3^4=81\ 与\ 4=\log_3 81$$

这两个式子表达的是同一关系.

知识延伸

对数恒等式

我们来推导对数恒等式.

因为 $a^b=N$，根据对数的定义 $b=\log_a N$，于是得到下面的对数恒等式：

$$\boxed{a^{\log_a N}=N.}$$

例如，$2^{\log_2 32}=32$，$10^{\log_{10}100}=100$.

根据对数的定义，对数具有下列性质：

(1) $\log_a a=1$，即底的对数等于 1；

(2) $\log_a 1=0$，即 1 的对数为 0；

(3) 0 和负数没有对数.

其中 $a>0$，且 $a\neq 1$.

例1 求 $\log_2 2$，$\log_2 1$，$\log_2 16$，$\log_2\frac{1}{2}$.

解　因为 $2^1=2$，　　　所以 $\log_2 2=1$；

因为 $2^0=1$，　　　所以 $\log_2 1=0$；

因为 $2^4=16$，　　　所以 $\log_2 16=4$；

因为 $2^{-1}=\frac{1}{2}$，　　　所以 $\log_2\frac{1}{2}=-1$.

2. 常用对数

底是 10 的对数叫做**常用对数**. 为了简便，通常把底 10 略去不写，并把“log”写成“lg”，即把 $\log_{10}N$ 记作 $\lg N$. 例如，100 的常用对数可以记为 $\lg 100$.

例2　求 $\lg 10$，$\lg 100$，$\lg 0.01$.

解　因为 $10^1=10$，　　　所以 $\lg 10=1$；

因为 $10^2=100$，　　　所以 $\lg 100=2$；

因为 $10^{-2}=0.01$，　　　所以 $\lg 0.01=-2$.

求任意一个正数的常用对数，可查对数表或直接使用计算器求解.

例3　利用计算器求对数（精确到 0.000 1）：

$\lg 2\,001$，$\lg 0.618$，$\lg 0.004\,5$，$\lg 396.5$.

解　用计算器计算：

按键 $\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}$ 1　4[1]

按键	显示
$\boxed{\lg}$ 2001 $\boxed{=}$	3.3012
$\boxed{\lg}$ 0.618 $\boxed{=}$	−0.2090
$\boxed{\lg}$ 0.0045 $\boxed{=}$	−2.3468
$\boxed{\lg}$ 396.5 $\boxed{=}$	2.5982

所以 $\lg 2\,001\approx 3.301\,2$，$\lg 0.618\approx -0.209\,0$，$\lg 0.004\,5\approx -2.346\,8$，$\lg 396.5\approx 2.598\,2$.

[1] 设定计算器显示的精确度为 0.000 1.

练习

A组

1. 把下列指数式改写成对数式：

(1) $2^3=8$；　(2) $6^2=36$；

(3) $2^4=16$；　(4) $3^4=81$；

(5) $2^{-3}=\frac{1}{8}$；　(6) $4^{-3}=\frac{1}{64}$；

(7) $7.6^0=1$；　(8) $81^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{27}$；

(9) $4^{\frac{1}{2}}=2$；　(10) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

2. 把下列对数式改写成指数式，并检验原等式是否正确：

(1) $\log_3 9=2$；　(2) $\log_4 16=2$；

(3) $\log_5 125=3$；　(4) $\log_7 49=2$；

(5) $\log_2\frac{1}{4}=-2$；　(6) $\log_2\frac{1}{8}=-3$；

(7) $\log_8 64=2$；　(8) $\log_8 16=\frac{4}{3}$；

(9) $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$；　(10) $\log_{\frac{1}{10}}1\,000=-3$.

3. 用对数式来表达下列各式中的 x：

(1) $10^x=25$；　(2) $2^x=12$；

(3) $5^x=6$；　(4) $4^x=\frac{1}{6}$.

4. 求下列各式的值：

(1) $2^{\log_2 8}$；　(2) $3^{\log_3 9}$；

(3) $2^{\log_2 5}$；　(4) $3^{\log_3 7}$.

5. 求下列各对数：

(1) $\lg 10$；　(2) $\lg 10\,000$；

(3) $\lg 1$；　(4) $\lg 10^6$；

(5) $\lg 10^{-5}$；　(6) $\lg 0.01$；

(7) $\lg 0.1$；　(8) $\lg 0.000\,001$.

B 组

1. 求下列各对数：

(1) $\log_6 36$；　　(2) $\log_2 \frac{1}{8}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\lg 1 + \lg 10 + \lg 100$；

(2) $\lg 0.1 + \lg 0.01 + \lg 0.001$.

3. 已知 $\log_x \frac{1}{16} = -4$，求 x.

4.2.2 积、商、幂的对数

问题 已知 $\log_a M$，$\log_a N$（M，$N > 0$），求 $\log_a(MN)$，$\log_a \frac{M}{N}$，$\log_a M^b$.

解 设 $\log_a M = p$，$\log_a N = q$，根据对数的定义，可得

$$M = a^p，N = a^q.$$

因为 $MN = a^p a^q = a^{p+q}$，

所以 $\log_a(MN) = p + q = \log_a M + \log_a N$.

同理，

因为 $\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$，

所以 $\log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$.

因为 $M^b = (a^p)^b = a^{pb}$，

所以 $\log_a M^b = bp = b\log_a M$.

总结以上结论，我们得到下面的对数运算法则：

(1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$.

因为同底数的幂相乘，不论有多少因数，都是把指数相加，所以这个运算法则可推广到若干个正因数的积：

$$\log_a(N_1 N_2 \cdots N_k) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_k.$$

即正因数积的对数等于各因数对数的和.

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

即两个正数商的对数等于被除数的对数减去除数的对数.

(3) $\log_a M^b = b\log_a M$.

即正数幂的对数等于幂的指数乘幂的底的对数.

例1 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a \frac{xy}{z}$；　　(2) $\log_a(x^3y^5)$；

(3) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{yz}$；　　(4) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解 (1) $\log_a \frac{xy}{z} = \log_a(xy) - \log_a z$

$= \log_a x + \log_a y - \log_a z$；

(2) $\log_a(x^3y^5) = \log_a x^3 + \log_a y^5$

$= 3\log_a x + 5\log_a y$；

(3) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{yz} = \log_a \sqrt{x} - \log_a(yz)$

$= \log_a x^{\frac{1}{2}} - (\log_a y + \log_a z)$

$= \frac{1}{2}\log_a x - \log_a y - \log_a z$；

(4) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a(x^2y^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{3}})$

$= \log_a x^2 + \log_a y^{\frac{1}{2}} + \log_a z^{-\frac{1}{3}}$

$= 2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \frac{1}{3}\log_a z$.

例2 计算：$\lg \sqrt[5]{100}$，$\log_2(4^7 \times 2^5)$.

解 $\lg \sqrt[5]{100} = \frac{1}{5}\lg 100 = \frac{2}{5}$；

$\log_2(4^7 \times 2^5) = \log_2 4^7 + \log_2 2^5$

$= 7\log_2 4 + 5\log_2 2$

$= 14 + 5$

$= 19$.

练习

A组

1. 用 $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$, $\lg(x+y)$, $\lg(x-y)$ 来表示下列各式：

(1) $\lg(xyz)$； (2) $\lg(x+y)z$；

(3) $\lg(x^2-y^2)$； (4) $\lg\dfrac{xy^2}{z}$.

2. 计算：

$\log_3(27\times9^2)$, $\lg 100^2$, $\lg 0.000\,1^3$, $\log_7\sqrt[3]{49}$.

3. 计算下列各式：

(1) $\log_2 6-\log_2 3$； (2) $\lg 5+\lg 2$；

(3) $\log_5 3+\log_5\dfrac{1}{3}$； (4) $\log_3 5-\log_3 15$.

4. 指出下列式子的错误，并说明原因：

(1) $\log_2(8-2)=\log_2 8-\log_2 2$；

(2) $\lg(4-2)=\dfrac{\lg 4}{\lg 2}$；

(3) $\dfrac{\log_2 4}{\log_2 8}=\log_2 4-\log_2 8$.

B组

1. 求值：$\lg\dfrac{300}{7}+\lg\dfrac{700}{3}+\lg 100$.

2. 已知 $\lg 2=0.301\,0$，求 $\lg 5$.

3. 化简：$\sqrt{(\log_3 5)^2-4\log_3 5+4}$.

4.2.3 换底公式与自然对数

利用常用对数，可以求得任意一个正数的以 10 为底的对数. 现在来说明，如何根据对数的性质，由以 10 为底的对数，求以其他正数 a ($a\neq1$) 为底的对数.

例1 求 $\log_3 5$ (精确到 0.001).

解 设 $\log_3 5=x$，写成指数形式，得

$$3^x = 5.$$

两边取常用对数，得

$$\lg 3^x = \lg 5,$$

即 $$x\lg 3 = \lg 5,$$

所以 $$x = \frac{\lg 5}{\lg 3} \approx \frac{0.6990}{0.4771}[1] \approx 1.465,$$

即 $$\log_3 5 \approx 1.465.$$

[1] 计算过程中的近似数的精确度一般比结果要求的多取一位小数.

一般地，有下面的**换底公式**：

$$\boxed{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.}$$

知识延伸

换底公式的证明

我们来证明换底公式.

设 $\log_b N = x$，则

$$b^x = N.$$

两边取以 a（$a>0$，且 $a \neq 1$）为底的对数，得

$$x\log_a b = \log_a N,$$

所以 $$x = \frac{\log_a N}{\log_a b},$$

即 $$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

在科学技术中，常常使用以无理数 $e = 2.71828\cdots$ 为底的对数. 以 e 为底的对数叫做**自然对数**. $\log_e N$ 通常记作

$$\ln N.$$

根据对数的换底公式，可得自然对数与常用对数的关系：

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \approx \frac{\lg N}{0.4343},$$

即 $\ln N \approx 2.302\,6 \lg N.$

实际上，用计算器可直接求自然对数. 例如，求 $\ln 34$（精确到 0.000 1），可用计算器计算如下：

按键 $\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}$ 1 4

按键	显示
$\boxed{\ln}$ 34 $\boxed{=}$	3.5264

所以 $\ln 34 \approx 3.526\,4.$

例2 求 $\log_8 9 \cdot \log_{27} 32$ 的值.

解
$$\log_8 9 \cdot \log_{27} 32 = \frac{\lg 9}{\lg 8} \cdot \frac{\lg 32}{\lg 27} = \frac{2\lg 3}{3\lg 2} \cdot \frac{5\lg 2}{3\lg 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}.$$

例3 求证：$\log_x y \cdot \log_y z = \log_x z.$

证明 把 $\log_y z$ 化成以 x 为底的对数，则
$$\log_x y \cdot \log_y z = \log_x y \cdot \frac{\log_x z}{\log_x y} = \log_x z.$$

例4 求证：$\log_{a^n} b^n = \log_a b.$

证明 $\log_{a^n} b^n = \dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^n} = \dfrac{n\log_a b}{n\log_a a} = \log_a b.$

练习

A 组

1. 求下列各式的值：

(1) $\ln e^2$； (2) $e^{\ln \pi}$.

2. 求下列各对数：

(1) $\log_{0.1} 0.001$； (2) $\log_{27} \dfrac{1}{81}$；

(3) $\log_{\frac{1}{4}} 8$； (4) $\log_{\frac{1}{2}} 4$.

3. 求证：$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

4. 计算：$\log_5 4 \cdot \log_8 5$.

5. 已知 $\lg 2 = 0.3010$，$\lg 7 = 0.8451$，求 $\lg 35$.

6. 化简：$\log_2 3 \cdot \log_{27} 125$.

B 组

1. 计算下列各题：

(1) $(\lg 5)^2 + \lg 2 \cdot \lg 50$；

(2) $\log_2 \dfrac{1}{25} \cdot \log_3 \dfrac{1}{8} \cdot \log_5 \dfrac{1}{9}$.

2. 求证：$\log_{\sqrt{a}} N = 2\log_a N$.

3. 求证：$\log_x y \cdot \log_y z \cdot \log_z x = 1$.

4. 已知 $\log_5 3 = a$，$\log_5 4 = b$，求证：$\log_{25} 12 = \dfrac{1}{2}(a+b)$.

4.2.4 对数函数

问题 在指数函数的引入问题中，已经得出某种放射性物质的质量的初始值为 1，它的剩留量与经过的年数的函数关系为

$$y = 0.84^x \quad (x \geqslant 0), \qquad ①$$

其中 x 为自变量，表示经过的年数，y 为对应的剩留量. 根据①式画出函数的图象（图 4-5），求约经过多少年，剩留量是原来的一半（结果保留一位有效数字）.

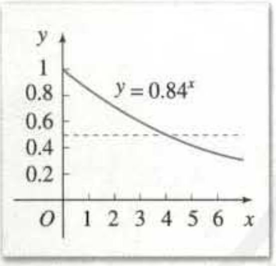


图 4-5

分析 由①式，给定一个 x 值（经过的年数），就能计算出唯一的函数值 y. 实际上，在这个问题中，知道的是 y 的值（$y = 0.5$），要求的是对应的 x 值. 用对数形式表示，即

$$x = \log_{0.84} y. \qquad ②$$

解 经过的年数

$$x = \log_{0.84} 0.5 = \frac{\lg 0.5}{\lg 0.84} \approx \frac{-0.30}{-0.08} \approx 4.0.$$

即约经过 4 年，剩留量是原来的一半.

在②式中，对应任一个“剩留量 y”，都可求出唯

一的“经过的年数 x”. 如果以“剩留量”作为自变量，则依函数的定义“经过的年数”与“剩留量”之间具有函数关系.

通常我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是上述的函数关系，可表示为

$$y=\log_{0.84}x.$$

结合课件 402 学习对数函数的图象.

一般地，函数

$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1,\ x>0).$$

叫做**对数函数**.

现在来画下面两个对数函数的图象：

(1) $y=\log_2 x$；　　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

首先作 x，y 的对应值表. 这个表简便的作法是把 4.1.3 节的两个指数函数

$$y=2^x,\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

的数值表里 x 和 y 的数值对换，就可得到下面的两个数值表：

(1) $y=\log_2 x$.

x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
y	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

x	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…
y	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

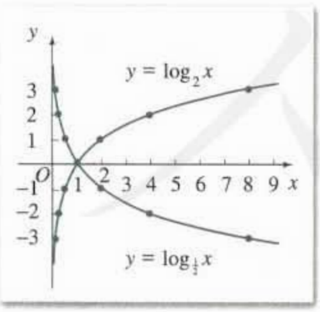


图 4-6

在同一坐标系里，用描点法画出图象（图 4-6）. 从这两个函数的对应值表和图象可看到，$y=\log_2 x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，而 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. 这两个函数的定义域相同，并且它们的图象都通过点 $(1,0)$.

一般地，对数函数

$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

具有下列性质：

(1) 定义域是正实数集，值域是 $\mathbf{R}$；

(2) 当 $x=1$ 时，$y=0$，即函数的图象都通过点 $(1, 0)$；

(3) 在其定义域内，当 $a>1$ 是增函数，当 $0<a<1$ 是减函数.

例1 求下列函数的定义域（$a>0$，且 $a\neq 1$）：

(1) $y=\log_a x^2$； (2) $y=\log_a(4-x)$.

解 (1) 要使函数有意义，必须 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以函数 $y=\log_a x^2$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq 0\}$；

(2) 要使函数有意义，必须 $4-x>0$，即 $x<4$，所以函数 $y=\log_a(4-x)$ 的定义域是 $(-\infty, 4)$.

例2 利用对数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $\log_2 3$ 与 $\log_2 3.5$； (2) $\log_{0.7}1.6$ 与 $\log_{0.7}1.8$.

解 (1) 考察函数 $y=\log_2 x$，它在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

因为 $3<3.5$，所以 $\log_2 3<\log_2 3.5$.

(2) 考察函数 $y=\log_{0.7}x$，它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

因为 $1.6<1.8$，所以 $\log_{0.7}1.6>\log_{0.7}1.8$.

练习

A组

1. 在同一坐标系中，画出 $y=\log_3 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的图象，并说出这两个函数相同和不同的性质.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_5(1+x)$； (2) $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$；

(3) $y=\log_7\dfrac{1}{1-3x}$； (4) $y=\sqrt{\log_3 x}$.

B组

根据下列各式，确定 a 的取值范围：

(1) $\log_a 0.8>\log_a 1.2$； (2) $\log_a\sqrt{10}>\log_a \pi$；

(3) $\log_{0.2}a>\log_{0.2}3$； (4) $\log_2 a>0$.

习 题

1. 把下列指数式化为对数式，或把对数式化为指数式（$a>0$，且 $a\neq 1$）：

(1) $\log_a N=b$；

(2) $a^0=1$；

(3) $a^1=a$；

(4) $\log_a\sqrt[3]{a^2}=\dfrac{2}{3}$.

2. 求证：

(1) $\log_2 64=3\log_8 64$；

(2) $\log_8 81=\dfrac{4}{3}\log_2 3$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_{64}32$；

(2) $\log_{64}81\cdot\log_{27}32$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt[8]{\log_2 x}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-x-2}+\log_2(3x)$.

5. 已知 $\log_9 5=a$，$\log_9 7=b$，求 $\log_{35}9$.

4.3 指数、对数函数的应用

指数函数和对数函数在经济学、生物学、电学和核物理学中都有着重要应用. 下面举例说明：

例1 2008 年我国人口总数是 13.28 亿. 如果人口的自然增长率控制在 5‰，问哪一年人口总数将达到 15 亿?

解 设 x 年后人口总数达到 15 亿. 依题意，得

$$13.28\cdot(1+0.005)^x=15.$$

即 $$(1+0.005)^x=\frac{15}{13.28}.$$

两边取对数，得

$$x\lg 1.005=\lg 15-\lg 13.28,$$

所以 $$x=\frac{\lg 15-\lg 13.28}{\lg 1.005}\approx 24.4.$$

所以 25 年后，即 2033 年我国人口总数将达到 15 亿.

例2 设在离海平面高度 x m 处的大气压是 y kPa，y 与 x 的函数关系是

$$y=Ce^{kx},$$

这里 C，k 都是常量. 已知某地某天在海平面与 1 000 m 高空的大气压强分别是 101 kPa 及 90 kPa，求在 600 m 高空的大气压强，又求大气压强是 96 kPa 处的高度(结果都保留 2 位有效数字).

解 已知 $y=Ce^{kx}$，其中 C，k 是待定的常数. 依已知条件 $x=0$，$y=101$，$x=1\,000$，$y=90$，得方程组

$$\begin{cases}101=Ce^{k\cdot 0} & ①\\ 90=Ce^{k\cdot 1\,000} & ②\end{cases}$$

由①得 $C=101$，代入②得

$$e^{k\cdot 1\,000}=\frac{90}{101}\approx 0.891\,1,$$

即 $$1\,000k=\ln 0.891\,1,$$

$$1\,000k=-0.115\,3,$$

所以 $k=-0.115\,3\times\frac{1}{1\,000}=-1.153\times 10^{-4}$.

所以 y 与 x 的函数关系是

$$y=101e^{-1.153\times 10^{-4}x}.$$

当 $x=600$ 时，得

$$y=101e^{-1.153\times 10^{-4}\times 600}=101\times 0.933\,2\approx 94.$$

当 $y=96$ 时，得

$$96=101e^{-1.153\times 10^{-4}x},$$

$$-1.153\times 10^{-4}x=\ln\frac{96}{101}=\ln 0.950\,5=-0.051.$$

所以 $x=0.051\times\frac{10^4}{1.153}\approx 442$.

即在高 600 m 处，大气压强约为 94 kPa，又在高 442 m 处，大气压强约为 96 kPa.

习 题

1. 一种产品的年产量原来是 a 件，在今后的 m 年内，计划使年产量平均每年比上一年增加 $p\%$. 写出年产量随着年数变化的关系式.

2. 一种产品原来成本是 a 元，在今后的 m 年内，计划使成本每年比上一年降低 $p\%$. 写出成本随着年数变化的函数关系式.

3. 已知镭经过 100 年剩留原来质量的 95.76%，计算它约经过多少年剩留一半（结果保留 4 位有效数字）.

4. 一个乡去年粮食平均每公顷产量是 6 125 kg，从今年起的 5 年内，计划平均每年比上一年提高 7%，问约经过几年可以提高到每公顷 7 500 kg（结果保留一位有效数字）.

5. 仓库库存的某种商品价值是 50 万元，如果每年的损耗率是 4.5%（就是每年比上一年减少库存品价值的 4.5%），那么经过几年，它的价值降为 20 万元（结果保留两位有效数字）?

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 的意义是什么？

2. 实数指数幂有哪些运算法则？

3. 什么是指数函数？指数函数有哪些主要性质？

4. 画出指数函数 $y=2^x$ 和$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象，并指出指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$的图象有哪些特性？

5. 什么是对数？指数与对数的关系是什么？

6. 什么是对数函数？它与指数函数的关系是什么？

7. 对数函数有哪些主要性质？

8. 画出函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象，并指出对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ 的图象有哪些性质？

9. 对数运算有哪些运算法则？

10. 什么是换底公式？

11. 什么是常用对数和自然对数？

12. 写出 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$，$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的定义域和值域，它们之间有什么关系？a 取何值时它们同为增函数？a 取何值时，它们同为减函数？

阅读材料

对数的功绩

对数是表达成 $b=\log_a m$ 形式的实数，其中 b，a，m 的关系是 $m=a^b$. 对数具有一种奇妙的性质：可以把高一级的乘、除、乘方、开方运算转化为低一级的加、减、乘、除运算. 进行大量的计算时，对数的这种功能可使计算的效率成倍地提高. 比如计算 2^{64}，若用 64 个 2 连乘，其繁难与费时可以想象，如果

利用 $\lg 2^{64}=64\cdot\lg 2=64\times0.3010$，求出对数值，再查反对数表就可求出 2^{64} 的近似值，就可以体会到对数在数值计算上的优越性.

对数是这样出现的：

早在公元前 200 多年，阿基米德就注意到 1，10，10^2，10^3，10^4，…与 0，1，2，3，4，…之间的对应关系. 这是关于对数的原始思想. 17 世纪初叶，商业、工业的兴起促进了天文学、力学等学科的发展，在航海、天文观测、透镜设计和抛物体运动等实际工作中，出现了大量极繁杂的计算，耗去了工作人员的大量时间. 提高计算效率成了当务之急. 苏格兰的纳皮尔（J. Napier，1550—1617）在 1594 年产生了把乘、除计算归结为加减运算的想法. 经过研究他发现了对数，揭示了对数的理论，并认识到对数的广泛应用在于提供对数表. 以后 20 年间，他埋头于对数的计算，于 1614 年造出了以 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 为底的八位对数表. 与此同时，瑞士人彪奇（1552—1632）也做了类似工作. 1615 年英国人布里格斯（1561—1632）着手造以 10 为底的常用对数表. 尽毕生努力，他拿出了分段的十四位常用对数表，余下的一大段常用对数表是由荷兰人佛朗哥（1600—1667）在 1628 年完成的.

造对数表有如此之难吗？是的，当时只能使用初等数学的方法，一个人进行笔算，仅求 5 的对数就需完成 22 次开方运算. 要拿出完整的对数表，其难度之大是可想而知的. 后来有了高等数学，利用级数理论中的公式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots\ (-1<x\leqslant 1)$，求对数值就容易多了.

三百年来，世界科技界一直把对数作为不可缺少的工具，它把科学家们从繁杂的计算里解放出来，等于延长了科学家的生命，对数为人类劳动生产率的提高作出了巨大贡献.

现在科学技术又发展到一个新的阶段，随着计算机科学的快速发展，计算机功能越来越强大. 求一个数的对数，进行一些繁难的计算，简单到只要按几下计算器上的按键就可以了. 如求 2^{64} 的值，在计算器上顺序按键

$$\boxed{\mathrm{AC/ON}}\ 2\ \boxed{x^y}\ 64\ \boxed{=}$$

显示屏上就可给出答案 1.844674407×10^{19}.

第五章 三角函数

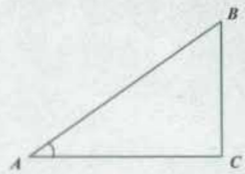
5.1 角的概念的推广及其度量

5.2 任意角的三角函数

5.3 三角函数的图象和性质

我们已学过锐角三角函数．对直角三角形中的任一锐角，我们定义了它的正弦、余弦、正切．例如，在 Rt$\triangle ABC$ 中，设 $\angle C$ 为直角，则锐角 A 的正弦、余弦、正切分别定义为：

$$\sin A=\frac{BC}{AB},\quad \cos A=\frac{AC}{AB},\quad \tan A=\frac{BC}{AC}.$$

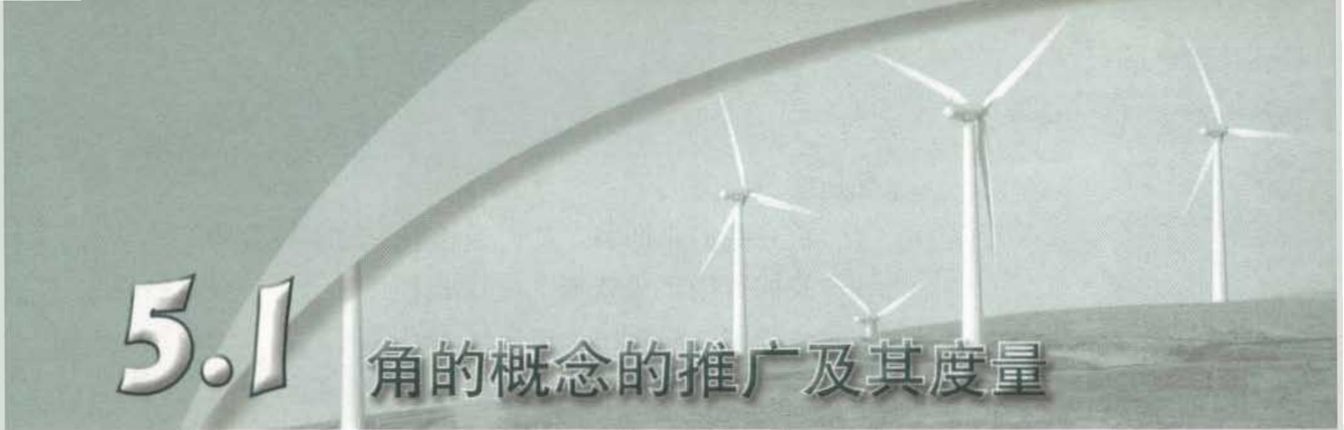


掌握了锐角三角函数的知识，使我们能够解决许多几何度量和实际测量问题．但有许多问题，用锐角三角函数知识解决就很困难．

例如，在研究任一三角形中的边角关系时，如果不是直角三角形，我们如何建立该三角形中的边角关系呢？再例如，在物理学中，质点作等速圆周运动，如果质点转动的角度大于直角，质点在圆周上的位置，如何确定？如果质点作周而复始的圆周运动，又如何描述质点运动的规律？

显然，锐角三角函数就不够用了．类似的问题，像弹簧的振动、潮汐的变化等都需要人们寻找新的数学工具来描述它们．在现代科学中，三角函数已成为研究自然界中周期变化现象的重要数学工具，它在力学、工程及无线电学中有着广泛的应用．

这一章，我们要把锐角三角函数推广为任意角的三角函数，把你带入三角函数的全新领域，那里有许多问题等待着你去探索、领悟、认知．



5.1 角的概念的推广及其度量

5.1.1 角的概念的推广

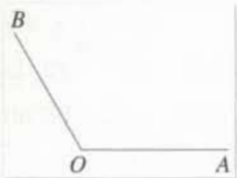


图 5-1

我们在初中学过，在平面内，角可以看作一条射线绕着它的端点旋转而成的图形（图 5-1）．当时，不考虑旋转方向，不论从射线 OA 旋转到 OB，还是从射线 OB 旋转到 OA，它们旋转的绝对量都是一样的，而且旋转的绝对量不超过一个周角．在现实生活中，有很多角的大小超过这个范围．例如，运动员掷链球时旋转过的角．

2008 年 8 月 20 日，我国选手张文秀在北京奥运会女子链球决赛中夺得铜牌，实现了中国链球奥运奖牌零的突破，右图为张文秀在比赛中的照片．

链球是用一条链子与把手相连的金属球．掷链球是一项田径投掷运动，运动员在投掷圈内通过旋转 3～4 圈，使链球逐渐获得加速，最后将链球投出．

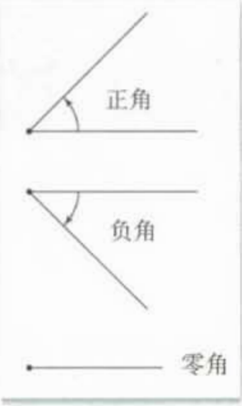
观察上面的照片，我们发现，射线 OP 可以沿逆时针方向旋转，也可以沿顺时针方向旋转，OP 转过的角度，也不止一个平角．为了描述链球转过的角度的大小和方向，有必要对角的概念加以推广．

问题 射线 OP 绕端点旋转，旋转的大小和方向

如何度量?

首先我们来回答，如何描述射线的旋转方向?

我们曾用正负数来度量数轴上点的位移，很自然的大家会想到，能否用正负来描述射线的旋转方向呢?



在平面内，一条射线绕着它的端点旋转有两个相反的转向：顺时针方向和逆时针方向. 习惯上，我们规定，按逆时针方向旋转而成的角叫做**正角**；按顺时针方向旋转而成的角叫做**负角**. 当射线没有旋转时，我们也把它看成一个角，叫做**零角**.

在画图时，常用带箭头的弧来表示旋转的方向和旋转的绝对量. 旋转生成的角，又常称为**转角**.

射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB 的位置所成的角，仍记作 $\angle AOB$，OA 叫做 $\angle AOB$ 的始边，OB 叫做 $\angle AOB$ 的终边. 以 OB 为始边，OA 为终边的角记作 $\angle BOA$. 如图 5-2 所示，

$$\angle AOB = 120^\circ,\ \angle BOA = -120^\circ.$$

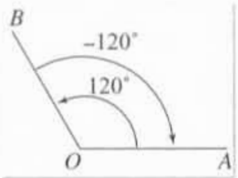


图 5-2

当射线 OA 绕端点 O 旋转时，旋转量可以超过一个周角，形成任意大小的角. 角的度数表示旋转量的大小. 如图 5-3，$\alpha = 450^\circ$，$\beta = -630^\circ$.

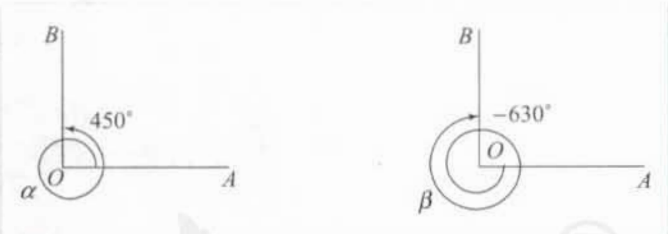


图 5-3

如图 5-4，射线 OA 旋转 90°到射线 OB 的位置，接着再旋转-30°到 OC 的位置，则

$$\begin{aligned}\angle AOC &= \angle AOB + \angle BOC \\ &= 90^\circ + (-30^\circ) \\ &= 60^\circ.\end{aligned}$$

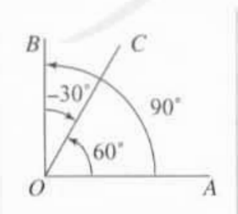


图 5-4

这就是说，**各角和的旋转量等于各角旋转量的和.**

$90^\circ - 30^\circ$，可直接看成 90° 与 -30°的和. 一般地，$\alpha - \beta$ 可直接看成 α 与 $-\beta$ 的代数和. 引入正、负角的概

念后，角的减法运算都可转化为角的加法运算.

$\angle AOB$ 表示以 OA 为始边，以 OB 为终边的角. 显然，如果不指出旋转量的大小，它可以表示许多旋转量不同的角，但这些角彼此相差 360° 的整数倍. 设 $\angle AOB=\alpha$，则

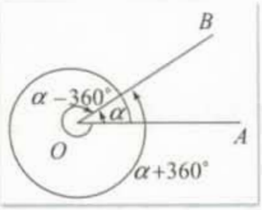


图 5-5

$$\alpha+360^\circ,\ \alpha-360^\circ,$$
$$\alpha+2\cdot 360^\circ,\ \alpha-2\cdot 360^\circ,$$
$$\alpha+3\cdot 360^\circ,\ \alpha-3\cdot 360^\circ$$

等，它们的始边和终边都分别相同（图5-5）. 所有与角 α 始边与终边分别相同的角构成的集合为

$$\{x \mid x=\alpha+k\cdot 360^\circ,\ k\in \mathbf{Z}\}.$$

在初中，我们学习了用点的坐标来确定点的位置，现在要问，是否可用点的坐标来确定转角的大小和方向？为此，必须把角放到坐标系中来研究.

知识延伸

当我们引进了转角以后，很自然地会想到，在直角坐标系 xOy 中，x 轴的正向到 y 轴的正向的转角是多少？通常，我们画直角坐标系 xOy 时，x 轴放在水平位置，并且 x 轴的正向指向右方，y 轴的正向指向上方，这时 x 轴的正向按逆时针方向转 90° 与 y 轴的正向重合. 所以，$\angle xOy$ 为正 90° 角. 这与我们旋转角的定向是一致的.

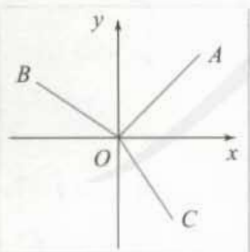


图 5-6

在直角坐标系中讨论角时，通常使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合. 这样角的大小和方向可确定终边所在坐标系中的位置. 这样放置的角，我们说它在坐标系中处于**标准位置**.

处于标准位置的角的终边落在第几象限，就叫做第几象限的角. 如果角的终边落在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限. 如图 5-6 所示，$\angle xOA$ 是第一象限的角，$\angle xOB$ 是第二象限的角，$\angle xOC$ 是第四象限的角，$\angle xOy$ 不属于任何象限.

例1 写出与下列各角终边相同的角的集合，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $45°$；　　(2) $135°$；

(3) $240°$；　　(4) $330°$.

解　(1) 与 $45°$ 终边相同的角的集合是

$$S_1=\{\alpha \mid \alpha=45°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

因为 $45°$ 是第一象限的角，所以集合 S_1 中的角都是第一象限的角.

(2) 与 $135°$ 终边相同的角的集合是

$$S_2=\{\alpha \mid \alpha=135°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

因为 $135°$ 是第二象限的角，所以集合 S_2 中的角都是第二象限的角.

(3) 与 $240°$ 终边相同的角的集合是

$$S_3=\{\alpha \mid \alpha=240°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

因为 $240°$ 是第三象限的角，所以集合 S_3 中的角都是第三象限的角.

(4) 与 $330°$ 终边相同的角的集合是

$$S_4=\{\alpha \mid \alpha=330°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

因为 $330°$ 是第四象限的角，所以集合 S_4 中的角都是第四象限的角.

例2 写出终边在 y 轴上的角的集合.

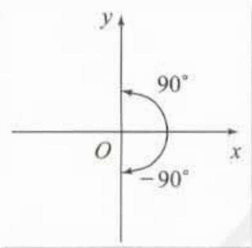


图 5-7

解　终边在 y 轴的正半轴上的一个角为 $90°$，终边在 y 轴的负半轴上的一个角为 $-90°$（图 5-7），因此，终边在 y 轴的正半轴、负半轴上的角的集合分别是

$$S_1=\{\alpha \mid \alpha=90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\};$$

$$S_2=\{\alpha \mid \alpha=-90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

所以终边在 y 轴上角的集合为

$$\begin{aligned}S_1\cup S_2&=\{\alpha \mid \alpha=90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha \mid \alpha=-90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha \mid \alpha=90°+k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

例3 在 $0\sim360°$ 之间❶，找出与下列各角终边相同的角，并分别判定各是哪个象限的角：

❶在本书中，α 在 $0\sim360°$ 之间，是指 $0°\leqslant\alpha<360°$.

(1) $-120°$;　　(2) $640°$;　　(3) $-950°$.

解　(1) 因为 $-120°=240°-360°$，所以 $-120°$与 $240°$的角的终边相同，它是第三象限的角；

(2) 因为 $640°=280°+360°$，所以 $640°$的角与 $280°$的角的终边相同，它是第四象限的角；

(3) 因为 $-950°=130°-3\times360°$，所以 $-950°$的角与 $130°$的角的终边相同，它是第二象限的角.

例4　写出第一象限角的集合.

解　在 $0\sim360°$之间，第一象限角的取值范围是 $0°<\alpha<90°$，所以第一象限角的集合是

$$\{\alpha \mid k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}.$$

练习

A组

1. 画出下列各角：

$45°$;　$90°$;　$120°$;　$210°$;　$330°$;

$-60°$;　$-90°$;　$-135°$;　$-310°$;　$-420°$.

2. 求和并作图表示下列各角：

(1) $30°+45°$;　　(2) $90°+(-60°)$;

(3) $60°-180°$;　　(4) $-60°+270°$.

3. 写出与下列各角始、终边相同角的集合：

$30°$;　$60°$;　$120°$;　$-45°$;　$-120°$.

4. 在直角坐标系中 $0\sim360°$之间，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们各是哪个象限的角.

(1) $-45°$;　　(2) $760°$;　　(3) $-480°$.

B组

1. 分别写出终边在 x 轴的正半轴、x 轴的负半轴和 x 轴上的角的集合.
2. 写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合，终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合.
3. 写出终边在坐标轴上的角所构成的集合.

5.1.2 弧度制

我们知道，把一圆周 360 等分，则其中 1 份所对的圆心角是 1 度角. 这种用度做单位来度量角的制度叫做**角度制**. 由此可看到，在同一圆内，角是用它对的圆弧来度量的，角的大小与它所对的圆弧长成正比，弧长扩大几倍，则这段弧所对的角也相应地扩大相同的倍数.

下面我们来介绍在数学和其他科学研究中常用的另一种度量角的制度——弧度制.

问题 怎样选择弧度制的度量单位?

观察图 5-8，几个大小不同的同心圆，虽然同一圆心角 α 所对弧长与半径都不相等，但弧长与半径长成正比例，即它们的比值

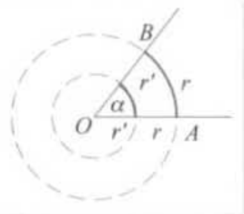


图 5-8

$$\frac{l}{r}$$

等于常数. 这表示弧长与半径的比值，与半径长无关，而只与 α 的大小有关，这就启示我们用圆的半径作单位长去量弧.

我们把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 **弧度的角**. 例如，$\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角就是 1 弧度的角（图 5-8），弧度记作 rad.

于是长为 l 的弧所对的圆心角（正角）

$$\alpha = \frac{l}{r}\ (\text{rad}).$$

我们知道，圆周长 $l = 2\pi r$，因此，

$$\text{周角} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ \text{rad},$$

$$\text{平角} = \pi\ \text{rad},$$

$$\text{直角} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}.$$

但平角又等于 180°，于是我们可得到角度制与弧度制的换算关系：

$$\pi\ \text{rad} = 180°;$$

$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57^{\circ}18'=57.30^{\circ};$$

$$1^{\circ}=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\ 45\ \text{rad}.$$

由此，容易得到弧度制与角度制的换算公式：

设一个角的弧度数为 α，角度为 n°（分和秒都要先转换为度表示），则

$$\alpha=n\cdot\frac{\pi}{180},\ n=\alpha\cdot\frac{180}{\pi}.$$

角的概念推广以后，无论用角度制还是用弧度制，都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一种一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数（角度数或弧度数）与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角与它对应.

在理解以上对应关系时，应注意角度制是 60 进位制，遇到如 $35^{\circ}6'$ 这样的角，应把它化为 10 进制的数值 35.1°. 但是弧度制不存在这个问题，弧度数是十进制的实数，这是角度制与弧度制的一个重要区别.

利用上面的公式，我们就可按要求的精确度，把任意角的角度值换算为它的弧度值或任一角的弧度值换算为角度值.

例1 把 $67^{\circ}30'$ 化成弧度.

解 $67^{\circ}30'=\left(\frac{135}{2}\right)^{\circ}$，

$$67^{\circ}30'=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\times\frac{135}{2}=\frac{3\pi}{8}\ \text{rad}.$$

例2 把 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度化成度.

解 $\frac{3\pi}{5}\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\times\frac{3\pi}{5}=108^{\circ}.$

例3 使用函数型计算器，把下列度数化为弧度数或把弧度数化为度数（精确到小数点后 4 位数）：

(1) 67°，168°，-86°； (2) 1.2 rad，5.2 rad.

解 (1) 按键 $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}$ 1 4

按键$\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}$ 2

按键	显示
67 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{Ans}}$ 1 $\boxed{=}$	1.1694
168 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{Ans}}$ 1 $\boxed{=}$	2.9322
(−)86 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{Ans}}$ 1 $\boxed{=}$	−1.5010

所以，$67^\circ \approx 1.169\,4$ rad，

$168^\circ \approx 2.932\,2$ rad，

$-86^\circ \approx -1.501\,0$ rad.

（2）按键$\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}$ 1

按键	显示
1.2 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{Ans}}$ 2 $\boxed{=}$	68.7549°
5.2 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{Ans}}$ 2 $\boxed{=}$	297.9381°

所以，1.2 rad$\approx 68.754\,9^\circ$，

5.2 rad$\approx 297.938\,1^\circ$.

一些常用特殊角的度数与弧度数的对应值，列表如下：

周角的	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

度数与弧度数的换算，也可直接查《中学数学用表》中的《度、分、秒化弧度表》或《弧度化度、分、秒表》，查法见表中说明.

由于角有正负，我们规定：**正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为 0.**

这种用“弧度”做单位来度量角的制度叫做**弧度制**. 今后我们用弧度制表示角的时候，“弧度”二字通常略去不写. 例如 α 等于 2 就表示 α 是 2 弧度的角.

由弧度的定义，我们知道弧长 l 与半径 r 的比值等于所对圆心角 α 的弧度数（正值）（图 5-9），即

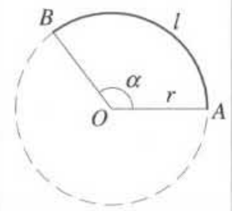


图 5-9

$$\frac{l}{r}=\alpha \text{ 或 } l=\alpha r. \qquad ①$$

①式是弧度制下的弧长计算公式.

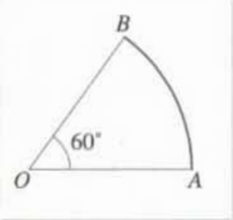


图 5-10

例4 如图 5-10 所示，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角是 60°，半径为5 cm，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长 l（精确到 0.1 cm）.

解 因为 $60°=\frac{\pi}{3}$,

所以 $l=\alpha r=\frac{\pi}{3}\times 5$

$\approx \frac{3.14\times 5}{3}\approx 5.2.$

即 $\overset{\frown}{AB}$ 的长约为 5.2 cm.

练习

A 组

1. 一条弦长等于半径，这条弦所对的圆心角是多少弧度？（精确到小数点后两位）

2. 将下列各度化为弧度：

(1) 60°; (2) 90°;
(3) 45°; (4) 30°;
(5) 135°; (6) 120°;
(7) −30°; (8) −60°;
(9) −45°; (10) −90°;
(11) −180°; (12) −270°.

3. 将下列各弧度化为度：

(1) $\frac{3\pi}{4}$; (2) $\frac{2\pi}{3}$;
(3) $\frac{\pi}{2}$; (4) $\frac{\pi}{3}$;
(5) $\frac{\pi}{6}$; (6) $\frac{\pi}{4}$;
(7) π; (8) $-\frac{3\pi}{2}$.

4. 将下列各度化为弧度（写为 π 的倍数）：

(1) 12°；　　(2) 75°；

(3) 210°；　　(4) 135°；

(5) 240°；　　(6) 225°；

(7) 300°；　　(8) 330°.

5. 使用计算器，将下列各弧度化为度或把度化为弧度：

(1) 1 rad，3 rad，5 rad，8 rad；

(2) 83°，138°，278°，368°.

6. 已知圆的半径为 0.5 m，分别求 2 rad，3 rad 圆心角所对的弧长.

B 组

1. 在半径不同的同心圆中，同一圆心角所对的圆弧长与半径的比值是否相等？

2. 时间经过 4 h，时针和分针各转了多少弧度？

3. 在半径为 3 的圆中，用弧长公式计算 120° 角所对的圆弧长.

4. (1) 已知：扇形的半径为 R，圆心角为 α，求证：该扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}R^2\alpha.$$

(2) 在半径为 5 cm 的扇形中，圆心角为 2 rad，求该扇形的面积.

习　题

1. 在直角坐标系中，角 α_1，α_2，α_3，α_4 的终边分别通过点 $P_1(1, 2)$，$P_2(-2, 1)$，$P_3(-4, -5)$，$P_4(5, -6)$，试问角 α_1，α_2，α_3，α_4 分别是第几象限的角？

2. $\frac{19\pi}{6}$ 和 $\frac{25\pi}{6}$ 的角分别是第几象限的角？

3. 把下列各角化成 $0\sim2\pi$ 的角加上 $2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 的形式.

(1) $-\frac{25\pi}{6}$；　　(2) -5π；

(3) -64°；　　(4) 400°.

4. 航海罗盘将圆周分为 32 等份，把每一等份所对圆心角的大小，分别用度与弧度表示出来.
5. 某飞轮直径为 1.2 m，每分钟按逆时针方向旋转 300 圈，求：
   (1) 飞轮每分钟转过的弧度数；
   (2) 轮周上的一点每秒钟经过的弧长.
6. 要在半径 $OA = 100$ cm 的圆形板上，截取一块扇形板，使它的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 112 cm，问截取的圆心角 $\angle AOB$ 的度数是多少？（精确到 1°）
7. 地球赤道的半径是 6 370 km，问赤道上 1°的弧长是多少？
8. 已知圆的半径为 R，求弧长为 $\frac{3}{4}R$ 的圆弧所对的圆心角是多少度？
9. 分别写出第一、第二、第三、第四象限角的集合（用弧度表示）.
10. 已知长为 50 cm 的弧所对的圆心角为 $\frac{10\pi}{9}$，求这条弧所在圆的半径（精确到 1 cm）.
11. 圆的半径为 240 mm，求这个圆上长为 500 mm 的弧所对的圆心角的度数？
12. 已知长为 50 cm 的弧为 200°，求这条弧所在圆的半径（精确到 1 cm）.

5.2 任意角的三角函数

5.2.1 任意角三角函数的定义

1. 任意角三角函数的定义

在初中，通过相似直角三角形的讨论，我们知道给定了一个锐角，分别唯一确定了这个角的正弦、余弦和正切的值，这就说正弦、余弦和正切都是锐角的函数．锐角的正弦、余弦和正切函数，统称为**锐角三角函数**．

问题 1 当我们把锐角的概念推广为转角后，我们如何定义任意角的三角函数呢？

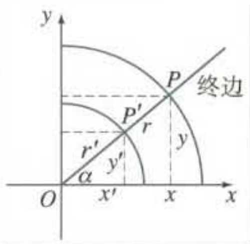


图 5-11

如图 5-11 所示，已知任意角 α，以角 α 的顶点 O 为坐标原点，以角 α 的始边的方向作为 x 轴的正方向，建立直角坐标系 xOy，并且使 $\angle xOy=90°$．

以 O 为圆心，任作两个大小不同的同心圆与角 α 的终边交于点 $P(x,y)$，$P'(x',y')$，设 $r=OP$，$r'=OP'$，由相似三角形对应边成比例，得

$$\frac{|x|}{r}=\frac{|x'|}{r'},\quad \frac{|y|}{r}=\frac{|y'|}{r'},\quad \frac{|y|}{|x|}=\frac{|y'|}{|x'|},$$

由于 P，P' 在同一象限内，所以它们的坐标符号相同．因此得

$$\frac{x}{r}=\frac{x'}{r'},\quad \frac{y}{r}=\frac{y'}{r'},\quad \frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}.$$

所以当 α 不变时，这三个比值 $\frac{x}{r}$，$\frac{y}{r}$，$\frac{y}{x}$，不论点 P 在 α 的终边上的位置如何，它们都是定值，只依赖于 α 的大小，与点 P 在 α 终边上的位置无关．即当点 P 在 α

的终边上变化时，这三个比值始终等于定值. 因此我们定义：

$\frac{x}{r}$ 叫做角 α 的**余弦**，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

$\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的**正弦**，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

$\frac{y}{x}$ 叫做角 α 的**正切**，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

其中，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 依照上述定义，对于每一个确定的角 α，都分别有唯一确定的余弦值、正弦值、正切值与之对应，所以这三个对应关系都是以 α 为自变量的函数，分别叫做角 α 的**余弦函数**、**正弦函数**和**正切函数**.

由图 5-11 可以看出，当 α 为锐角时，上述所定义的三角函数，与在直角三角形中所定义的三角函数是一致的.

知识延伸

有时我们还用到下面三个函数：

角 α 的**正割**：$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{r}{x}$；

角 α 的**余割**：$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{r}{y}$；

角 α 的**余切**：$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{x}{y}$.

这就是说，$\sec\alpha$，$\csc\alpha$，$\cot\alpha$ 分别是 α 的余弦、正弦和正切的倒数.

对 $\tan\alpha$，$\sec\alpha$ 这两个函数，当 α 的终边在 y 轴上，即 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，没有意义；对 $\cot\alpha$，$\csc\alpha$ 这两个函数，当 α 的终边在 x 轴上，即 $\alpha=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，没有意义.

2. 三角函数求值

问题 2 任给一个角，我们如何求出它的三角函数值呢?

根据角的正弦、余弦和正切函数的定义，只要知道

该角终边上一点的坐标，我们就可求出该角的各三角函数值. 由此，可得到计算三角函数值的步骤：

S1 在直角坐标系 xOy 中，作转角等于 α；
S2 在 α 的终边上任找一点 P，使 $|OP|=1$，并量出该点的纵坐标和横坐标；
S3 根据相应三角函数的定义，求该三角函数的值.

这种算法，由于度量角和线段的长度都有误差，所以求出的三角函数值也会有误差. 为了减小误差，我们可把单位长取得长一些. 为了巩固上面学习的三角函数的定义，同学们不妨自己动手在直角坐标系中，求 30°，38°，128°等角的正弦、余弦和正切的值.

在历史上，数学家已找到各种计算三角函数值的算法. 早期制作出了三角函数表. 现代已把算法固化在计算器中，在计算器中输入一个角的值，立刻就会算出它的三角函数值.

例1 已知角 α 终边上一点 $P(2,-3)$，求角 α 的三个三角函数值（图 5-12）.

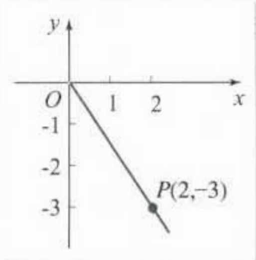


图 5-12

解 已知 $P(2,-3)$，则

$$r=|OP|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}.$$

由三角函数的定义，得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13};$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}.$$

例2 试确定三角函数在各象限的符号.

解 由三角函数的定义可知，角 α 终边上一点的纵坐标 y 和横坐标 x 的正、负分别与 α 的正弦函数值和余弦函数值同号. $\tan\alpha=\frac{y}{x}$，当 x 与 y 同号时，它们的比值为正，当 x 与 y 异号时，它们的比值为负，即当 α 为

第一、三象限的角时，$\tan\alpha>0$，当 α 为第二、四象限的角时，$\tan\alpha<0$.

以上结果，如图 5-13 所示.

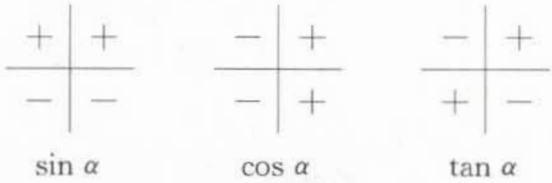


图 5-13

例3 使用函数型计算器，计算下列三角函数值：

(1) $\sin 67.5°$，$\cos 372°$，$\tan(-86°)$；

(2) $\sin 1.2$，$\cos\frac{3\pi}{4}$，$\tan\frac{5\pi}{6}$.

解 按键 $\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}$ 1 4

(1) 按键 $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$

按键	显示
$\boxed{\sin}$ 67.5 $\boxed{=}$	0.9239
$\boxed{\cos}$ 372 $\boxed{=}$	0.9781
$\boxed{\tan}$ $\boxed{(-)}$ 86 $\boxed{=}$	−14.3007

所以，$\sin 67.5°\approx 0.923\ 9$，$\cos 372°\approx 0.978\ 1$，$\tan(-86°)\approx -14.300\ 7$；

(2) 按键 $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 2

按键	显示
$\boxed{\sin}$ 1.2 $\boxed{=}$	0.9320
$\boxed{\cos}$ 3 $\boxed{\text{a b/c}}$ 4 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{EXP}}\boxed{=}$	−0.7071
$\boxed{\tan}$ 5 $\boxed{\text{a b/c}}$ 6 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{EXP}}\boxed{=}$	−0.5774

所以，$\sin 1.2\approx 0.932\ 0$，$\cos\frac{3\pi}{4}\approx -0.707\ 1$，

$\tan\frac{5\pi}{6}\approx -0.577\ 4$.

3. 单位圆与三角函数线

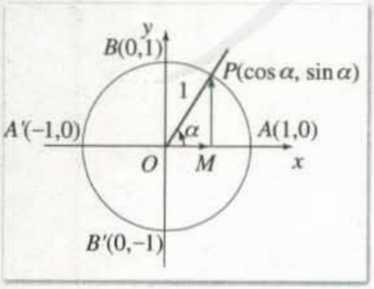


图 5-14

下面我们来看一些三角函数的几何表示.

如图 5-14，以原点为圆心，半径为 1 作圆，这样的

圆称作**单位圆**. 单位圆与 x 轴的交点分别为 $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$, 与 y 轴的交点分别为 $B(0, 1)$, $B'(0, -1)$. 设角 α 的顶点在圆心 O, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边与单位圆相交于点 P, 过点 P 作 PM 垂直 x 轴于 M, 则由三角函数的定义可知, 点 P 的坐标 x, y 分别为 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, 即 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

我们把线段 MP, OM 都看作是规定了方向的线段, 当它们的方向分别与坐标轴相同时, 规定 MP, OM 为正; 反之, 为负. 这样, MP 与点 P 的纵坐标符号相同, 且 MP 的长度等于 $|y|$, OM 与点 P 的横坐标符号相同, 且 OM 的长度等于 $|x|$. 所以

$$\cos\alpha=x=OM,\ \sin\alpha=y=MP.$$

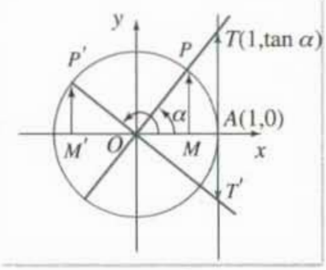


图 5-15

我们把规定了方向的线段 OM, MP 分别称做 α 的**余弦线**、**正弦线**.

设单位圆在点 A 的切线与 α 的终边或其反向延长线相交于点 T (T') (图 5-15), 则

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}\left(\frac{M'P'}{OM'}\right)=\frac{AT}{OA}\left(\frac{AT'}{OA}\right)=AT\ (AT').$$

AT (AT') 称做 α 的**正切线**.

练习

A组

1. 已知点 P 在角 α 的终边上, 求角 α 的六个三角函数:

(1) $P(\sqrt{3}, 1)$; (2) $P(2, 2)$;

(3) $P(2, 2\sqrt{3})$; (4) $P(-1, \sqrt{3})$;

(5) $P(-3, 3)$; (6) $P(-3\sqrt{3}, 3)$;

(7) $P(-\sqrt{3}, -1)$; (8) $P(1, -1)$.

2. 在直角坐标系的单位圆中, 分别画出 120° 和 -30° 的正弦线、余弦线和正切线.
3. 利用角终边上的坐标, 求 $\sin 48^\circ$ 和 $\cos 132^\circ$ 的近似值 (精确到 0.1).
4. 已知角 α 终边上一点 $P(0, 1)$, 求角 α 的正弦函数值和余弦函数值.

5. 已知角 α 终边上一点 $P(3, 0)$，求角 α 的正弦函数值和余弦函数值.

6. 使用函数型计算器，求下列各三角函数值：

(1) $\sin 380^\circ 21'$；　　(2) $\cos 420^\circ 10'$；

(3) $\tan(-34^\circ)$；　　(4) $\tan(-373^\circ 13')$.

B组

1. 已知角 α 的终边在直线 $y=3x$ 上，并且是第三象限的角，在角的终边上任取三点，并写出三点的坐标，根据三角函数的定义，验证角 α 的正弦函数值相等.

2. 已知 P 为第四象限的角 α 终边上一点，且其横坐标 $x=8$，$|OP|=17$，求角 α 的三角函数值.

3. 已知角 α 是第二象限的角，并且终边在直线 $y=-x$ 上，求角 α 的正弦函数和余弦函数值.

4. 使用函数型计算器计算：

(1) $\sin \frac{35\pi}{6}+\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$；

(2) $3\cos 365^\circ-4\cos 355^\circ+\tan 337^\circ$（精确到百分位）.

5.2.2 同角三角函数的基本关系式

在单位圆中，由三角函数的定义和勾股定理（图 5-16），可得

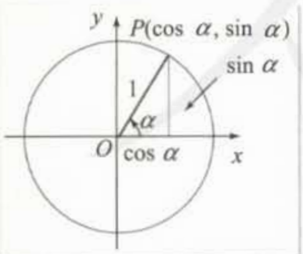


图 5-16

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

这两个关系式是三角函数中最基本的关系式. 当我们知道一个角的三角函数值时，利用这两个关系式和三角函数的定义，就可求出这个角的另外的三角函数值. 此外，还可以用它们化简三角函数式和证明三角恒等式.

例1 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限的角，求角 α 的余弦和正切值.

解 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

因为 α 是第二象限的角，$\cos\alpha<0$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$，

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

例2 已知 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$，且 α 是第二象限的角，求角 α 的正弦和余弦值.

解 由题意，得

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 & ①\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{5} & ②\end{cases}$$

由②得

$$\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha, \quad ③$$

代入①整理得

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{6}.$$

因为 α 是第二象限的角，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6}$，代入③式得

$$\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha=-\sqrt{5}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

例3 化简 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\tan\theta-1}$.

解 原式 $=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}}=\cos\theta.$

例4 求证：

(1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1$；

(2) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$；

(3) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

证明 (1) 原式左边 $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$

$=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

$=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)$

$=2\sin^2\alpha-1$

$=$ 右边，

所以 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1$；

(2) 原式右边 $=\tan^2\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$=\tan^2\alpha-\tan^2\alpha\cos^2\alpha=$ 左边，

所以 $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$；

(3) 因为 $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}-\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\dfrac{\cos^2x-(1-\sin^2x)}{(1-\sin x)\cos x}$

$=\dfrac{\cos^2x-\cos^2x}{(1-\sin x)\cos x}$

$=0$，

所以 $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

从例 4 可以看出，证明一个三角等式，可以从它的任一边开始，推出它等于另一边；也可以用作差法证明等式两边的差等于 0.

练习

A 组

1. 根据下列条件，求角 α 的其他三角函数值：

(1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，且 α 是第一象限的角；

(2) $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$，且 α 是第三象限的角；

(3) $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第四象限的角；

(4) $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，且 α 是第二象限的角.

2. 化简：

(1) $\cos\theta\tan\theta$；

(2) $(1-\sin x)(1+\sin x)$.

3. 求证：$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

B 组

1. 化简：$\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$.

2. 已知 $\tan\alpha=-4$，求下列各式的值：

(1) $\sin^2\alpha$； (2) $3\sin\alpha\cos\alpha$；

(3) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$； (4) $1-2\cos^2\alpha$.

3. 已知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，求 θ 的其他三角函数值.

5.2.3 诱导公式

在初中，我们已会求锐角三角函数值. 这节我们将研究任意角的三角函数与锐角三角函数间的某些关系，以及如何求任意角的三角函数值.

1. 角 α 与 $\alpha+k\cdot2\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 的三角函数间的关系

在直角坐标系中，α 与 $\alpha+k\cdot2\pi$($k\in\mathbf{Z}$) 的终边相同，根据三角函数的定义，它们的三角函数值相等. 即

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+k\cdot2\pi)=\sin\alpha;\\&\cos(\alpha+k\cdot2\pi)=\cos\alpha;\\&\tan(\alpha+k\cdot2\pi)=\tan\alpha.\end{aligned}\quad(k\in\mathbf{Z})\qquad ①$$

利用上述公式①，我们可把任意角的三角函数问题转化为研究 $0\sim2\pi$ 之间的角的三角函数问题.

例1 求下列各三角函数的值：

(1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}$； (2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}$； (3) $\tan405°$.

解 (1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+6\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；

(2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+6\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\tan 405^\circ=\tan(45^\circ+360^\circ)=\tan 45^\circ=1$.

2. 角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的关系

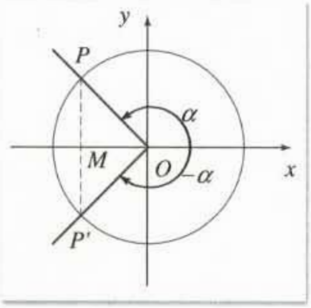


图 5-17

如图 5-17 所示. 设单位圆与角 α、角 $-\alpha$ 的终边的交点分别为 P 和 P'. 容易看出，点 P 和点 P' 关于 x 轴对称. 已知点 P 的坐标是 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则 P' 的坐标是 $(\cos\alpha,-\sin\alpha)$. 于是，得

$$\begin{aligned}&\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;\\&\cos(-\alpha)=\cos\alpha;\\&\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.\end{aligned}\qquad ②$$

利用公式②，任意负角的三角函数都可用正角的三角函数表示.

例2 求下列各三角函数的值：

(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$； (2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(3) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$； (4) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$.

解 (1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$；

(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

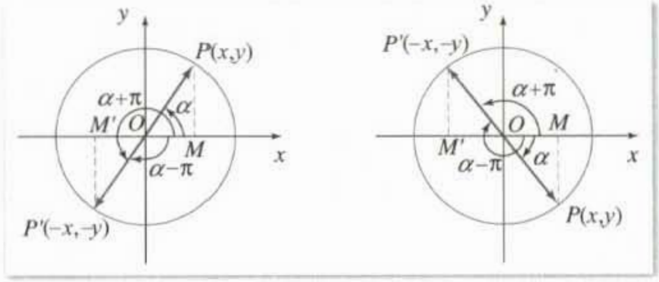
(3) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$；

(4) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{7\pi}{3}=-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)$

$=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 角 α 与 $\alpha\pm\pi$ 的三角函数间的关系

设角 α 与 $\alpha\pm\pi$ 的终边与单位圆分别交于点 P 和 P'（图 5-18）. 容易看出，点 P 与点 P' 关于原点对称，它



（1）　　　　　　（2）

图 5-18

们的对应坐标互为相反数，所以

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha\pm\pi)=-\sin\alpha;\\&\cos(\alpha\pm\pi)=-\cos\alpha;\\&\tan(\alpha\pm\pi)=\tan\alpha.\end{aligned}}\qquad ③$$

公式①②③都叫做**诱导公式**.

利用诱导公式可求三角函数式的值或化简三角函数式.

由诱导公式②和③，我们可得到两个互为补角的三角函数的关系（图 5-19）. α 与 $\pi-\alpha$ 两角互补，则

$$\sin(-\alpha+\pi)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha+\pi)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha.$$

即 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

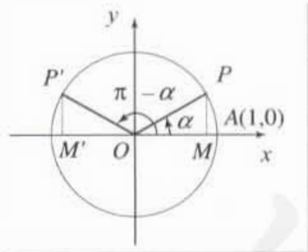


图 5-19

这就是说，**互为补角的两个角的正弦值相等，余弦值互为相反数**. 例如，

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

结合课件 501 学习 α 与 $\pi-\alpha$ 的公式.

例3 求下列各三角函数的值：

(1) $\sin\frac{4\pi}{3}$；　　(2) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$；

(3) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$；　　(4) $\sin 930°$.

解 (1) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\frac{8\pi}{3}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2};$$

(3) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=-\tan\frac{10\pi}{3}=-\tan\left(\frac{\pi}{3}+3\pi\right)$

$$=-\tan\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3};$$

(4) $\sin 930°=\sin(30°+5\times180°)=\sin(30°+180°)$

$$=-\sin 30°=-\frac{1}{2}.$$

例4 求下列各三角函数的值：

(1) $\sin\left(-\frac{55\pi}{6}\right)$；　　(2) $\cos\frac{11\pi}{4}$；

(3) $\tan\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$；　　(4) $\sin 870°$.

解 (1) $\sin\left(-\frac{55\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+9\pi\right)$

$$=-\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2};$$

(2) $\cos\frac{11\pi}{4}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+3\pi\right)$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

(3) $\tan\left(-\dfrac{14\pi}{3}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-5\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$；

(4) $\sin 870^\circ=\sin(-30^\circ+5\times180^\circ)$

$=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}.$

当遇到 $k\pi-\alpha$ 形式的角时，把它看作 $(-\alpha)+k\pi$，再用诱导公式.

例5 化简：

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\tan(\alpha+\pi)\tan(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\tan(3\pi-\alpha)}.$$

解 原式 $=\dfrac{\sin(-\alpha)\tan\alpha\tan(-\alpha)}{-\cos\alpha\tan(-\alpha)}$

$=\dfrac{-\sin\alpha\tan\alpha(-\tan\alpha)}{-\cos\alpha(-\tan\alpha)}$

$=\tan\alpha\tan\alpha=\tan^2\alpha.$

练习

A组

1. 求下列各正弦函数值：

(1) $\sin\dfrac{5\pi}{4}$； (2) $\sin\dfrac{19\pi}{6}$；

(3) $\sin\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)$； (4) $\sin(-210^\circ)$.

2. 求下列各余弦函数值：

(1) $\cos\dfrac{31\pi}{6}$； (2) $\cos\dfrac{13\pi}{6}$；

(3) $\cos\left(-\dfrac{79\pi}{6}\right)$； (4) $\cos 135^\circ$.

3. 求下列各正切函数值：

(1) $\tan\dfrac{14\pi}{3}$； (2) $\tan\dfrac{7\pi}{6}$；

(3) $\tan\dfrac{21\pi}{4}$； (4) $\tan(-675^\circ)$.

B组

1. 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\left(-\dfrac{43\pi}{6}\right)$；　(2) $\cos\left(-\dfrac{83\pi}{6}\right)$；

(3) $\tan\left(-\dfrac{35\pi}{3}\right)$；　(4) $\tan\left(-\dfrac{41\pi}{3}\right)$.

2. 化简：

(1) $\dfrac{\cos(\alpha-\pi)\tan(\alpha-2\pi)\tan(2\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}$；

(2) $\sin^2(-\alpha)-\tan(360^\circ-\alpha)\tan(-\alpha)-$
$\sin(180^\circ-\alpha)\cos(360^\circ-\alpha)\tan(180^\circ+\alpha)$.

习　题

1. 计算：

(1) $5\sin\dfrac{\pi}{2}+2\cos 0-3\sin\dfrac{3\pi}{2}+10\cos\pi$；

(2) $7\cos 270^\circ+12\sin 0^\circ+2\tan 0^\circ-8\cos 180^\circ$；

(3) $\cos\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{4}\tan^2\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{3\pi}{2}$；

(4) $a^2\cos 2\pi-b^2\sin\dfrac{3\pi}{2}+ab\sin\dfrac{\pi}{2}$.

2. 确定下列三角函数的符号，然后使用函数计算器计算：

(1) $\tan 505^\circ$；　(2) $\sin 7.6\pi$；

(3) $\tan\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$；　(4) $\cos\left(-\dfrac{11}{4}\pi\right)$.

3. 根据下列条件，求角 α 的其他三角函数值：

(1) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 是第四象限的角；

(2) $\tan\alpha=-3$，且 α 是第二象限的角；

(3) $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，且 α 是第四象限的角；

(4) $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，且 α 是第三象限的角 .

4. 设 α 是三角形的一个内角，在 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 中，哪些可能取负值？

5. (1) 已知 $\tan\alpha=3,\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，求 $\cos\alpha-\sin\alpha$；

(2) 已知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，求 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

6. 证明下列恒等式：

(1) $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$；

(2) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$；

(3) $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$；

(4) $1+\tan^2\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$；

(5) $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

7. 化简下列各式：

(1) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^4\alpha$；

(2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$.

8. 已知 $\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

(1) $\cos^2\alpha$；

(2) $\sin\alpha\cos\alpha$；

(3) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；

(4) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

9. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$，求下列各式的值：

(1) $5\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$；

(2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$；

(3) $3\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$；

(4) $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$.

10. 化简：

(1) $\dfrac{\sin(-\alpha+180^\circ)-\tan(-\alpha)+\tan(-\alpha+360^\circ)}{\tan(\alpha+180^\circ)+\cos(-\alpha)+\cos(\alpha+180^\circ)}$；

(2) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\pi)\cos(-\alpha+\pi)}{\tan(\alpha+\pi)\tan(\alpha+2\pi)\cos^3(-\alpha-\pi)}$.

5.3 三角函数的图象和性质

5.3.1 正弦函数的图象和性质

> 结合课件 502 学习正弦函数的图象.

根据正弦函数的定义，任意给定一个角 α，唯一确定一个正弦值 $\sin\alpha$．习惯上，我们用 x 表示角 α 的弧度数（自变量），y 表示因变量．于是正弦函数可记作

$$y=\sin x,\ x\in\mathbf{R},$$

其中 x 表示角的弧度值．函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

1．正弦函数的图象

下面我们利用单位圆中的正弦线，来作正弦函数的图象.

在直角坐标系的 x 轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心作单位圆（图 5-20），从这个圆与 x 轴的交点 A 起，把

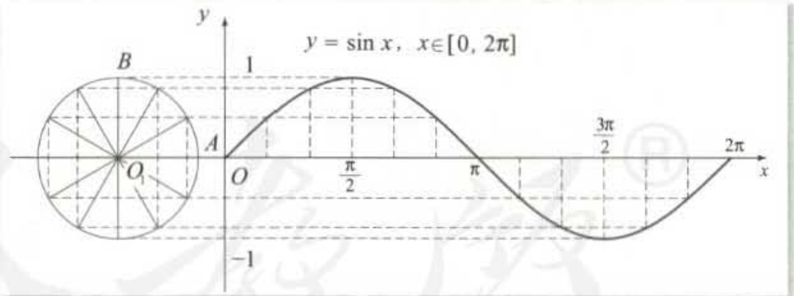


图 5-20

圆分为 12 等份（等份越多，作出的图象越精确）．过圆上各分点分别作 x 轴的垂线，可以得到弧度为 0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，2π 的角的正弦线（例如 O_1B 是角 $\frac{\pi}{2}$ 的正弦

线）. 相应地，再把 x 轴上 $0\sim 2\pi$ 这一段（取 $2\pi\approx 6.28$）分成 12 等份，每个分点分别对应于 $x=0$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$，…，2π，分别过这些分点作这些弧度数对应的正弦线，再用光滑的曲线把这些正弦线的终点连接起来，就得到正弦函数

$$y=\sin x,\ x\in[0,\ 2\pi]$$

的图象.

由于弧度值为 $x+k\cdot 2\pi$ 的角与弧度值为 x 角的终边相同，所以它们的正弦值相等，即

$$\sin(x+k\cdot 2\pi)=\sin x,\ k\in\mathbf{Z},$$

所以正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x\in[-2\pi,\ 0]$，$x\in[2\pi,\ 4\pi]$，$x\in[4\pi,\ 6\pi]$……时的图象与 $x\in[0,\ 2\pi]$ 的形状完全一样，只是位置不同，因此我们把 $y=\sin x$ 在 $x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象，沿 x 轴平移 $\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，…，就可得到 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象（图 5-21）.

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做**正弦曲线**.

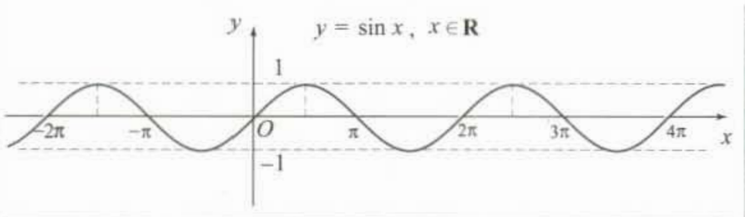


图 5-21

由图 5-21，可以看出下面五点：

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0),$$

在确定图象形状时起着关键的作用. 这五点描出后，正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象的形状基本上就确定了.

因此，在精确度要求不太高时，我们常常先描出这关键的五个点，然后用光滑曲线将它们连接起来，就得到相应区间内的正弦函数的简图.

今后，我们作正弦函数的简图，一般都可以像这样先找出确定图象形状的关键的五个点，然后描点作图. 这种作图方法叫做**五点法**.

2. 正弦函数的性质

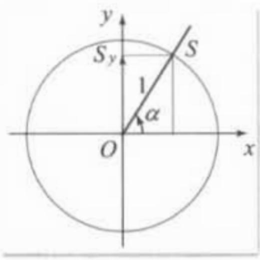


图 5-22

观察单位圆中的正弦线（图 5-22）或正弦函数的图象，我们很容易得出正弦函数的如下性质：

(1) 值域

因为在单位圆中，正弦线的长都小于或等于半径的长 1，所以 $|\sin x| \leqslant 1$，即 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. 这就是说，正弦函数的值域是闭区间 $[-1, 1]$.

函数 $y = \sin x$，在 $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ 取最大值 1，在 $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ 取最小值 -1.

(2) 周期性

因为

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x\ (k \in \mathbf{Z}),$$

所以每个正弦函数值每隔 2π 将重复出现.

一般地，对于函数 $y = f(x)$，如果存在一个不为 0 的常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，有

$$f(x + T) = f(x)$$

都成立，则就把函数 $y = f(x)$ 叫做**周期函数**，这个不为 0 的常数 T，叫做这个函数的**周期**.

例如，对于正弦函数 $y = \sin x\ (x \in \mathbf{R})$，$2\pi$，$4\pi$，…，$-2\pi$，$-4\pi$，…，都是它的周期. 对于一个周期函数来说，如果在所有的周期中，存在着一个最小的正数，就把这个最小的正数叫做**最小正周期**. 例如，2π 是正弦函数 $y = \sin x$ 的最小正周期.

正弦函数 $y = \sin x$，$x \in \mathbf{R}$ 是周期函数，$2k\pi\ (k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0)$ 都是它的周期，2π 是它的最小正周期. 以后我们说到三角函数的周期，一般指的都是最小正周期.

(3) 奇偶性

由于 $\sin(-x) = -\sin x$，

由奇函数的定义可知，正弦函数

$$y=\sin x,\ x\in\mathbf{R}$$

是奇函数.

反映在正弦函数的图象上，它的图象关于坐标原点对称.

(4) 单调性

由单位圆的正弦线可以看出，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 由 -1 增加到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 由 1 减小到 -1. 这种变化情况如下表所示：

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

由正弦函数的周期性可知：

正弦函数 $y=\sin x$，在每一个闭区间

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$$

上，都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$$

上，都从 1 减小到 -1，是减函数.

例1 作函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的简图.

解 列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点作图（图 5-23）：

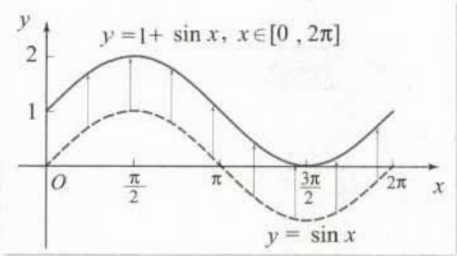


图 5-23

例2 求使函数 $y=2+\sin x$ 取最大值、最小值的 x 值的集合，并求这个函数的最大值、最小值和周期.

解 因为使函数 $y=\sin x$ 分别取最大值与最小值的 x，就是使函数 $y=2+\sin x$ 分别取最大值、最小值的 x，所以函数 $y=2+\sin x$ 取最大值、最小值的 x 的集合分别是：

$$\left\{x \middle| x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\},\ \left\{x \middle| x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

且
$$y_{\max}=2+(\sin x)_{\max}=2+1=3,$$
$$y_{\min}=2+(\sin x)_{\min}=2-1=1.$$

函数 $y=2+\sin x$ 与 $y=\sin x$ 的周期相同，周期是 2π.

例3 不求值，比较下列各对正弦值的大小：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$ 与 $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$；

(2) $\sin\frac{2\pi}{3}$ 与 $\sin\frac{3\pi}{4}$.

解 (1) 因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<0$，且正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right);$$

(2) 因为 $\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$，且正弦函数在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减函数，所以 $\sin\frac{2\pi}{3}>\sin\frac{3\pi}{4}$.

练习

A组

1. 求下列各函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=3+\sin x$；　　(2) $y=3-\sin x$；

(3) $y=-8+\sin x$；　　(4) $y=-8-\sin x$.

2. 求使 $y=5-\sin x$ 分别取最大值及最小值的 x 的集合.

3. 不求值，比较下列各题中两个正弦值的大小：

(1) $\sin 250°$ 与 $\sin 260°$；

(2) $\sin\left(-\dfrac{54\pi}{7}\right)$与 $\sin\left(-\dfrac{63\pi}{8}\right)$.

4. 利用单位圆中的正弦线，作 $y=\sin x$，$x\in[-\pi,\pi]$ 的图象.

5. 分别作函数 $y=\sin x-1$，$y=-\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的简图.

B组

1. 观察正弦曲线，写出满足下列条件的 x 所在区间：

(1) $\sin x>0$；　　(2) $\sin x<0$；

(3) $\sin x>\dfrac{1}{2}$；　　(4) $\sin x<-\dfrac{1}{2}$.

2. 作函数 $y=2\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象.

3. 说明函数 $y=\sin x$ 与 $y=-\sin x$，$y=3+\sin x$ 图象间的关系.

5.3.2 余弦函数的图象和性质

根据余弦函数的定义，任给定一个角 α，唯一确定一个余弦值 $\cos\alpha$. 习惯上，我们用 x 表示角 α 的弧度数（自变量），y 表示因变量，则余弦函数表示为

$$y=\cos x,\ x\in\mathbf{R}.$$

根据三角函数求值和角 $x+k\cdot 2\pi$ 与角 x 的余弦值相等，我们可作出余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图.

先选五个特殊的自变量的值：0，$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3\pi}{2}$，2π，

求余弦函数值，列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

描点作图，再沿 x 轴向左、右平移 2π，4π，…，就可得到 $y = \cos x$ 的图象，如图 5-24 所示.

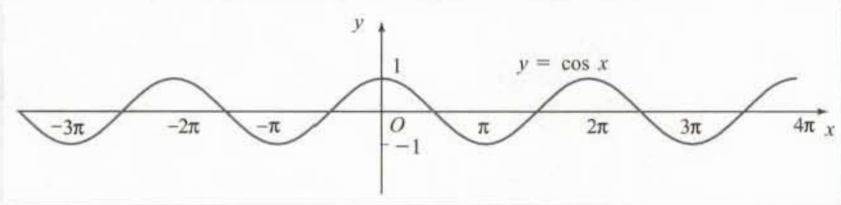


图 5-24

余弦函数的图象叫做**余弦曲线**.

余弦曲线关于 y 轴对称，它是轴对称图形.

探索与研究

从图表中，我们可看到 x 的余弦值与 $x+\frac{\pi}{2}$ 的正弦值相等. 即

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x, \qquad (*)$$

可以证明，这个结论对任意 x 值都成立. 因此余弦函数的图象可由正弦函数 $y = \sin x$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位而得到（图 5-25).

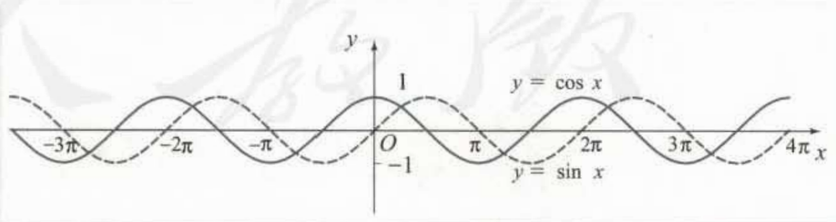


图 5-25

上面的（*）式，比正弦函数和余弦函数的平方关系，更确切的表达了这两个函数之间的关系. 正弦函数

的取值，只是比余弦函数取相同值滞后了 $\frac{\pi}{2}$，其他性质基本相同.

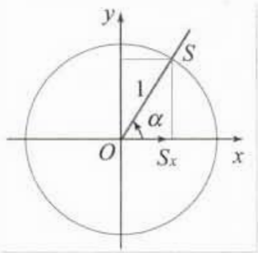


图 5-26

考察单位圆中的余弦线（图 5-26）或余弦函数的图象，可得到余弦函数有如下性质：

（1）值域

余弦函数的值域是闭区间 $[-1,1]$.

当　$x=2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$；

　　$x=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$.

（2）周期性

余弦函数的周期是 2π.

（3）奇偶性

由于 $$\cos(-x)=\cos x,$$
所以余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 是偶函数.

（4）单调性

函数 $y=\cos x$ 在每一个闭区间 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都从 1 减小到 -1，是减函数.

例1 求下列函数的最大值、最小值和周期 T：

（1）$y=5\cos x$；　　（2）$y=-8\cos(-x)$.

解 （1）$y_{\max}=5$，$y_{\min}=-5$，$T=2\pi$；

（2）$y_{\max}=8$，$y_{\min}=-8$，$T=2\pi$.

例2 不求值，比较下列各对余弦值的大小：

（1）$\cos\frac{5\pi}{4}$ 和 $\cos\frac{7\pi}{5}$；

（2）$\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$ 和 $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$.

解 （1）因为 $\pi<\frac{5\pi}{4}<\frac{7\pi}{5}<2\pi$，且函数 $y=\cos x$ 在区间 $[\pi,2\pi]$ 上是增函数，所以
$$\cos\frac{5\pi}{4}<\cos\frac{7\pi}{5};$$
（2）因为余弦函数是偶函数，所以

$$\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)=\cos\frac{23\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5},$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=\cos\frac{17\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}.$$

又因为 $0<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{5}<\pi$，且函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上是减函数，所以 $\cos\frac{3\pi}{5}<\cos\frac{\pi}{4}$. 即

$$\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)<\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right).$$

练习

A 组

1. 求下列各函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=2\cos x$；　　(2) $y=-5\cos(-x)$.

2. 在长度为一个周期的闭区间上，作下列函数的简图：

(1) $y=1+\cos x$；　　(2) $y=2\cos x$.

3. 叙述余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的增减性.

B 组

1. 不查表，比较下列各对余弦值的大小：

(1) $\cos 515^\circ$ 和 $\cos 530^\circ$；　　(2) $\cos\frac{15\pi}{8}$ 和 $\cos\frac{14\pi}{9}$；

(3) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ 和 $\cos\left(-\frac{31\pi}{7}\right)$.

2. 余弦函数和正弦函数存在怎样的关系？

5.3.3 已知三角函数值求角

问题 已知任意一个角，可以求出它的三角函数值（角必须属于这个函数的定义域）；反过来，如果已知一个角的三角函数值，怎样求出它对应的角呢？

1. 已知正弦值，求角

例1 已知 $\sin x=\frac{1}{2}$，且 $x\in[0,\ 2\pi)$，求 x 的取值集合.

解　由于 $\sin x=\frac{1}{2}$，所以 x 是第一或第二象限的角（图 5-27），由

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

可知符合条件的第一象限的角是 $\frac{\pi}{6}$. 又由

$$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

可知，符合条件的第二象限的角是 $\frac{5\pi}{6}$.

于是所求的角 x 的取值集合为

$$\left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

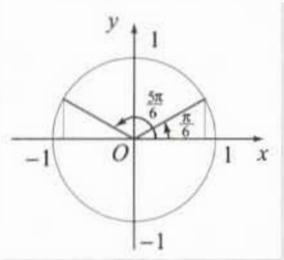


图 5-27

知识延伸

由上例可看到函数 $y=\sin x$，在区间 $[0,\ 2\pi)$ 上，对 $y\in(-1,1)$ 的任一个值，有两个角 x 值与之对应，如果考察自变量 x 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上取值，那么对 $y\in[-1,\ 1]$ 的任一个值 a，有无穷多个 x 值与之对应. 如果我们限定 x 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上取值，则由于正弦函数在此区间上单调上升，所以对 $y\in[-1,\ 1]$ 的任一个值 a，x 只有唯一值与之对应. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，符合条件 $\sin x=a(-1\leqslant a\leqslant 1)$ 的角 x 叫做实数 a 的**反正弦**，并记作 $\arcsin a$，即 $x=\arcsin a$，$a\in[-1,1]$.

使用反正弦记号，例 1 方程的解集可以写成

$$\left\{\arcsin\frac{1}{2}\ ,\ \pi-\arcsin\frac{1}{2}\right\}.$$

例2 已知角 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，求满足下列各式的 x 的值：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\sin x=-\frac{1}{2}$；

(4) $\sin x=0.267\ 2$.

解 (1) 因为在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $x=\frac{\pi}{3}$；

(2) 因为在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $x=\frac{\pi}{4}$；

(3) 因为在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，

所以 $x=-\frac{\pi}{6}$；

(4) 使用函数型计算器计算，

按键 MODE MODE MODE 1 4

按键 MODE MODE 2

按键	显示
SHIFT sin 0.2672 =	0.2705

又 $0.270\ 5\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $x\approx 0.270\ 5$.

例3 已知 $\sin x=-0.215\ 6$，且 $-180^\circ\leqslant x<180^\circ$，求 x.

解 因为 $\sin x=-0.215\ 6$，所以 x 是第三或第四象限的角.

先求符合条件

$$\sin x = 0.215\,6$$

的锐角 x，使用函数型计算器计算，

按键 $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 1 4

按键 $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$

按键	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.2156 $\boxed{=}$	12.4507

得

$$x \approx 12°27'.$$

因为 $\sin(-12°27') = -\sin 12°27'$

$= -0.215\,6$，

又因为 $\sin(12°27' - 180°) = -\sin 12°27'$

$= -0.215\,6$，

所以，当 $-180° \leqslant x < 180°$ 时，所求的角分别是 $-12°27'$，$-167°33'$.

2. 已知余弦值、正切值，求角

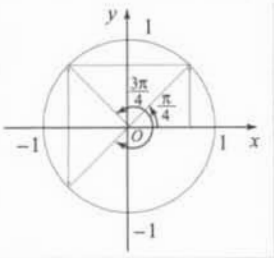


图 5-28

例4 已知 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $x \in [0, 2\pi)$，求 x 的取值集合.

解　由于 x 的余弦值为负，所以 x 是第二或第三象限的角（图 5-28）. 由

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

可知，所求符合条件的第二象限的角 $x = \frac{3\pi}{4}$. 又由

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以在区间 $[0, 2\pi)$ 内符合条件的第三象限的角

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}.$$

所以 x 的取值集合为 $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

知识延伸

由例 4 可看到函数 $y=\cos x$，在区间 $[0, 2\pi)$ 上，对 $y\in(-1, 1)$ 的任一个值，有两个角 x 值与之对应，如果考察自变量 x 在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上取值，那么对 $y\in[-1, 1]$ 的任一个值 a，有无穷多个 x 值与之对应，如果我们限定 x 在区间 $[0, \pi]$ 上取值，那么对 $y\in[-1, 1]$ 的任一个值 a，x 只有唯一值与之对应. 在区间 $[0, \pi]$ 上符合条件 $\cos x=a\ (-1\leqslant a\leqslant 1)$ 的角 x，叫做实数 a 的**反余弦**，并记作 $\arccos a$，即 $x=\arccos a$. 例如

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},\ \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}\text{ 等.}$$

使用反余弦记号，例 4 方程的解集可以写成

$$\left\{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi\right\}.$$

例5 已知 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，求 x 的值.

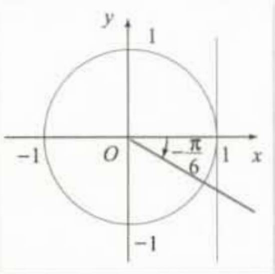


图 5-29

解 由于正切函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数（图 5-29），所以正切值等于 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的角 x 有且只有一个. 由

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

可知所求的角 $x=-\frac{\pi}{6}$.

知识延伸

一般地，如果 $\tan x=a\ (a\in\mathbf{R})$，且 $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，那么对任一实数 a，有且只有一个角 x，使 $\tan x=a$. 符合上述条件的角 x，叫做实数 a 的**反正切**，并记作 $\arctan a$，即 $x=\arctan a$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 例如，

$$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6},\ \arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},\ \arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}\text{ 等.}$$

练 习

A组

1. 求适合下列各式中的 $\alpha(0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ)$：

(1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\sin\alpha=0$；　(4) $\sin\alpha=-1$.

2. 求适合下列各式中的 x $(0 \leqslant x < 2\pi)$：

(1) $\sin x=0.318\,5$；

(2) $\sin x=0.867\,5$；

(3) $\sin x=-0.216\,7$；

(4) $\sin x=-0.901\,8$.

3. 求下列各式中的 $\alpha(-\pi \leqslant \alpha < \pi)$：

(1) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(2) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$；

(3) $\tan\alpha=3.415$；　(4) $\tan\alpha=-1$.

B组

1. 求适合下列条件的 x 的集合：

(1) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in[0, 2\pi]$；

(2) $\cos x=0.5$, $x\in[-\pi, \pi]$；

(3) $\tan x=\sqrt{3}$, $x\in[-\pi, \pi]$.

2*. 求适合下列各式中 x 的集合（用反正弦、反余弦、反正切的记号表示出来）：

(1) $\sin x=0.346\,9$, $x\in[0, 2\pi]$；

(2) $\sin x=-0.857\,2$, $x\in[0, 2\pi]$；

(3) $\tan x=0.8$, $x\in[0, 2\pi]$.

习　题

1. 作出角 $\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{6}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{14\pi}{3}$ 的正弦线、余弦线和正切线.

2. 作出下列函数在 $[0, 2\pi]$ 上的简图：

(1) $y=1-\sin x$；　(2) $y=3\cos x$；

(3) $y=\frac{1}{2}\sin x-1$；　(4) $y=2\cos x+1$.

3. 求下列函数的最大值、最小值，并求使函数取得这些值的 x 的集合：

(1) $y=-5\sin x$；　(2) $y=1-\frac{1}{2}\cos x$.

4. 在下列函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？为什么？

(1) $y=-\sin x$；　(2) $y=|\sin x|$；

(3) $y=3\cos x+1$；　(4) $y=\sin x-1$.

5. 不求值，比较下列各对函数值的大小：

(1) $\sin 103°15'$ 和 $\sin 164°30'$；　(2) $\cos\left(\frac{47\pi}{10}\right)$ 和 $\cos\left(-\frac{44\pi}{9}\right)$；

(3) $\sin 508°$ 和 $\sin 144°$；　(4) $\cos 760°$ 和 $\cos(-770°)$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1+\sin x}$；　(2) $y=\frac{1}{1-\cos x}$.

7. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\sin x}$；　(2) $y=\sqrt{\cos x}$；

(3) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；　(4) $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

8. 已知角 x 满足下列各式，求 x 的值：

(1) $\sin x=0$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；

(2) $\sin x=0.784\,1$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；

(3) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in[0, \pi]$；

(4) $\cos x=0.694\,3$，$x\in[0,\pi]$.

9. 已知角 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，求满足下列各式的 x 的值：

(1) $\tan x=\sqrt{3}$；　　(2) $\tan x=1$；

(3) $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$；　　(4) $\tan x=2.747$.

10*. 用反正弦和反余弦的记号，表示下列各式中的 x：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\sin x=-\frac{1}{4}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $\cos x=\frac{1}{3}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(4) $\cos x-\frac{3}{7}=0\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)$.

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 角的概念是怎样推广的？
2. 什么是度量角的弧度制？
3. 在弧度制下，弧长公式是什么？
4. 六种三角函数是怎样定义的？
5. 什么是单位圆？什么是正弦线、余弦线和正切线？
6. 同角三角函数之间有哪两个基本公式？如何证明它们？
7. 正弦函数、余弦函数有哪些主要性质？
8. 怎样画正弦函数和余弦函数的图象？它们之间有什么关系？
9. 有哪几组诱导公式，它们是怎样推导出来的？
10. 已知三角函数值，如何求指定区间内的角？

阅读材料

亚历山大时期的三角测量

公元前332年，亚历山大征服了埃及. 为了庆祝这个胜利，他在当时称为圣河的尼罗河入海处，建立一座以他的名字命名的城市——亚历山大城，以示纪念. 那时的亚历山大城是世界文化中心，有世界第一的图书馆、博物馆和大学，可惜这样伟大的图书馆也毁于当时的战火. 伟大的数学家欧几里得和伟大的物理学家阿基米德都是这个时期的杰出科学家.

利用三角知识进行天文和地理测量的例子，在亚历山大时期举不胜举. 我们在这里只介绍一下那个时期的三角测量的两个例子.

当时在亚历山大任教的欧几里得已经完成了不朽的巨著《几何原本》，藏于亚历山大城的世界第一的大图书馆中. 图书馆埃拉托塞尼管理员有机会接触到这些文化结晶，他想测量地球的周长. 他发现地球的某一时刻在辛尼地方的一口竖井底可以见到太阳，也就是说太阳恰好在人的头顶上（图1）. 同时在500 n mile外的亚历山大城的太阳光线倾斜角是$7.5°$，恰是周角的$\frac{1}{50}$，这样就可计算出地球周长是$500\times50=25\ 000$ (n mile)，这个数字与现代人测量的赤道长相差不多.

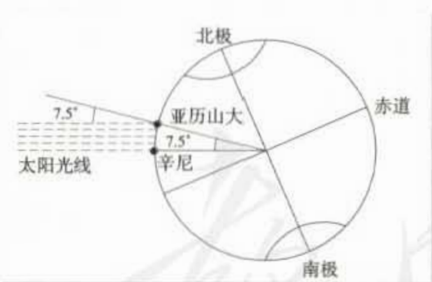


图1

另外一个例子是希帕克斯对地球和月球间距离的测量. 那时没有先进的测量仪器，他假设一个人站在赤道A处看到月亮恰好在他头顶上方的C处（图2)，另一个人站在赤道B处，则看到月亮刚刚升起. 这时BC和圆O相切，构成了$\mathrm{Rt}\triangle OBC$，$\overparen{AB}$所对θ恰为A,B两地的经度差. 希帕克斯测到$\theta=$

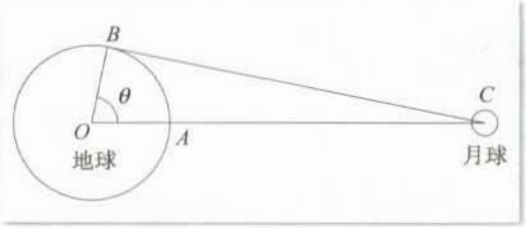


图 2

$\left(89\dfrac{1}{16}\right)^{\circ}$，他利用自己编制的世界第一张正弦函数值表计算，得

$$\sin(90^{\circ}-\theta)=\frac{OB}{OC},$$

$$OC=OB\div\cos\theta=250\ 000\ (\text{n mile}).$$

这个数据与实际值相差并不太大.

古代科学之花无不启迪我们浮想联翩，而古希腊的精美绝伦的天文测量，又是那么淳朴无华. 这一切虽然已经逝去，但我们坚信，数学史上最壮观的日出将属于我们青年人.

附录 1

OpenOffice 电子工作表简介

一、熟悉 OpenOffice 的电子工作表

1. 工作界面

运行 OpenOffice[1] 的电子工作表后，则在屏幕上出现如下画面（图 1），这个画面通常叫做电子工作表的工作窗口.

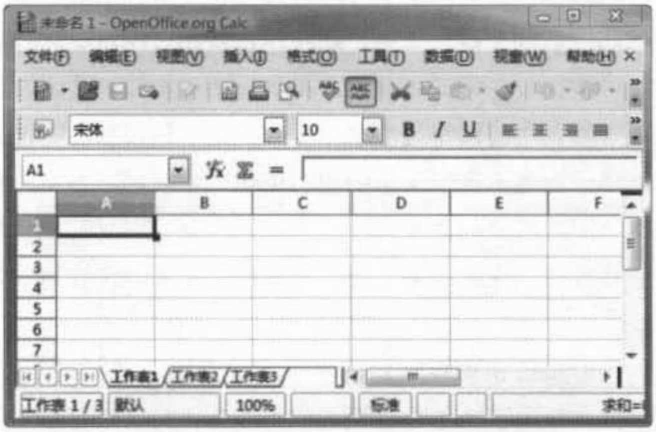


图 1

通过窗口我们可看到大大小小标有文字、数字、图标的长方形（区域）. 这些长方形构成的集合，从功能上大致可分为两类：工作簿和控制按钮. 当鼠标指针指向某一个控制按钮并停留一段时间时，一般按钮下面有文字显示按钮的功能，指针指向按钮后，单击鼠标左键，控制按钮就会作出响应，执行按钮的功能. 同学们不妨试试看.

工作簿位于屏幕中部，是窗口中的最大的一个子集，这个区域内部的每一个长方形区域称做**单元格**，是我们工作表中的最小单元. 工作表最上一行的长方形依次标有 A、B、C、D……用来标明单元格所在的列，工作区域左边一列依次标有 1、2、3、4……表示单元格所在的行. A1 表示位于第 A 列第 1 行的单元格，B5 表示第 B 列第 5 行的单元格，以此类推. 工作区中用黑框标出的单元格，可通过键盘向单元格内输入文字、数字等各种符号，这个单元格叫做**活动单元格**，我们可通过键盘的一组方向键（标有上、下、左、右箭头的一组键）和单击鼠标左键激活选中的单元格. 鼠标指针移向 A、B 之间的竖线按左键不放（指针变为水平线带箭头的十字图标）向左右拖动可改变 A 列的列宽，鼠标指针

---

[1] 可在 OpenOffice 官网下载 OpenOffice 的最新版.

移向1、2之间的横线按左键不放（指针变为竖线带箭头的十字图标）向上下拖动可改变第一行的行高. 一个单元格最多只能输入256个字符，128个汉字. ❶

工作簿下面的一行中标有Sheet1（加亮显示）、Sheet2、Sheet3……分别是工作簿的第1张表、第2张表、第3张表……的名称. 我们在屏幕上看到的仅仅是工作簿的第1张表的很小的一部分. 一个工作簿有多张工作表，每张工作表有256列、16 384行，由乘法运算即共有4 194 304个单元格. 在VGA标准的显示下，我们一次看到的只有9列18行162个单元格，这不到一张表的0.004%. ❷

标题栏 在窗口的顶行. 最左边是窗口**控制菜单按钮**，这一行向右还有标题条（标出文件名称）、窗口最小化、恢复按钮，最右边标有符号“×”的按钮是关闭按钮，单击此按钮，即关闭电子工作表. 如果有任何没有保存的文件，将会提示你保存它们.

菜单栏 它的一些按钮位在窗口第2行，这是电子工作表的主菜单. 在主菜单上，单击任一个按钮，我们还可看到下拉式菜单，通过单击按钮可向电子工作表发出命令.

工具栏 它的一些按钮位在窗口第3行. 工具栏中的按钮与主菜单中的一些按钮执行的功能相同，可以说工具条中的按钮是主菜单中一些最常用按钮的视图化，使你对计算机发出命令更加方便. 你可通过单击主菜单中视图按钮，在它的下拉菜单中通过单击工具栏可对工具栏各项发出显示或隐藏的命令.

格式栏 它的一些按钮位在窗口第4行. 通过格式栏中的按钮可对工作区中的文字发出格式命令.

编辑栏 它的一些窗口按钮位在窗口的第5行. 最左一个按钮显示活动单元格的名称. 第二是一个显示框，当向活动单元格输入字符或公式时，将显示于此框内.

状态栏 位在窗口下面一行，各个按钮用来显示键盘上的Num Lock或Scroll Lock的各种信息和状态. 初学的同学，当你每次进行操作时，看看状态栏显示的信息，会告诉你相关的操作信息.

练习

1. 用鼠标点击各按钮看看各有什么反应.
2. 分别激活单元格A1、A2、A3、B1、B2、B3、C1、C2、C3并向其内输入数字或文字.

2. 基本操作

我们主要是通过敲击键盘按钮、单击或双击鼠标的左、右键向电子工作表发出指令.

---

❶❷ 由于电子工作表版本和计算机的差异，这两处数据会有所不同.

(1) 选取单元格或单元格区域　通过带箭头的方向键可移动活动的单元格，按住 Shift，再按方向键，可选取一个单元格矩形区域. 按住鼠标左键不放，拖动鼠标可选取连续的单元格区域. 按住 Ctrl 键，用鼠标左键单击或拖动可选取不连续的单元格区域.

(2) 对单元格或区域格式化　用鼠标单击菜单栏的格式按钮，在下拉菜单中出现单元格、行、列、工作表……等按钮. 点击这些按钮又会出现新的菜单或对话框，在这些对话框中设置单元格的各种格式，行高、列宽等. 同学们不妨对格式化按钮一个一个地进行操作，学习对单元格或区域格式化的技术.

(3) 复制和粘贴　我们选择好区域后，除使用菜单栏或工具栏中的复制和粘贴按钮外，电子工作表还提供了非常方便的自动拖动复制技术. 如在一个单元格中输入 3，鼠标指针指向该单元格右下角的小黑方块，指针变为黑十字，这时按住左键向下拖动，我们看到 3 已被粘贴到拖动过的单元格. 如在一个单元格中输入 3，在它的下方相邻的单元格输入 5，选中这两个单元格，鼠标指针指向该第二个单元格右下角的小黑方块，指针变为黑十字，这时按住左键向下拖动，我们看到拖动过的单元格依次显示 7，9，11，…，这就是说当我们选中这两个单元格时，计算机自动记住第二个单元格等于第一个单元格加 2，当鼠标向下拖动时，即告诉计算机，下一行的数值等于上一行的数值加 2. 这种自动识别技术，给我们输入数据带来极大的方便.

当我们选取区域进行复制时，选中的区域边界线闪烁，按 Esc 键可取消复制操作，这时边界线停止闪烁.

二、科学计算

1. 电子工作表的算术运算

我们可在任一个单元格内进行各类数值计算.

在电子工作表中，加、减、乘、除、乘方的算符依次为+、−、*、/、^.

在电子工作表中，数的运算规则与数学中的运算规则相同. 其先后次序由高到低依次为：乘方、乘（除）、加（减），连续几个同级运算（除乘方外）按从左到右的顺序进行，乘方则从右到左进行. 用小括号 () 可以改变电子工作表内部的优先级，小括号内的表达式总是先运算. 建议在运算中尽量使用小括号.

例1　计算：$-3^2+5\times6+15\div3$.

在工作表中激活任一个单元格，并向该单元格中键入

$$=-(3^2)+5*6+15/3$$

这个算式同时在显示在公式栏内. 按 Enter 键，则可在这个单元格中给出结果：26.

注　向单元内输入算式必须先输入等号“=”. 否则电子工作表不进行计算.

例2　分数计算：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{2}{15}$.

解　激活任一个单元格，用鼠标点击菜单栏的格式按钮，在下拉菜单中点击单元格，

在随后出现的对话框中，点击数字按钮，在分类栏中选中分数，再在类型栏中选中分母为两位数，最后按确定按钮. 向该单元格中键入

$$=1/3+1/5-2/15$$

这个算式同时显示在公式栏内. 按 Enter 键，则可在这个单元格中给出结果：2/5.

注 在实际工作中，不论我们向单元格内输入的是文字符号还是数值，都有一定的格式要求，在例 2 中要求做分数运算，并且结果要用分数标记，这种要求我们必须告诉计算机，这就是我们在正式计算例 2 前所要做的工作，在单元格的格式栏的对话框中，包括各种各样的“格式”. 其中对数值就有许多格式，例如要求显示的小数点位数等. 同学们不妨对单元格的各种格式作出设置. 然后向单元格中输入信息，看看符合不符合你的要求. 如果在例 2 中不把单元格格式化为分数运算，设置为数值，则结果显示：0.4.

2. 公式计算

例3 设$\triangle ABC$的三边长 $a=3$，$b=4$，$c=6$，$\triangle ABC$的面积为 S. 用公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \left(\text{其中 } p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

求$\triangle ABC$的面积 S.

分析 能进行公式运算是电子工作表的一个最强大功能. 有了这个功能，可以说，一切代数数值运算就不要我们劳心了. 在工作表中如何进行公式计算呢？在例 3 中，我们可在任一个单元格中直接计算，先计算 p. 在任意单元格输入

$$=1/2*(3+4+6)$$

按 Enter 键，则单元格中显示 6.5.

再激活一个单元格，输入

=SQRT(6.5*(6.5−3)*(6.5−4)*(6.5−6))

按 Enter 键，则单元格中显示 5.33.

如果改变三边的值，我们要重复上述计算，这样就比较麻烦. 电子工作表可避免上述重复的操作.

解 在电子工作表工作表 1 内（图 2），分别向单元格 A2、A3、A4、A5、A6 内输入 a，b，c，p，S，向 B2、B3、B4 输入 3，4，6，向 B5 输入公式

=1/2*(B2+B3+B4).

按 Enter 键，则在 B5 中显示 p 值. 在单元格 B6 内输入公式

=SQRT(B5*(B5−B2)*(B5−B3)*(B5−B4))

则在 B6 内显示 S 值.

分别向 B2、B3、B4 输入不同 a，b，c 的值，可看到 B5 的 p 值，B6 中 S 的值也相应的跟着变化.

为了方便使用，可通过对区域或单元格进行格式化，如图 2 所示.

已知三角形的三边长求面积	
a	3.0000
b	4.0000
c	6.0000
p	6.5000
S	5.3327

图 2

注 A2、A3、A4、A5、A6 这五个单元格内输入的是字母 a，b，c，p，S，可用字体格式化为我们喜欢的格式. B2、B3、B4 可格式化为数值，小数点后取 4 位. 还可在格式单元格的对话框中选取你喜欢的颜色.

3. 相对引用和绝对引用

在输入公式时，有两个重要概念大家一定要理解. 即相对引用和绝对引用. 下面我们通过上例加以说明.

我们把图表 2 拷贝到工作表另外的地方，看看发生了什么. 例如拷贝到区域 D1：E6. 表面上看与表 2 一样，双击 6.5 所在的单元格，我们看到公式已不是“1/2 * (B2+B3+B4)”，而是“1/2 * (E2+E3+E4)”. 这是因为公式中的单元格的地址是相对的. 当你在 B5 中输入公式“1/2 * (B2+B3+B4)”时，计算机记忆的是其他单元格对它的相对位置，即记为“1/2 乘上它上面三个连续单元格内的数值相加的和”，当 B5 拷贝到 E5 时，也同样是对它上面的三个单元格进行计算. 试试看，改变 B2、B3、B4 的值，看看 E5 的值是否有变化. 你不妨把 B5 这个单元格的公式单独拷贝到其他位置，例如 C5，如果 C5 单元格上面三个单元格没有数值（或都是 0），你将看到 C5 显示的是 0，激活 C5 时，在公式栏中看到的是“=1/2 * (C2+C3+C4)”. 如果你在向单元格 C2、C3、C4 中输入数值，看看 C5 中的变化. 通过以上操作，你可能就会理解公式中变项相对引用的含义了. 什么是绝对引用呢？看看下面的操作.

在单元格 A8、B8 中，分别输入 4，6，在 C8 中输入公式“=$A$8+$B$8”，按“Enter”键，则在 C8 中显示 10. 记号 $A$8 表示，不论公式在何处，计算机记忆的总是 A8 的值. 它引用的都是 A8 中的数据. 你不妨把 C8 中公式拷贝到 D10，变动 A8 和 B8 的值，看看 D10 是否变化.

当我们激活带有公式的单元格时，可在公式栏中编辑公式，对公式中的各项进行修改. 也可双击单元格，直接在单元格中修改.

4. 电子工作表中的函数

电子工作表在数值的科学计算方面提供了 8 类函数：财务、日期与时间、数学与三角函数、统计、查找与引用、文本、逻辑、信息. 每一类中提供了许多具体函数的计算. 例如，在数学与三角函数中就提供了 52 种函数，在逻辑一类中提供了 6 种，在统计类中提

供了 71 种，这对中职数学用到的数值计算已足够了.

通过点击菜单栏的插入按钮中的函数项或点击工具栏中的标有 f_x 的按钮，在下拉菜单和对话框中，就可找到这些函数及使用方法.

下面介绍数学中常用的一些函数：

1. PI（圆周率） 向任一单元格输入"=PI()"，按 Enter 键，单元格内按要求返回一个圆周率的近似值，最多显示有效位为 14 位：3. 14159265358979.

2. SQRT（求一个数的平方根） 向任一单元格输入 "=SQRT(2)"，按 Enter 键，单元格内按要求返回 2 的正平方根的近似值.

3. SUM（求和） 如果在 A1：A6 有数值，要求计算它们的和，并把和放到 A7 中，则可在 A7 中输入公式 "=SUM(A1：A6)"，按 Enter 键，单元格内就会显示它们的和.

4. SIN（求正弦） 向任一单元格输入 "=SIN(RADIANS(30))"，按 Enter 键，则在单元格内显示 30°的正弦值. 其中 RADIANS() 函数是把角度值转化为弧度值.

5. MOD（求余数） 向任一单元格输入 "=MOD(15，6)"，按 Enter 键，单元格内显示 3，即 15 被 6 除的余数.

6. TODAY（日期函数） 向任一单元格输入 "=TODAY()"，按 Enter 键，单元格内显示当前日期（2001—5—21）. 如输入 "=NOW()" 将返回系统当前日期和系统时间.

7. AND（且） 对多个表达式进行判断，如果都真则输出真（TRUE），否则输出假（FALSE）. 在任意单元格输入 "= AND(3＞2，4＜3)，按 Enter 键，单元格显示 "FALSE"；在任意单元格输入 "= AND(3＞2，2＜3)，按 Enter 键，单元格显示 "TRUE". AND() 函数也可对两个单元格内的表达式进行测试判断. 向单元格 E9 输入 "=4＞3"，向单元格 E10 输入 "=0＞3"，向单元格 E11 输入 "=AND(E9，E10)"，按 Enter 键，单元格显示 "FALSE".

8. OR(或) 对多个表达式进行判断,如果有一个真,则输出真(TRUE),否则输出假(FALSE). 例如,在任意单元格输入"=OR(3＞2,4＜3),按 Enter 键,单元格显示"TRUE"；在任意单元格输入"=OR(1＞2,5＜3),按 Enter 键,单元格显示"FALSE". OR()函数也可对两个单元格内的表达式进行测试判断. 例如,向单元格 F9 输入"=4＞3",向单元格 F10 输入"=0＞3",向单元格 F11 输入"=OR(F9,F10)",按 Enter 键,单元格显示"TRUE".

9. NOT（非） 对一个表达式进行判断，如果表达式假（FALSE），则输出真（TRUE），反之如果表达式真（TRUE），则输出假（FALSE），例如，在任意单元格输入 "=NOT(3＞2)"，按 Enter 键，单元格显示 "FALSE".

10. IF（如果） 对一个表达式进行判断，如果真，则输出（TRUE）或输出一个你指定的符号. 例如，向任一单元可格中输入 "=IF(3＞2；"+"；"−")"，此式表达的意思是，如果 3＞2 为真，则输出正号，如果为假，则输出负号. 该函数也可对单元格内的表达式进行测试判断.

练习

1. 制作下面的计算表：给出直角三角形任意两边的值，计算第三边、面积和弦上的高.

数据名	数据值
勾 (a)	3.00
股 (b)	4.00
弦 (c)	5.00
计算	计算结果
a	3.00
b	4.00
c	5.00
面积 (S)	6.00
弦上的高 (h)	2.40

（第 1 题）

2. 仿照本节例题，利用一元二次方程求根公式，求 $ax^2+bx+c=0$ 的解.
3. 自己举例对本节列出的 4 个逻辑函数进行练习.

三、函数的图象

电子工作表可在工作表中，构造图表和图象．下面我们举例说明.

例 求函数 $y=x^2$，$y=-x^2$ 在区间 $[-3, 3]$ 的图象.

解 在单元格 A1、B1、C1 中分别输入 x，$y=x$^2，$y=-x$^2．向 A2 中输入数值 -3，向 A3 中输入 -2.6，每次增加 0.4，向以下单元格输入直到 A17．选中 A2、A3 后可使用拷贝或拖动技术填充以下单元格．在 B2 中输入公式“=A2^2”，按“Enter”键，显示 9，使用拖动自动填充技术，在 B3 到 B17 中输入相应的函数值．在 C2 中输入公式“=(-A2^2)”或“-B2”，按“Enter”键，显示 -9．使用拖动自动填充技术，在 C3 到 C17 中输入相应的函数值.

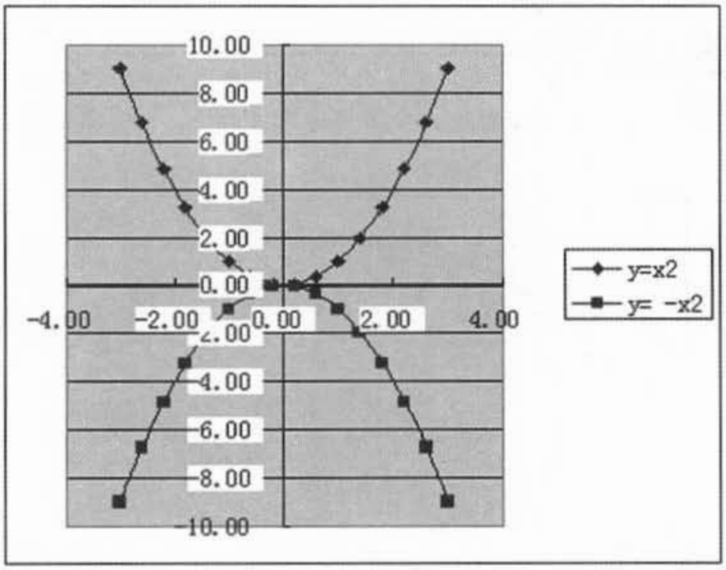


图 3

−3.00	9.00	−9.00
−2.60	6.76	−6.76
−2.20	4.84	−4.84
−1.80	3.24	−3.24
−1.40	1.96	−1.96
−1.00	1.00	−1.00
−0.60	0.36	−0.36
−0.20	0.04	−0.04
0.20	0.04	−0.04
0.60	0.36	−0.36
1.00	1.00	−1.00
1.40	1.96	−1.96
1.80	3.24	−3.24
2.20	4.84	−4.84
2.60	6.76	−6.76
3.00	9.00	−9.00

选中区域 A1：C17，单击工具条中的图表向导按钮，在出现的对话框中的图表类型一栏中，选中 XY 散点图，再在子图表一栏中选平滑线散点图，下面按照向导的指引，完成作图如上图所示.

下面介绍图表常用的术语.

数据序列 在例的图表中的几组数据，每一组数据对应一条线.

数据点 在例的图表中，显示的孤立的点，叫做数据点. 数据点在图中可选不同颜色

的符号（正方形、三角形和圆等）来表示．如果鼠标指针移向数据点，则在数据点旁显示这点的坐标（数据），如果点击数据点，则在公式栏中显示数据所在的位置．

轴 我们作的是 XY 平滑线散点图，它有 x，y 两根数轴．作图时可设置它的格式．作好的图还可修改．用鼠标双击坐标任一条坐标轴，就会出现对话框，在对话框内修改轴的格式．

图例项 图形右边长方形显示的是图例项．用鼠标双击该长方形，就会出现对话框，在对话框内修改图例项的格式．

在图上空白区域，击鼠标右键，会出现一个下拉菜单，你可选择项目进行修改．不妨一个一个的试一下，以了解其中的功能．

练习

1. 画出函数 $y=3x^2+2x+1$ 在区间 $[-5, 5]$ 的图象．
2. 画出函数 $y=2^x$，$y=\log_2 x$ 在区间 $[-3, 5]$ 的图象．
3. 画出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $[-4\pi, 4\pi]$ 的图象．

附录 2

常用数学符号

符　号	应　用	意义或读法	备　注
$\in$	$x\in A$	x 属于 A；x 是集合 A 的一个元［素］	
$\notin$	$y\notin A$	y 不属于 A；y 不是集合 A 的元［素］	
$\{,\cdots,\}$	$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$	诸元素 x_1，x_2，…，x_n 构成的集	也可用 $\{x_i, i\in I\}$，这里 I 表示指标集
$\{\mid\}$	$\{x\in A\mid p(x)\}$	使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元［素］之集	如果从前后关系看，集合 A 已很明确，则可使用 $\{x\mid p(x)\}$ 来表示
$\varnothing$		空集	
$\mathbf{N}$		非负整数集；自然数集	
$\mathbf{N}_+$，$\mathbf{N}^*$		自然数集排除 0 的集	
$\mathbf{Z}$		整数集	
$\mathbf{Q}$		有理数集	
$\mathbf{R}$		实数集	
$\mathbf{C}$		复数集	
$\subseteq$	$B\subseteq A$	B 是 A 的子集	也可用 $\subset$
$\subsetneqq$	$B\subsetneqq A$	B 是 A 的真子集	
$\not\subseteq$	$B\not\subseteq A$	B 不是 A 的子集	
$\complement$	$\complement_U B$	U 中子集 B 的补集	
$\neg$	$\neg p$	非、否定符号	p 的否定；非 p
$\Rightarrow$	$p\Rightarrow q$	推出	有时也用 $\rightarrow$
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	等价符号	$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$；有时也用 $\leftrightarrow$
$\forall$	$\forall x\in A$，$p(x)$	全称量词	命题 $p(x)$ 对于每一个属于 A 的 x 为真．当考虑的集合 A 从上下文看很明白时，可用记号 $\forall x$，$p(x)$
$\exists$	$\exists x\in A$，$p(x)$	存在量词	存在 A 中的元素 x 使 $p(x)$ 为真．当考虑的集合 A 从上下文看很明白时，可用记号 $\exists x$，$p(x)$
$\tan x$	x 的正切		也可用 $\mathrm{tg}\, x$
$\cot x$	x 的余切		
$\arcsin x$	x 的反正弦		
$\arctan x$	x 的反正切		

索　引